А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Д. А. Райков.* Техн. редактор. *Н. А. Тумаркина.*
Подписано к печати 7/VI—48 г. $24^1/_4$ п. л. 38,92 уч.-изд. л. Тип. зн. в печ. л. 64 200.
А-09941. Тираж 6 000 экз. Цена книги 23 р. Переплет 3 р. Заказ № 473.

4-я тип. им. Евг. Соколовой треста „Полиграфкнига" ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.
Отпечатано с готовых матриц зак. 1258 1-й типографией Издат. Академии Наук.
Ленинград, В. О. 9 линия, 12.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Внутренняя геометрия исследует свойства поверхности и фигур на ней, не выходя за пределы поверхности, подобно тому, как в планиметрии геометрия на плоскости исследуется вне всякой зависимости от того факта, что плоскость может быть расположена в каком-то пространстве. Начало внутренней геометрии поверхностей было положено работой Гаусса «Общие исследования о кривых поверхностях», появившейся в 1827 г. С тех пор она была продвинута столь далеко, что в настоящее время, по крайней мере в той части, где дело касается геометрии малых кусков регулярных поверхностей, все принципиальные её вопросы могут считаться решёнными. Однако применяемые здесь методы дифференциальной геометрии в их обычной форме приложимы только к регулярным поверхностям, т. е. поверхностям, задаваемым уравнениями, содержащими функции, дифференцируемые достаточно большое число раз, — обычно не менее трёх. А между тем, нерегулярные поверхности заслуживают не меньшего внимания, потому что они также часто встречаются в жизни и могут быть изготовлены, скажем, из бумаги. Например, любой многогранник, конус или поверхность линзы с острыми краями не являются регулярными. Не мудрено поэтому, что возникает потребность исследовать также нерегулярные поверхности. Далее, условия дифференцируемости, налагаемые на поверхности в дифференциальной геометрии, далеко не всегда бывают оправданы геометрическим существом задачи, а вызываются скорее удобствами аналитического аппарата. Наконец, в последнее время внимание геометров всё более привлекают задачи геометрии «в целом», при решении которых аналитический аппарат, теряя свой обычный автоматизм, оказывается часто недостаточным и требует привлечения чисто геометрических или топологических соображений.

Конечно, изучать все вообще возможные поверхности представляется безнадёжным, потому что для них нельзя ожидать сколько-нибудь далеко идущих общих результатов. Мы ограничиваемся здесь выпуклыми поверхностями. Выпуклая поверхность, в самом общем смысле, есть целая граница, или кусок границы выпуклого тела, т. е. тела, содержащего вместе с любыми двумя своими точками также весь соединяющий их отрезок. По словам Минковского, «теоремы о выпуклых телах представляют особую прелесть потому, что они, как правило, оказываются верными для всей категории этих объектов без каких бы то ни было исключений». Поэтому и выпуклые поверхности оказываются, так сказать, очень удачно определённым объектом, и в последнее время для них были получены общие результаты, не ограниченные никакими предвзятыми условиями регулярности. Эти результаты не относились, однако, к их внутренней геометрии. Поэтому казалась насущной задача исследовать также внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей и прежде всего найти условия, полностью характеризующие их внутреннюю метрику. Оказалось, что внутренняя геометрия произвольных выпуклых поверхностей может быть развита не менее содержательно, чем внутренняя геометрия регулярных поверхностей. Удалось, в частности, также выяснить геометрические условия применимости основных формул классической внутренней геометрии. Настоящая книга посвящена изложению основных моментов возникшей здесь обширной теории, построением которой я занимался в течение ряда лет.

В отношении основных понятий и методов я совершенно отхожу от обычной дифференциальной геометрии. Координаты на поверхности вводятся только в специальных случаях. Метрика поверхности задаётся не линейным элементом, а непосредственно расстоянием между точками, измеренным на поверхности. Основным понятиям длины, угла, площади, интегральной кривизны и т. д. даются внутренние геометрические определения. В связи с этим метод исследования носит почти исключительно геометрический характер. Сущность его состоит, во-первых, в том, что сначала изучаются выпуклые многогранники, а потом полученные для них результаты переносятся на любые выпуклые поверхности путём предельного перехода. Во-вторых, фигуры на кривой поверхности заменяются соответствующими фигурами на плоскости и исследуются получающиеся при этом искажения. Это относится в первую очередь к треугольникам. В соответствии с этим к «кривой метрике» мы приближаемся «многогранной метрикой», задаваемой системой плоских треугольников, «склеенных» друг с другом по сторонам. Поэтому, в частности, важную роль играет теорема, дающая условия, при которых из заранее нарезанных из бумаги многоугольников можно склеить замкнутый выпуклый многогранник. Наконец, чрезвычайно плодотворным оказывается также «метод разрезывания и склеивания», состоящий в построении поверхности, «склеенной» из кусков других поверхностей.

Хотя нашей главной целью является изучение выпуклых поверхностей без дополнительных условий регулярности, тем не менее ряд результатов оказывается новым и для регулярных поверхностей, в особенности там, где речь идёт о задачах в «целом». Стоит ещё отметить, что наши методы оказываются применимыми также к исследованию невыпуклых поверхностей. Возникающее в связи с этим обобщение нашей теории рассматривается, правда, в самых общих чертах, в последней главе.

Я должен поблагодарить Д. А. Райкова, редактора этой книги, и В. А. Залгаллера за ряд их замечаний, позволивших исправить некоторые существенные неточности, имевшиеся в изложении. Особенно же мне хочется вспомнить здесь моих друзей И. М. Либермана и С. П. Оловянишникова, погибших на фронте в 1941 г. на самом пороге расцвета их геометрического таланта. Постоянное тесное общение с ними способствовало выяснению многих пунктов излагаемой здесь теории, которая в то время ещё только зарождалась. Данное впервые Либерманом доказательство существования односторонней касательной во всякой точке геодезической на выпуклой поверхности, которое я воспроизвожу в § 5, гл. IV, представляет бесспорный образец красивого геометрического рассуждения; применяемый же Либерманом метод допускает немало других существенных приложений. В § 5, гл. VIII я привожу прекрасную теорему Оловянишникова об изгибаемости бесконечных выпуклых поверхностей — первый общий результат в этом старом вопросе, которым занимался ещё Дарбу.

Несколько замечаний о порядке и характере изложения.

Прежде всего я старался сделать настоящую книгу доступной не только специалистам. Поэтому, а также в связи с отходом от обычной дифференциальной геометрии, изложение начинается с самых основных понятий: определение внутренней метрики поверхности, постановка задач внутренней геометрии и т. д. Необходимый минимум сведений по теории выпуклых тел даётся в специальном дополнении, помещённом в конце книги. Применяемый математический аппарат незначителен по своему объёму. Существенным является некоторый топологический минимум: теорема Жордана о замкнутых кривых, теорема Эйлера, понятия замкнутого и открытого множества, границы, непрерывного отображения и т. п. В главах V и X существенно используются основные факты из теории лебеговской меры, а в главах X и XI применяется интеграл Лебега. (Применяя не самые первоначальные теоремы этих теорий, мы ссылаемся на известные курсы, в которых даётся их доказательство.) В гл. VI используется известная теорема об обращении неявных функций. Сколько-нибудь глубокое знакомство с дифференциальной геометрией совершенно не предполагается.

Все основные понятия и теоремы я пытался разъяснить и доказать со всей обстоятельностью. Многие интересные вопросы, не являющиеся, однако, основными, освещаются короче, в порядке реферата. Кроме того, я позволил себе формулировать по ходу изложения ряд нерешённых ещё вопросов, вероятная трудность которых колеблется, конечно, в больших пределах.

В гл. I вводятся основные понятия и приводятся без доказательств основные результаты. Первая глава является, следовательно, как бы обзором всей теории. В гл. II излагаются известные общие теоремы о спрямляемых кривых (§ 1) и общие теоремы о кривых наименьшей длины (§§ 2,3); эта часть гл. II необходима для всего дальнейшего изложения; следующие её параграфы (4—6) содержат несколько более глубокие результаты, которые используются впервые только в гл. V и особенно в главах VII и X. В гл. III устанавливаются самые основные свойства внутренней метрики выпуклых поверхностей. После этого изложение развивается по двум, почти независимым линиям: 1) дальнейшее исследование внутренней геометрии выпуклых поверхностей, 2) доказательство существования поверхностей с заданной метрикой.

Первая линия проходит следующим образом: в гл. IV изучаются основные свойства угла между кратчайшими линиями. Гл. V посвящена теории кривизны (§§ 1—4) и некоторым её приложениям (§§ 5, 6). В §§ 1,2 гл. IX излагаются основы теории кривых на выпуклых поверхностях, а §§ 3—6 посвящены приложениям и специальным вопросам теории кривых, излагаемым по большей части в порядке реферата. В §§ 1,2 гл. X излагаются основы учения о площади на выпуклых поверхностях, а в § 3 рассматриваются некоторые задачи на максимум площади. Наконец, гл. XI посвящена поверхностям, на которых отношение кривизны области к её площади подчинено тем или иным ограничениям.

Вторая линия изложения проходит в главах VI, VII, VIII и в § 3, 4 гл. IX, причём в главах VI, VII, VIII используются (помимо результатов глав II и III) только результаты § 1 гл. IV и § 1 гл. V.

Гл. XII представляет собою реферативное изложение обобщения всей теории на выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского и в сферическом пространстве, а в последнем её параграфе намечается теория невыпуклых поверхностей, подчинённых, конечно, некоторым необходимым условиям.

А. Д. Александров

Ленинград, 1946 г.

ГЛАВА I.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ.

§ 1. Общее понятие о внутренней геометрии и её задачах.

Поверхностью мы будем называть фигуру (множество точек) в трёхмерном эвклидовом пространстве, обладающую следующими свойствами: 1) у каждой её точки есть окрестность, гомеоморфная кругу, 2) любые две её точки можно соединить на ней непрерывной кривой[1]). При этом окрестностью точки O на поверхности мы называем любую часть поверхности, содержащую все её точки, лежащие в каком-либо шаре с центром в O[2]). Непрерывной кривой называется любой непрерывный образ отрезка.

Пусть F — какая-нибудь поверхность, обладающая тем свойством, что на ней любые две её точки можно соединить кривой, имеющей конечную длину. Тогда для каждой пары точек X, Y поверхности F существует точная нижняя граница длин кривых, лежащих на поверхности F и соединяющих эти точки.

Эту точную нижнюю границу мы назовём *расстоянием между точками X и Y на поверхности F* и обозначим $\rho_F(XY)$.

Определённое таким образом расстояние удовлетворяет трём основным условиям, которым принято подчинять понятие расстояния вообще. Условия эти следующие:

1) $\rho(XY)=0$ тогда и только тогда, когда точки X и Y совпадают.

2) $\rho(XY)=\rho(YX)$, т. е. расстояние от X до Y то же, что от Y до X.

3) $\rho(XY)+\rho(YZ)\geqslant\rho(XZ)$. Это последнее условие называют *неравенством треугольника*.

Из этих условий уже следует, что $\rho(XY)\geqslant 0$, так как $\rho(XY)+\rho(YX)\geqslant\geqslant\rho(XX)$, т. е. $2\rho(XY)\geqslant 0$.

---

[1]) В силу нашего определения поверхность не имеет самопересечений, и границу поверхности, если таковая имеется, мы не считаем принадлежащей поверхности; таким образом, скажем, полушарие будет поверхностью в смысле нашего определения только в том случае, если исключить из него ограничивающий его экватор, так как у точки на экваторе в полушарии нет круговой окрестности. Эти ограничения мы вводим более для удобства, чтобы избежать разных оговорок, связанных с тем, что точки, в которых поверхность сама себя пересекает, как и точки, лежащие на границе, играют особую роль.

[2]) Обычно понятие окрестности в множестве (топологическом пространстве) M определяют следующими условиями: 1) окрестность точки O множества M есть подмножество M, 2) окрестность точки O содержит эту точку, 3) если U и V — две окрестности точки O, то существует окрестность точки O, содержащаяся в U и V, 4) если точка A принадлежит окрестности U точки O, то существует окрестность точки A, содержащаяся в U (т. е. окрестность должна быть множеством, открытым относительно M). При нашем определении окрестности точки на поверхности первые три условия выполняются, а последнее, вообще говоря, не выполняется, потому что под окрестностью понимается л ю б а я часть поверхности, содержащая все её точки, заключённые в некотором шаре. Такое ослабление условий, определяющих понятие окрестности, не существенно, и мы вводим его ради его большей простоты. Дальше мы всегда имеем в виду наше упрощённое определение окрестности. Такое отступление от обычного определения сделано, например, в книге Г. Зейферта и В. Трельфалля, Топология, гл. II, § 5; там показано, что такое определение совершенно достаточно.

То, что указанные условия действительно выполняются для определённого нами расстояния на поверхности, настолько очевидно вытекает из данного определения, что нет надобности излагать их доказательство.

Всякое множество, в котором для любой пары его элементов (точек) X, Y определено число $\rho(XY)$ (функция пары элементов), удовлетворяющее трём только что формулированным условиям, называют *метрическим пространством*; функцию $\rho(XY)$ мы называем *метрикой* этого пространства, а её значение для какой-нибудь пары точек X, Y — расстоянием между этими точками[1]). Воспользовавшись этим понятием, можно сказать, что, в силу данного нами определения расстояния на поверхности, поверхность превращается в метрическое пространство. Задача внутренней геометрии поверхности состоит в исследовании этого метрического пространства самого по себе, вне зависимости от того обстоятельства, что оно представляет собой какую-то фигуру в трёхмерном или вообще в каком бы то ни было объемлющем пространстве. Метрику, определённую нами на поверхности, называют *внутренней* в отличие от «внешней», которая представляет пространственные расстояния между точками поверхности. Поверхность имеет внутреннюю метрику тогда и только тогда, когда каждые две её точки можно соединить на ней кривою конечной длины; поэтому только для таких поверхностей может итти речь о внутренней геометрии.

Внутренней геометрии данной поверхности принадлежат те и только те понятия и теоремы, которые могут быть определены и формулированы так, что из свойств поверхности не используется в конечном счёте ни одно, кроме свойств её метрики.

Примерами таких понятий являются, прежде всего, кроме самого понятия расстояния на поверхности, понятие об окрестности (окрестность точки X есть любое множество точек поверхности, содержащее все точки поверхности, удалённые от X менее чем на какое-нибудь $r > 0$ в смысле расстояния на поверхности), и вместе с понятием об окрестности — все связанные с ним топологические понятия: замкнутого и открытого множеств, точки сгущения, границы и т. п. Далее мы покажем, как можно, пользуясь только внутренней метрикой поверхности, ввести понятие о длине, угле и площади, определить аналог прямолинейного отрезка: кратчайшую линию, соединяющую две точки на поверхности, после чего, естественно, возникает понятие о многоугольнике и т. д. Одним словом, мы убедимся в том, что внутренняя геометрия допускает понятия и задачи столь же содержательные, как и планиметрия, которая есть не что иное, как внутренняя геометрия плоскости.

Если мы имеем два метрических пространства и между их точками можно установить такое соответствие, что расстояние между любой парой точек в одном пространстве равно расстоянию между соответственной парой точек в другом пространстве, то такие пространства называются *изометричными*, а установленное соответствие или отображение одного пространства на другое называется *изометрическим*. Если мы можем установить между двумя поверхностями изометрическое соответствие, то внутренняя геометрия у них одна и та же. Предложения внутренней геометрии инвариантны относительно изометрических отображений.

---

[1]) Мы не предполагаем у читателя знакомства с теорией метрических пространств. Достаточно знать, что окрестностью точки X в метрическом пространстве называется любое множество, содержащее все точки, удалённые от X менее чем на какое-нибудь $r > 0$. После этого, определения замкнутого и открытого множеств, границы непрерывного отображения, точки сгущения и т. п. даются путём дословного повторения определений этих понятий для случая эвклидова пространства. Из свойств расстояния нам нужно следующее: если точки X_n, Y_n сходятся к X, Y, т. е. если $\rho(X_nX) \to 0$, $\rho(Y_nY) \to 0$, то $\rho(X_nY_n) \to \rho(XY)$. Это сразу следует из неравенства треугольника. Действительно, $\rho(X_nY_n) \leqslant (X_nY) + \rho(YY_n) \leqslant \rho(XY) + \rho(X_nX) + \rho(Y_nY)$ и точно так же $\rho(XY) \leqslant \rho(X_nY_n) + \rho(X_nX) + \rho(Y_nY)$, т. е. $|\rho(XY) - \rho(X_nY_n)| \leqslant \rho(X_nX) + \rho(Y_nY)$ и при $\rho(X_nX)$, $\rho(Y_nY)$, стремящихся к нулю, $\rho(X_nY_n) \to \rho(XY)$.

Изучение внутренней геометрии всех поверхностей вообще представляет, конечно, слишком большие трудности, и тут едва ли можно получить далеко идущие общие результаты, потому что понятие поверхности вообще является очень широким и включает, так сказать, сколь угодно «плохие» нерегулярные поверхности. Поэтому приходится ограничиваться более или менее широким классом поверхностей, подчинённых дополнительным условиям. Например, в классической дифференциальной геометрии исследуются только такие поверхности, которые могут быть заданы в прямоугольных координатах посредством уравнений, содержащих функции, дифференцируемые достаточно большое число раз, вообще говоря, не менее трёх. Такие поверхности мы называем *регулярными*.

В этой книге мы будем заниматься специально выпуклыми поверхностями, без каких бы то ни было ограничений гладкости, существования кривизны и т. п. Определение выпуклой поверхности следующее. *Выпуклым телом* называют замкнутое множество, имеющее внутренние точки и обладающее тем свойством, что вместе с любыми двумя своими точками оно содержит также весь соединяющий их прямолинейный отрезок. *Выпуклой поверхностью* мы называем любую область (т. е. связное и открытое множество), лежащую на границе выпуклого тела. Поверхность, являющуюся целой границей выпуклого тела, мы называем *полной* выпуклой поверхностью.

Далее мы постоянно будем пользоваться некоторыми основными сведениями о выпуклых поверхностях. Эти сведения излагаются в специальном небольшом Дополнении, помещённом в конце книги. Тот, кто знаком с основами теории выпуклых тел, едва ли найдёт там что-либо новое для себя, а читатель, которому не приводилось заниматься этой теорией, может сначала прочесть это Дополнение или обращаться к нему по мере надобности, следуя ссылкам, которые мы будем делать.

В частности, в § 4 Дополнения доказано, что полные выпуклые поверхности могут быть только трёх топологически различных типов:

1) замкнутые выпуклые поверхности, гомеоморфные сфере; они ограничивают выпуклые тела конечных размеров;

2) бесконечные выпуклые поверхности, гомеоморфные плоскости, как, например, эллиптический параболоид;

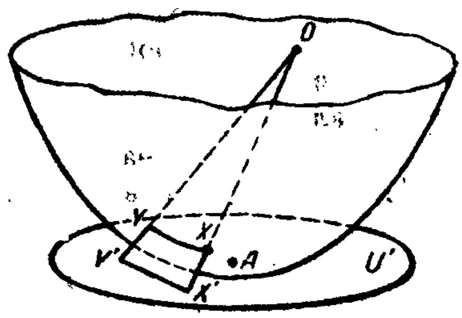
3) выпуклые цилиндрические поверхности, гомеоморфные круговому цилиндру.

Из того, что полная выпуклая поверхность гомеоморфна или сфере, или плоскости, или цилиндру, очевидно, следует, что всякая выпуклая поверхность, т. е. область на полной выпуклой поверхности, является поверхностью в смысле определения, данного в начале, т. е. каждая её точка имеет окрестность, гомеоморфную кругу, и любые две её точки можно соединить на ней непрерывной кривой.

Кроме того, *любые две точки выпуклой поверхности можно соединить на ней кривой конечной длины, так что всякая выпуклая поверхность имеет внутреннюю метрику* (не будь этого, вопрос о внутренней геометрии любых выпуклых поверхностей был бы лишён смысла).

Действительно, пусть F — какая-либо выпуклая поверхность; она является областью на границе некоторого выпуклого тела H. Возьмём на F какую-нибудь точку A и проведём через эту точку опорную плоскость P к поверхности F (Дополнение § 2). Если точка O лежит внутри тела H, то всякий луч, проведённый из неё, пересекает границу тела H не более чем в одной точке. Поэтому в достаточно малой окрестности точки A проектирование из точки O даёт взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение поверхности F на плоскость P. Пусть U — такая окрестность точки A, проекция которой на плоскость P представляет собой круг U' с центром в точке A (черт. 1). Возьмём в окрестности U две точки X и Y и пусть X', Y' — их проекции на плоскость P. Отрезок $X'Y'$ лежит в круге U' и представляет собой проекцию кривой $\widehat{XY}$, по которой плоский угол $OX'Y'$ пересекает окрестность U. Кривая $\widehat{XY}$ — выпуклая, потому что пересечение плоскости $OX'Y'$ с выпуклым телом H есть выпуклая плоская область. Так как всякая выпуклая кривая имеет длину, то нашим рассуждением доказано следующее: у каждой точки A на выпуклой поверхности есть окрестность, в которой любые две точки можно соедиинть кривой конечной длины.

Пусть теперь X и Y — две произвольные точки поверхности F. Соединим их произвольной непрерывной кривой L, лежащей на F; такая кривая существует в силу самого определения поверхности, но может не иметь конечной длины. По доказанному, каждую точку кривой L можно окружить окрестностью, в которой любые две точки можно соединить кривой конечной длины. По известной лемме Бореля из этих окрестностей можно выбрать конечное число также покрывающих L. Тогда, взяв на кривой L конечную последовательность точек, лежащих каждая в двух пересекающихся окрестностях, и соединив эти точки кривыми конечной длины, получим кривую, также имеющую конечную длину и соединяющую данные точки X и Y. Таким образом, всякая выпуклая поверхность действительно имеет внутреннюю метрику.


Черт. 1.

Какие же общие задачи стоят перед внутренней геометрией поверхностей? Эти задачи можно несколько условно разделить на пять групп. Пусть мы рассматриваем некоторый класс поверхностей Ф, например, класс выпуклых поверхностей. Каждая поверхность класса Ф, с точки зрения внутренней геометрии, представляет собой некоторое метрическое пространство. Первая группа задач сводится к нахождению тех свойств, которые выделяют поверхности класса Ф из всех вообще возможных метрических пространств. Иными словами, речь идёт об условиях, которые необходимы и достаточны для того, чтобы данное метрическое пространство было изометрично какой-нибудь поверхности из класса Ф. Поверхность F изометрична пространству R, если между точками пространства R и поверхности F можно установить соответствие, при котором для каждой пары точек поверхности F расстояние в смысле внутренней метрики равно расстоянию между соответствующими точками пространства R. Про такую поверхность говорят, что она *реализует* метрику, имеющуюся в пространстве R.

Поставленный вопрос можно рассматривать как задачу аксиоматического обоснования внутренней геометрии поверхностей класса Ф. Действительно, присоединяя к условиям (аксиомам), определяющим понятие метрического пространства, условия, необходимые и достаточные для того, чтобы метрическое пространство было изометрично поверхности из класса Ф, мы получаем полную совокупность условий — аксиом, определяющих поверхности класса Ф с точки зрения их внутренней геометрии. Простейшим примером такой системы аксиом может служить аксиоматика эвклидовой планиметрии, основанная на понятии расстояния; в этом случае класс Ф содержит только одну поверхность — плоскость.

Вслед за первой группой задач встаёт другая, также относящаяся к основаниям внутренней геометрии и совершенно аналогичная известному вопросу оснований планиметрии. Задача состоит в том, чтобы дать определения и изучить главные свойства основных геометрических величин: длины, угла, площади. Кроме того, во внутренней геометрии поверхностей появляется одно новое понятие, не имеющее аналога в планиметрии, — понятие о внутренней кривизне поверхности. Определение этих понятий будет дано дальше; здесь мы только формулируем задачу: дать определения и изучить свойства указанных величин.

После того как все эти понятия будут определены, их нужно ввести в действие, ибо всякая математическая теория приобретает полную содержательность только тогда, когда её основные положения приводят к достаточному количеству содержательных теорем. Третья группа вопросов внутренней геометрии и состоит в том, чтобы на основе решения двух первых задач развивать внутреннюю геометрию поверхностей класса Ф, получая в ней различные общие и достаточно содержательные теоремы. Например: общие теоремы о треугольниках, стороны которых являются кратчайшими линиями на поверхности; или решение следующей важной проблемы: дать необходимые и достаточные условия, при которых выпуклая поверхность с точки зрения внутренней метрики оказывается настолько регулярной, что к ней приложимы методы классической дифференциальной геометрии. Конечно, объём этой третьей группы вопросов совершенно неопределён и по существу бесконечен, так как число даже общих доказуемых теорем не может быть ограничено.

Четвёртая группа вопросов, также мало определённая по своему характеру, состоит в том, чтобы указать и разработать какие-нибудь, по возможности общие, методы решения различных задач внутренней геометрии. Конечно, никто не может дать универсального метода, пригодного для решения любой задачи, так же, как нет универсального средства от всех болезней. Но указать общие способы подхода к решению большого числа задач представляет собой безусловно осмысленную проблему. В частности, главным таким методом для нас явится метод предельного перехода от выпуклых многогранников к любым выпуклым поверхностям.

Наконец, пятый круг вопросов, уже выходящий за рамки собственно внутренней геометрии, состоит в выяснении связи внутренней геометрии поверхности с её «внешней» геометрией, т. е. выяснении того, как сказываются внутренние геометрические свойства поверхности и фигур на ней на их пространственных свойствах. Например: какие условия, наложенные на внутреннюю метрику поверхности класса Ф, обеспечивают её гладкость? Какие свойства поверхности класса Ф как фигуры в пространстве зависят только от её внутренней метрики и тем самым сохраняются при любых её изометрических преобразованиях, превращающих её снова в поверхность класса Ф?

Для нас классом Ф будет класс всех выпуклых поверхностей. Однако в решении вопроса об условиях, необходимых и достаточных для того, чтобы данное метрическое пространство было изометрично выпуклой поверхности, имеется одна существенная трудность, которую полезно оговорить заранее.

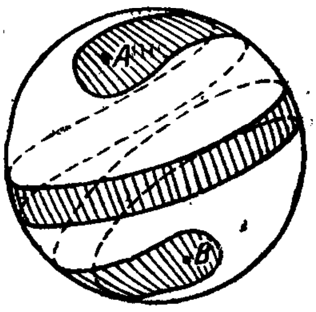
Представим себе какую-нибудь поверхность F, скажем, сферу. Возьмём на ней две точки A и B. Расстояние $\rho_F(AB)$ между ними определяется длиной меньшей из дуг AB большого круга. Вырежем теперь из сферы область F_1, заключающую точки A и B, но не содержащую не только некоторого отрезка дуги AB, но и никакой линии, сколь угодно близкой к этому отрезку. Например, за F_1 можно принять часть сферы, остающуюся после удаления какого-нибудь круга с центром в середине дуги AB. Мы получаем новую поверхность F_1, являющуюся частью прежней. Длины всех кривых, соединяющих на F_1 точки A и B, будут превосходить длину дуги AB на некоторое положительное ε. Поэтому окажется, что расстояние между A и B на F_1 будет больше, чем на F, именно

$$\rho_{F_1}(AB) \geqslant \rho_F(AB) + \varepsilon.$$

При этом ясно, что $\rho_{F_1}(AB)$ будет зависеть от того, как мы вырезаем область F_1; оно может быть сделано даже сколь угодно большим, для чего нужно принять за F_1 область, содержащую точки A и B и обвивающуюся вокруг сферы узкой лентой большое число раз (черт. 2).

Этот простой пример показывает, что, вырезая из поверхности разные области, мы можем получить новые поверхности, внутренняя метрика которых будет очень сильно отличаться от метрики исходной поверхности. Мы получаем таким образом едва ли обозримое множество разных внутренних метрик, и неясно, не слишком ли трудно будет, да имеет ли, в конце концов, смысл, искать свойства, полностью характеризующие каждую из получаемых таким образом метрик. Например, ответ даже на следующий простой вопрос: каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять метрика поверхности для того, чтобы эта поверхность была изометрична области на плоскости, оказывается достаточно сложным. Условие, чтобы поверхность была «развёртывающейся», т. е. чтобы её гауссова кривизна равнялась нулю, недостаточно, так как, например, цилиндр не изометричен никакой области на плоскости; его можно развернуть на плоскость только в том случае, если его разрезать подходящим образом, а это нарушит его внутреннюю метрику.

Однако все поверхности, представляющие части одной и той же поверхности, имеют много общего. Возьмём на поверхности F какую-либо точку O и рассмотрим часть поверхности, образованную точками, удалёнными от O менее чем на какое-нибудь данное $r > 0$ в смысле расстояний на F. Это будет окрестность точки O в смысле внутренней метрики поверхности F,— коротко: «внутренняя окрестность». Если взять на поверхности произвольную область F_1, содержащую точку O, то всегда можно будет найти такое $r > 0$, что соответствующая внутренняя окрестность точки O будет настолько удалена от границы области F_1, что кривая, соединяющая на поверхности F две любые точки X и Y из этой окрестности и имеющая наименьшую длину или длину, по крайней мере, сколь угодно близкую к точной нижней границе длин кривых, соединяющих X и Y, будет проходить на некотором расстоянии от границы области F_1. Поэтому расстояние между X и Y будет на F_1 то же самое, что и на F. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу:



Черт. 2.

Метрика в сколь угодно малой внутренней окрестности любой данной точки поверхности не зависит от того, какую область, содержащую эту точку, мы вырезаем на поверхности и рассматриваем, как новую поверхность. Точно так же метрика в сколь угодно малой окрестности данной точки поверхности F не изменится, если поверхность F дополнить до некоторой большей поверхности F_1.

Это замечание в применении к выпуклым поверхностям приводит к следующему результату. Пусть F — выпуклая поверхность и O — какая-либо точка на F. По определению, F есть область на границе некоторого выпуклого тела H. Возьмём выпуклое тело H_1, являющееся пересечением тела H с каким-либо шаром, имеющим центр в точке O и заключающим в себе заранее заданную ограниченную часть поверхности F. Поверхность тела H_1 будет замкнутой выпуклой поверхностью F_1, на которой точка O имеет окрестность, совпадающую с её окрестностью на исходной поверхности F. Если эта окрестность достаточно мала, то метрика в ней не зависит от того, рассматриваем ли мы её на поверхности F или на поверхности F_1. Таким образом, *всякую ограниченную часть выпуклой поверхности можно дополнить до замкнутой выпуклой поверхности и исследование свойств метрики в малых окрестностях достаточно проводить для замкнутых выпуклых поверхностей.* Этим замечанием мы будем дальше часто пользоваться, потому что иметь дело с замкнутыми поверхностями во многих отношениях проще.

Свойства, имеющие место в сколь угодно малой окрестности, называются свойствами «в малом». Мы показали, что свойства внутренней метрики поверхности в малом обладают устойчивостью относительно операции выделения из поверхности различных областей, оставаясь общими для всех таких областей. Поэтому, естественно, первым, на что обращают внимание при исследовании внутренней геометрии поверхностей, являются именно свойства «в малом»; таким образом из внутренней геометрии вообще выделяется сначала, как первая и наиболее простая её глава, внутренняя геометрия «в малом».

Задача характеризации «в малом» тех метрических пространств, которыми являются выпуклые поверхности, формулируется так: каковы те необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять метрика в сколь угодно малой окрестности любой точки данного метрического пространства для того, чтобы существовала выпуклая поверхность, сколь угодно малая часть которой была бы изометрична указанной окрестности? Мы дадим в настоящей книге ответ на этот вопрос.

Помимо свойств в малом, общих всем вообще выпуклым поверхностям, представляют интерес свойства полных выпуклых поверхностей, т. е. целых границ выпуклых тел. Именно, мы дадим ответ на следующий вопрос: каким необходимым и достаточным условиям должно удовлетворять метрическое пространство для того, чтобы существовала полная выпуклая поверхность, изометричная этому пространству? Это есть, как говорят, постановка задачи «в целом», в противоположность предыдущей задаче «в малом». Так как из самого определения выпуклой поверхности следует, что её всегда можно дополнить до целой границы выпуклого тела, то постановка именно этого вопроса является совершенно естественной.

Оказывается, однако, возможным объединить обе задачи «в малом» и «в целом» в одну. Для того чтобы формулировать эту более общую задачу, введём некоторые определения.

Кратчайшей XY мы называем кривую на поверхности, соединяющую две данные точки X, Y и имеющую наименьшую длину среди всех кривых, лежащих на поверхности и соединяющих эти две точки. Кратчайшая есть аналог прямолинейного отрезка и представляет основной образ внутренней геометрии. Однако хорошо известно, что её свойства не повторяют в точности всех свойств отрезка; например, на сфере имеются пары точек, которые соединяет не одна, а бесконечное множество кратчайших. Так как расстояние $\rho(XY)$ на поверхности равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X и Y, то длина кратчайшей XY как раз равна расстоянию между этими точками. Можно доказать, что если поверхность вообще имеет внутреннюю метрику, то у всякой её точки есть такая внутренняя окрестность, любые две точки которой можно соединить кратчайшей. Можно также доказать, что на всякой полной выпуклой поверхности любые две точки можно соединить кратчайшей. Следовательно, кратчайшие всегда существуют. (Эти утверждения будут доказаны в § 2 гл. II.)

Область G на поверхности F мы называем *выпуклой* (в смысле внутренней метрики), если каждые две точки области G можно соединить проходящей в ней кратчайшей. Вырежем из поверхности F выпуклую область G и будем её самою рассматривать как поверхность. Если X и Y — две точки из области G, то расстояние между ними равно длине соединяющей их кратчайшей и потому не зависит от того, рассматриваем ли мы область G как самостоятельную поверхность или как часть поверхности F. Таким образом, выпуклая область на поверхности обладает тем важным свойством, что её метрика не зависит от того, какую часть поверхности, содержащую эту область, мы выделяем и рассматриваем как самостоятельную поверхность. Кроме того, тот факт, что в выпуклой области каждые две точки можно соединить кратчайшей, делает возможным осуществлять в такой области многие построения, требующие проведения кратчайших. В гл. II мы специально рассмотрим некоторые основные свойства выпуклых областей и докажем, в частности, что у всякой точки на выпуклой поверхности существует сколь угодно малая выпуклая окрестность. Вместе с тем, поскольку две точки полной выпуклой поверхности всегда можно соединить кратчайшей, — такая поверхность сама по себе представляет выпуклую область. Таким образом, изучение внутренней метрики выпуклых областей объединяет, в частности, изучение внутренней метрики как «в малом», так и в «целом». В связи со всем сказанным становится ясным, что главное внимание можно фиксировать на исследовании внутренней геометрии выпуклых областей, и для них удаётся полностью решить первую проблему внутренней геометрии, т. е. можно найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данное метрическое пространство было изометрично выпуклой области на полной выпуклой поверхности; в частности, эта область может представлять самою полную поверхность.

В следующем параграфе мы рассмотрим в общих чертах, как ставились и решались основные задачи внутренней геометрии регулярных поверхностей в рамках классической дифференциальной геометрии. Мы не собираемся сказать что-нибудь новое по этому поводу; наша цель — только сделать более ясными связь и различие между классическим подходом к этим задачам и тем подходом, который проводится в этой книге. Результаты и методы классической дифференциальной геометрии мы вовсе не будем применять, но они указывают цели, к которым следует стремиться, чтобы в более общей теории сохранить по возможности главные классические достижения.

В дальнейших параграфах этой главы мы введём основные понятия внутренней геометрии и формулируем главные результаты для того, чтобы дать более ясную общую картину теории, детали которой будут постепенно разворачиваться в последующем изложении.

§ 2. Гауссова внутренняя геометрия.

Начала внутренней геометрии поверхностей были заложены Гауссом в его замечательной работе «Общие исследования о кривых поверхностях», появившейся в 1827 г. Первые две основные идеи этой работы: введение координат на поверхности и линейного элемента поверхности можно, применяя современный язык, изложить следующим образом. Пусть F — какая-либо поверхность; возьмём любую её точку и окрестность U этой точки, гомеоморфную квадрату D. В квадрате D мы введём обычные декартовы координаты u, v. Тогда, поскольку между точками окрестности U и квадрата D имеется взаимно однозначное и непрерывное соответствие, окрестность U можно представить уравнением

$$x = x(u, v),$$

которое означает, что каждой паре значений координат u, v соответствует определённый вектор x, идущий из некоторого выбранного начала в точку области U. Иными словами, x есть функция u и v. Предположим, что эта функция непрерывно дифференцируема, т. е. что существуют частные производные $x_u(u, v)$, $x_v(u, v)$, которые непрерывно зависят от u и v; кроме того, допустим, что векторы x_u и x_v в каждой точке линейно независимы. Если поверхность в окрестности каждой точки допускает такое представление, то она называется *гладкой* или *дифференцируемой*. В каждой точке она имеет касательную плоскость: плоскость, проходящую через векторы $x_u(u, v)$ и $x_v(u, v)$; малая окрестность точки на поверхности однозначно проектируется на касательную плоскость, проведённую в этой точке, и с точностью до величин второго порядка малости поверхность в такой малой окрестности можно заменить кусочком плоскости.

Если $x(u, v)$ и $x(u + du, v + dv)$ — две близкие точки на поверхности, то с точностью до величин высшего порядка

$$x(u + du, v + dv) - x(u, v) \cong x_u(u, v)\, du + x_v(u, v)\, dv,$$

т. е. (пренебрегая величиной второго порядка) вектор, соединяющий две близкие точки на поверхности, есть вектор, лежащий в касательной плоскости.

Квадрат длины вектора $dx = x_u du + x_v dv$ будет

$$dx^2 = ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

где, согласно Гауссу, положено

$$E = x_u^2,\ F = x_u x_v,\ D = x_v^2. \tag{2}$$

Формула (1) представляет не что иное, как квадрат длины вектора dx на плоскости, разложенного на составляющие по векторам x_u и x_v и имеющего относительно этих основных векторов компоненты (составляющие), равные du и dv.

Таким образом, смысл гауссова выражения для квадрата элемента длины состоит, попросту говоря, в том, что поверхность в бесконечном малом с точностью до величин высшего порядка изометрична малой области на касательной плоскости, и квадратичная форма (1) — первая квадратичная форма поверхности — даёт представление длины на касательной плоскости в координатах du, dv с основными векторами x_u и x_v. Коэффициенты E, F, G зависят от значений u и v и полностью определяют внутреннюю метрику поверхности. Именно, длина кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$, [т. е. $x = x(u(t), v(t))$] на поверхности выражается интегралом

$$s = \int ds = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt. \tag{3}$$

А если определена длина, то определено и расстояние, как точная нижняя граница длин кривых. Следовательно, внутренняя метрика гладкой поверхности задаётся её первой квадратичной формой. Возникающее отсюда понятие внутренней геометрии поверхности Гаусс определяет в § 13 своей работы следующими словами:

«Выведенное в предыдущем параграфе предложение приводит к рассмотрению кривых поверхностей с новой точки зрения, которая заслуживает со стороны геометров самого тщательного исследования. Именно, если мы будем рассматривать поверхности не как границы тел, но как тела, у которых одно из измерений бесконечно мало и которые, сверх того, вполне гибки, но не растяжимы, то свойства поверхности частью зависят от формы, принятой ею в данный момент, частью же абсолютны, т. е. остаются неизменными, как бы её ни согнуть. К последним свойствам, изучение которых открывает для геометрии новое плодотворное поле, принадлежат мера кривизны и полная кривизна в том смысле, как эти выражения нами установлены; далее, сюда принадлежит учение о кратчайших линиях и кое-что иное, что мы рассмотрим позднее». (Дальше Гаусс исследует, в частности, треугольники на поверхности.) «При такой точке зрения, плоскость и развёртываемые на плоскость поверхности, как, например, конус, рассматриваются как существенно одинаковые. Настоящей исходной точкой для общего выражения поверхности при такой точке зрения является формула $\sqrt{E\,du^2 + 2F du\,dv + G\,dv^2}$, которая выражает зависимость элемента дуги от двух вспомогательных переменных» (т. е. от u, v).

Длина кривой, угол между кривыми, площадь области, геодезическая кривизна кривой и, наконец, мера кривизны поверхности в данной точке, или, как удачно говорит Гаусс, удельная кривизна поверхности (в отличие от полной кривизны, равной площади сферического изображения) выражаются через коэффициенты E, F, G по известным формулам, которые даются во всяком курсе дифференциальной геометрии и исходят по существу от Гаусса. Гаусс доказал также основную теорему, касающуюся связи внутренней метрики поверхности с её пространственной формой; эта теорема утверждает, что произведение главных кривизн в каждой точке поверхности, которое и есть меры кривизны поверхности в этой точке, зависит только от внутренней метрики и выражается через коэффициенты E, F, G по формуле, данной Гауссом.

Введением координат на поверхности и квадратичной формы ds^2 Гаусс дал общий аналитический метод изучения внутренней геометрии регулярных поверхностей. Наконец, сам Гаусс и его последователи доказали многие теоремы внутренней геометрии, показав тем самым, что новое поле, открытое для геометрии Гауссом, действительно чрезвычайно плодотворно. Так решались для регулярных поверхностей те общие задачи внутренней геометрии, о которых мы говорили выше в § 1. Оставалась только первая из поставленных там проблем. В плане гауссовой теории эта проблема ставится следующим образом:

Представим себе какую-нибудь область D, в которой введены координаты u, v и заданы три непрерывные функции $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, так, что квадратичная форма

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{4}$$

всюду положительно определённая. Этим, как говорят, в каждой точке области D задан линейный элемент ds. Тогда длина кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$ в области D определяется по формуле (3) и тем самым оказывается определённым расстояние между любыми двумя точками области D как точная нижняя граница длин соединяющих их кривых. Спрашивается: существует ли такая поверхность, первая квадратичная форма которой при подходящем выборе координат совпадает с заданной в области D? Ответ на этот вопрос «в малом» даёт следующая фундаментальная теорема, доказанная Дарбу [1]):

Если коэффициенты $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ суть аналитические функции u и v, т. е. разлагаются в степенные ряды в окрестности каждой точки, то метрика, заданная линейным элементом с этими коэффициентами, реализуема в малом посредством аналитической поверхности, т. е. у каждой точки области D существует такая окрестность, которую можно изометрически отобразить на некоторую аналитическую поверхность. При этом координаты u, v сами собой переносятся на эту поверхность (соответственные точки имеют одни и те же координаты!) и коэффициенты E, F, G в каждой точке поверхности, вычисленные по формулам (2), совпадают с заданными значениями E, F, G в соответствующей точке области D.

Эта теорема Дарбу показывает, что возможность задать метрику посредством линейного элемента с аналитическими коэффициентами полностью характеризует в малом внутреннюю метрику аналитических поверхностей. Таким образом, во всяком случае, поскольку речь идёт о свойствах в малом, всё сводится к произвольно задаваемому линейному элементу с аналитическими коэффициентами. Всё, что только можно определить и доказать, пользуясь только им, будет иметь своё значение для поверхностей в пространстве и будет принадлежать их внутренней геометрии.

Возможность задания метрики посредством линейного элемента имеет тот смысл, что метрика оказывается эвклидовой в бесконечно малом. Говоря точнее, можно доказать следующее: пусть в области D задан линейный элемент с непрерывными коэффициентами E, F, G. Пусть E_0, F_0, G_0 — значения этих коэффициентов в точке (u_0, v_0). Возьмём на плоскости P векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ так, что

$$\boldsymbol{a}^2 = E_0, \quad \boldsymbol{b}^2 = G_0, \quad \boldsymbol{ab} = F_0. \tag{5}$$

Так как $E_0G_0 - F_0^2 > 0$, то такие векторы существуют и линейно независимы. Примем эти векторы за основные векторы координатной системы, координаты

---

[1]) Эту теорему можно найти во всяком большом курсе дифференциальной геометрии. На русском языке см. С. П. Фиников, Теория поверхностей. При более слабых предложениях относительно коэффициентов E, F, G эта теорема, насколько нам известно, не доказана в общем виде. Если гауссова кривизна не меняет знака, то, повидимому, достаточно предполагать трёхкратную дифференцируемость функций E, F, G.

в которой обозначим p, q. Тогда расстояние между точками (p, q) и $(p+\Delta p, q+\Delta q)$ на плоскости P выразится формулой

$$\rho_0 = \sqrt{E_0\Delta p^2 + 2F_0\Delta p\,\Delta q + G_0\Delta q^2}. \tag{6}$$

Каждой точке (u, v) области D сопоставим точку (p, q) плоскости P так, что

$$p = u - u_0, \quad q = v - v_0. \tag{7}$$

Тогда точка (u_0, v_0) переходит в начало координат на плоскости и $\Delta p = \Delta u$, $\Delta q = \Delta v$. Выражение для длины в виде интеграла (3) вследствие непрерывности коэффициентов E, F, G приводит к тому, что расстояние ρ между точками (u, v), $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ области D можно вблизи точки (u_0, v_0) представить формулой

$$\rho = \sqrt{E_0\,\Delta u^2 + 2F_0\Delta u\,\Delta v + G_0\Delta v^2} + \delta, \tag{8}$$

где δ — бесконечно малое более высокого порядка, чем расстояния точек (u, v) и $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ от точки (u_0, v_0). Сравнивая формулы (6) и (8), мы получаем, что

$$|\rho - \rho_0| < \varepsilon\rho_1,$$

где ρ_1 — максимум расстояния точек (u, v), $(u+\Delta u, v+\Delta v)$ от точки (u_0, v_0), а ε — бесконечно малое вместе с ρ_1. Коротко говоря, наше отображение области D на плоскость P оказывается вблизи точки (u_0, v_0) изометрическим с точностью до величин высшего порядка. Следовательно, геометрический смысл задания линейного элемента состоит в том, что в области D определяется такая метрика, которая в бесконечно малом совпадает с метрикой на плоскости и коэффициенты E, F, G в силу формул (5) и (7) определяют отображение малой окрестности из D в плоскость P, которое оказывается изометрическим в бесконечно малом. Геометрическое содержание требования аналитичности, содержащегося в теореме Дарбу, так же как геометрический смысл понятия аналитической поверхности, неясны. Это требование зависит не столько от геометрического существа задачи, сколько от того обстоятельства, что разрешимость уравнений, к которым Дарбу сводит задачу, доказана в общем виде для аналитических функций.

Выпуклые поверхности характеризуются тем, что у них главные радиусы кривизны не могут быть разных знаков, так что гауссова кривизна их нигде не отрицательна. Поэтому из теоремы Дарбу можно заключить, что *для того, чтобы метрика, заданная линейным элементом ds, была реализуема в малом посредством выпуклой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы элемент ds имел всюду неотрицательную кривизну*. «Кривизна линейного элемента» определяется через коэффициенты E, F, G по известной формуле Гаусса. Следовательно, для регулярных выпуклых поверхностей вопрос о их внутренней метрике решается в малом полностью. Вообще, внутренняя геометрия регулярных поверхностей в малом разработана весьма обстоятельно.

Однако совершенно иначе обстоит дело с внутренней геометрией в целом. Из встающих здесь задач о реализуемости заданной метрики решены до сих пор только две, если не считать задач, решение которых почти тривиально. Первая из них — задача о реализуемости какой бы то ни было полной метрики с постоянной отрицательной кривизной — решена отрицательно. Именно, Гильберт доказал, что не существует регулярной полной поверхности с постоянной отрицательной кривизной [1]). Вторая задача состоит в том, чтобы доказать, что всякая метрика, заданная на сфере посредством линейного элемента с аналитическими коэффициентами и со всюду положительной кривизной, реализуема аналити-

[1]) См. В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 96. Метрика называется полной, если всякое бесконечное и ограниченное в смысле этой метрики множество точек в той области, где она задана, имеет точку сгущения.

ческой замкнутой выпуклой поверхностью [1]). Эта задача была поставлена Германом Вейлем в 1915 г., причём Вейль наметил её решение, хотя и простое по идее, но столь трудно осуществимое, что сам Вейль не довёл его до конца. Пробел, имевшийся в рассуждениях Вейля, был восполнен в 1938 г. Гансом Леви на основании полученных им общих теорем об уравнениях в частных производных типа Монжа-Ампера, и теорема, высказанная Вейлем, была доказана [2]). Этим самым была дана полная характеризация внутренней метрики аналитических замкнутых поверхностей со всюду положительной кривизной. (Легко доказать, что всякая замкнутая поверхность с непрерывной положительной кривизной — выпуклая.)

В гл. VII мы докажем теорему, частным случаем которой является следующее утверждение:

Всякая метрика на сфере, заданная линейным элементом с неотрицательной кривизной, может быть реализована посредством замкнутой выпуклой поверхности. Эта теорема является несколько более общей, чем теорема Вейля, так как в ней отбрасывается предположение аналитичности и допускается, что кривизна может обращаться в нуль и претерпевать разрывы. Однако она не покрывает теоремы Вейля, так как в ней нет утверждения об аналитичности поверхности, реализующей аналитическую метрику. Можно показать, что при условии существования и ограниченности кривизны поверхность будет гладкой, но может не быть дважды дифференцируемой. Существование внутренней кривизны не обеспечивает, таким образом, существования определённых главных кривизн в каждой точке поверхности.

§ 3. Многогранная метрика.

Уже у столь простых негладких поверхностей, как многогранники, в вершинах нет никакой первой квадратичной формы и тем более нет никакой гауссовой кривизны, хотя и то и другое существует во всех остальных точках. Поэтому становится более удобным пользоваться здесь другими понятиями. Можно, конечно, задавать первую форму всюду, за исключением лишь некоторых исключительных точек, а эти точки характеризовать дополнительными условиями, как, например, на выпуклом многограннике — тем условием, что длина окружности с центром в вершине меньше $2\pi r$. При этом длина окружности может быть вычислена из первой квадратичной формы. Если же мы обращаемся к общим выпуклым поверхностям, то дело ещё более усложняется, и тут эти дополнительные условия становятся вовсе не очевидными. Кроме того, множество тех точек, где нет касательной плоскости, и тем более тех точек, где поверхность не имеет определённой кривизны, становится весьма сложным. Разрывы и несуществование коэффициентов E, F, G и их производных, при попытке всё же пользоваться этими коэффициентами, заставляют обратиться к аппарату теории функций действительного переменного: к интегралам Лебега и Стильтьеса, Радона и т. п. Боясь погрязнуть на этом пути в аналитических трудностях и потерять всякую наглядность, мы обращаемся поэтому от анали-

---

[1]) То, что метрика задана на сфере, означает, что за область D принимается сфера. Однако на сфере нельзя ввести координаты u, v так, чтобы между парами u, v и точками сферы имелось взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие. Поэтому сферу приходится покрывать конечным числом областей D_i, в каждой из которых вводятся свои координаты; в общей части двух областей переход от одних координат к другим должен даваться аналитическими функциями с якобианом, не обращающимся в нуль.

[2]) H. Weyl, Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linien element. Vierteljahresschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, т. 61 (1915), стр. 40—72. H. Lewy, On the existence of a closed convex surface realizing a given riemannian metric. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, т. 24 (1938), стр. 104—106.

Можно ещё заметить, что Бляшке и Герглотц указали иной подход к решению проблемы Вейля, сведя её к некоторой экстремальной задаче. Но о решении этой задачи у них нет речи. См. W. Blaschke und G. Herglotz, Über die Verwirklichung einer geschlossenen Fläche mit vorgeschriebenem Bogenelement im Euklidischen Raum, Sitz-Berichte Bayer. Akad. Wiss. 1937, Heft 2, стр. 229—230.

тических к геометрическим обобщениям и методам, если, конечно, относить к геометрии понятия о расстоянии, о непрерывном отображении и т. п. Во всяком случае последовательно геометрическая теория должна исходить из геометрических начал, а не приспосабливаться к аналитическому аппарату [1]).

Ко всякой поверхности, во всяком случае, ко всякой, так сказать, достаточно хорошей поверхности можно с любой степенью точности приблизиться многогранником. В частности, к замкнутой выпуклой поверхности можно приблизиться замкнутыми выпуклыми многогранниками (см. Дополнение, § 6). Многогранник есть поверхность, составленная из плоских многоугольников, и потому многогранники являются в некотором смысле наиболее простыми поверхностями. Для их исследования нужны более элементарные методы, а получаемые для них результаты являются совершенно элементарными и наглядными. Вместе с тем, поскольку к поверхностям вообще можно приближаться многогранниками, естественно ожидать, что многие результаты, полученные для многогранников, могут быть потом, путём предельного перехода, перенесены на поверхности, представимые как пределы исследованных многогранников. Этот естественный метод в теории поверхностей не получил, однако, почти никакого развития, так как задачи этой теории удавалось решать аналитическими методами [2]). Но там, где эти методы слишком усложняются, применение непосредственно геометрических методов может часто не только скорее привести к цели, но и дать нам более ясное и геометричное понимание изучаемых фактов. Исходя из этих замечаний, мы ставим своей задачей прежде всего исследовать внутреннюю метрику выпуклых многогранников и потом путём предельного перехода перенести полученные результаты на произвольные выпуклые поверхности.

Многогранники можно определять по-разному. Для наших целей удобно следующее определение: многогранник есть поверхность, составленная из плоских многоугольников — граней, взятых в конечном числе или в бесконечном числе, но при том так, что у каждой точки на многограннике есть окрестность, принадлежащая только конечному числу граней. Поскольку многогранник определён как поверхность, то у каждой его точки есть окрестность, гомеоморфная кругу.

Точки многогранника могут быть трёх сортов: точки, лежащие внутри граней, точки, лежащие внутри рёбер, и вершины. Каждое ребро принадлежит двум и только двум граням, так как иначе его точки не имели бы окрестностей, гомеоморфных кругу. Поэтому окрестность точки, лежащей внутри ребра, будет куском двугранного угла. Такой угол можно разогнуть на плоскость, из чего становится ясным, что в смысле внутренней геометрии окрестности точек, лежащих внутри рёбер или граней, одинаковы. Окрестность вершины A мы получим, если возьмём все точки многогранника, удалённые от A менее чем на данное $r > 0$; при этом r можно взять столь малым, чтобы полученная окрестность не содержала никаких других вершин, кроме данной. Полученная окрестность будет кругом радиуса r на многогранном угле при вершине A. Если сумма углов на гранях, сходящихся в вершине A, равна θ, то

---

[1]) Известный пример несоответствия аналитической формулы геометрическому понятию представляет выражение длины плоской кривой посредством интеграла $\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$. Этот интеграл не всегда равен длине и из его существования не следует существование длины кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, хотя из существования длины следует существование этого интеграла в смысле Лебега.

[2]) Из работ, где свойства поверхностей исследуются посредством приближения к поверхностям многогранниками, помимо работ, относящихся к понятию площади поверхности, нам известны только: работа Максвелла (известного творца теории электромагнетизма): Transformation of surfaces by bending, Scientific papers, т. I, стр. 80, работа Минковского: Volumen und Oberfläche, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 230, а также некоторые работы, примыкающие к этой работе Минковского, и работа Fischer. Herleitung von drei symmetrischen Gleichungen der Flächentheorie..., Deutsche Math., т. 3 (1938), стр. 402—437.

длина окружности этого круга будет равна θr. Поэтому, если $\theta \neq 2\pi$, то окрестность вершины не изометрична никакому куску плоскости.

Введём в рассмотрение конус, т. е. поверхность, образуемую лучами, — образующими конуса, — проведёнными из центра какой-либо сферы во все точки замкнутой спрямляемой кривой, — направляющей конуса, — лежащей на этой сфере. Конусом мы будем также называть любую окрестность вершины на таком полном конусе. Направляющая обладает тем свойством, что все её точки лежат на одинаковом расстоянии от вершины. Поэтому, если разрезать конус по образующей, то его можно будет развернуть на плоскость, причём образующие перейдут в полупрямые, исходящие из точки, в которую перейдёт вершина, а направляющая будет с сохранением длины наворачиваться на окружность с центром в этой точке. В результате конус покроет на плоскости некоторый угол, который может быть, конечно, сколь угодно больше 2π. Этот угол мы называем *полным углом при вершине конуса*. Если он равен 2π, то конус при развёртывании однозначно покрывает всю плоскость и, следовательно, изометричен плоскости. Многогранный угол, двугранный угол и плоскость представляют частные случаи конуса. С другой стороны, ясно, что всякий конус можно изогнуть, т. е. изометрически отобразить в многогранный угол, двугранный угол или плоскость. Тем не менее, в вопросах внутренней геометрии мы предпочитаем говорить о конусе вообще, чтобы отвлечься от специальной пространственной формы.

Выпуклый многогранник отличается тем, что сумма углов, сходящихся в каждой его вершине, всегда меньше 2π. Отсюда немедленно следует теорема, характеризующая в малом внутреннюю метрику выпуклых многогранников. *Для того чтобы метрическое пространство было изометрично в малом выпуклому многограннику, необходимо и достаточно, чтобы у каждой его точки была окрестность, изометричная конусу с полным углом при вершине, меньшим или равным* 2π. Угол, равный 2π, относится, очевидно, к точкам, не являющимся вершинами.

Решение вопроса о внутренней метрике многогранников в малом, как мы видим, крайне просто, но от него ещё бесконечно далеко до решения задач внутренней геометрии более общих поверхностей даже только в малом, не говоря уже о задачах в целом. Действительно, если мы приближаемся к какой-либо кривой поверхности многогранниками, то число вершин этих многогранников беспредельно возрастает и даже сколь угодно близко к каждой точке поверхности оно растёт безгранично. Поэтому из рассмотрения на многогранниках только таких окрестностей, которые содержат не более одной вершины, мы при переходе к пределу не получим никаких сведений о поверхности. Грубо говоря, для перехода к поверхности необходимо исследование многогранников, хотя бы отчасти, «в большом».

Для того чтобы метрическое пространство могло быть изометрично многограннику не только в малых окрестностях, во всяком случае нужно, чтобы любые две его точки можно было соединить кривой конечной длины и чтобы расстояние между точками равнялось точной нижней границе длин таких кривых. Это условие необходимо, потому что именно так определяется расстояние на поверхности. Говоря подробнее, это условие нужно понимать следующим образом. Пусть R — метрическое пространство, имеющее у каждой точки окрестность, изометричную конусу. Пусть X и Y — любые две точки пространства R и пусть L — соединяющая их непрерывная кривая [1]). Длина кривой определяется так: каждую точку кривой мы окружаем окрестностью, изометричной конусу,

[1]) Пусть параметр t меняется на отрезке $[0, 1]$; каждому t ставится в соответствие точка $X(t)$ из метрического пространства R так, что: 1) $X(0) = X$, $X(1) = Y$, 2) $X(t)$ зависит от t непрерывно, т. е. при всяком t и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\rho(X(t), X(t')) < \varepsilon$, как только $|t - t'| < \delta$; ρ обозначает расстояние в R. Этим определяется непрерывная кривая в R. Строго говоря, под непрерывной кривой $X(t)$ мы должны пони-

и, пользуясь леммой Бореля, выбираем конечное число таких окрестностей, также покрывающих всю кривую. В каждой из этих окрестностей длина лежащего в ней отрезка кривой определяется так же, как на конусе, например, путём развёртывания на плоскость. Если отрезок кривой не имеет длины, то его можно заменить другим, уже имеющим длину. Длина всей кривой, соединяющей точки X и Y, определится тогда как сумма длин всех её отрезков. Когда же длина кривой определена, то становится ясным, что значит нижняя граница длин кривых, соединяющих X и Y, и тем самым раскрывается смысл поставленного условия [1]).

Мы будем называть пространством с *многогранной метрикой* такое метрическое пространство, в котором 1) каждая точка имеет окрестность, изометричную конусу, и 2) расстояние между точками равно точной нижней границе длин соединяющих их кривых. Многогранную метрику мы будем называть многогранной метрикой *положительной кривизны*, если у каждой точки есть окрестность, изометричная конусу с полным углом при вершине, не превосходящим 2π. Смысл термина «положительной кривизны» будет раскрыт в § 8. Для того чтобы пространство было изометрично выпуклому многограннику, необходимо, чтобы оно имело многогранную метрику положительной кривизны. Это условие, как уже было указано, также достаточно в малом.

Замкнутый выпуклый многогранник гомеоморфен сфере, а потому, для того, чтобы метрическое пространство было изометрично замкнутому выпуклому многограннику, необходимо, чтобы оно также было гомеоморфно сфере и имело выпуклую многогранную метрику. Оказывается, что эти условия также достаточны, правда, с одной оговоркой. Именно, мы присоединим к замкнутым выпуклым многогранникам также плоские выпуклые многоугольники, считая их, однако, «дважды покрытыми». Это следует понимать в том смысле, что у каждого многоугольника есть две стороны, скажем, верхняя и нижняя, и мы считаем точки, лежащие сверху и снизу, различными, хотя бы они и совпадали. Так как аналогичное представление нам понадобится и в более общем случае, то мы дадим строгое его определение сразу для любой области на плоскости.

Пусть мы имеем на плоскости конечную выпуклую область G, ограниченную кривой L, которую мы также присоединяем к этой области, так что область будет замкнутой. Возьмём сферу S и на ней экватор E и отобразим S непрерывно на область G так, чтобы экватор E взаимно однозначно и непрерывно отображался на граничную кривую L, а каждое полушарие также взаимно однозначно и непрерывно отображалось на область G. В результате вся внутренность области G окажется дважды покрытой образом сферы S. В соответствии с этим каждую внутреннюю точку области G мы рассматриваем как две разные точки: одну, соответствующую точке одного полушария, другую — точке другого полушария. Такое отображение условно можно считать взаимно однозначным и взаимно непрерывным, т. е. гомеоморфным. Наглядно удобно считать одни точки лежащими с одной стороны области G, другие — с другой её стороны. Если точки X и Y лежат с одной стороны, то их можно соединить отрезком (поскольку область выпуклая) и этот отрезок лежит с той же стороны, что и точки X, Y.

мать не просто множество точек $X(t)$, а множество пар: точка $X(t)$ и значение t. Одно не сводится на другое; если кривая имеет кратные точки, т. е. если $X(t_1) = X(t_2)$ при некоторых $t_1 \neq t_2$, тогда точка одна, а пары — разные.

[1]) Длина кривой, как мы видим, определяется сама собой, если у каждой точки есть окрестность, изометричная конусу. Тем не менее указанное условие не является лишним. Это видно из следующего примера: Введём на плоскости новое расстояние $\rho(XY)$ вместо обычного эвклидова $\rho_0(XY)$ следующим образом: если $\rho_0(XY) \leqslant 1$, то положим $\rho(XY) = \rho_0(XY)$; если же $\rho_0(XY) > 1$, то положим $\rho(XY) = 1$. Плоскость превратится в метрическое пространство, у каждой точки которого есть окрестность, изометричная кругу, именно — круг радиуса $\frac{1}{2}$. Между тем расстояние в этом пространстве, вообще говоря, не равно точной нижней границе длин кривых.

Если же точки X и Y лежат с разных сторон, то соединяющая их кривая, проходя от точки X по той стороне, на которой лежит эта точка, должна перейти через границу области G на другую сторону, на которой лежит точка Y. Расстояние между точками X и Y мы определяем в этом случае как точную нижнюю границу длин таких кривых, переходящих через край области G. Тогда даже если точки X и Y на самом деле совпадают, расстояние между ними будет отлично от нуля, коль скоро они лежат на разных сторонах области G. Таким образом, мы превращаем область G в замкнутую выпуклую поверхность. Это представляется совершенно естественным, если вообразить себе замкнутую выпуклую поверхность, почти сплющившуюся в плоскую область. Можно взять, например, поверхность, составленную из двух конусов, опирающихся на край области G. Когда высоты их будут стремиться к нулю, эти конусы будут сходиться — один к одной, другой к другой стороне области G. Таким образом, дважды покрытая область G есть предельный случай замкнутой выпуклой поверхности, когда эта последняя полностью сплющивается.

Рассмотрим для примера дважды покрытый равносторонний треугольник. Внутренняя точка в нём имеет круговую окрестность. Если же взять точку внутри стороны, то её окрестность состоит из двух наложенных друг на друга полукругов; стоит её разогнуть по диаметру, лежащему на стороне треугольника, как она превратится в обыкновенный круг. Окрестность вершины треугольника состоит из двух наложенных друг на друга секторов, склеенных друг с другом по радиусам, идущим от вершины по сторонам треугольника; стоит надавить на эти радиусы, как оба сектора изогнутся и, разойдясь друг от друга, образуют конус с полным углом при вершине, равным 120°. Мы видим, следовательно, что дважды покрытый треугольник действительно удовлетворяет указанным выше необходимым условиям: он гомеоморфен сфере (в том смысле, в каком этот условный гомеоморфизм был определён) и у каждой его точки есть окрестность, изометричная конусу с полным углом при вершине, не превосходящим 2π. Легко доказать, что не существует никакого другого выпуклого многогранника, изометричного дважды покрытому треугольнику, кроме его самого. Поэтому, если заранее задать абстрактно метрическое пространство, изометричное дважды покрытому треугольнику, то его никак иначе и нельзя будет рассматривать в виде выпуклого многогранника. Следовательно, если не хотеть специальными оговорками устранить подобные случаи, то нам неизбежно придётся включить в число выпуклых многогранников дважды покрытые выпуклые многоугольники.

Присоединяя к многогранникам дважды покрытые многоугольники, мы формулируем теорему, характеризующую внутреннюю метрику замкнутых выпуклых многогранников:

Для того чтобы метрическое пространство было изометрично замкнутому выпуклому многограннику, необходимо и достаточно, 1) *чтобы оно было гомеоморфно сфере,* 2) *чтобы у каждой его точки существовала окрестность, изометричная конусу с полным углом при вершине* $\leqslant 2\pi$, *и* 3) *чтобы расстояние в этом пространстве равнялось точной нижней границе длин кривых.*

Так как мы убедились, что необходимость указанных условий очевидна, то данную теорему следует понимать как теорему существования замкнутого выпуклого многогранника с заранее заданной многогранной метрикой положительной кривизны. Если внутри замкнутого выпуклого многогранника P взять точку и, описав вокруг неё сферу S, спроектировать из этой точки многогранник на сферу S, то получится взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками многогранника и сферы. Если точкам X и Y на S соответствуют точки X' и Y' на P, то, относя точкам X и Y расстояние на многограннике между точками X' и Y', мы перенесём тем самым метрику многогранника на сферу S. Вообще всякое метрическое пространство, гомеоморфное сфере, можно отобразить на сферу и считать, что метрика его задаётся прямо на сфере. Такое представление является удобным, так как здесь мы получаем вполне определённую область — сферу, на которой задаётся метрика. Именно таким представлением мы будем постоянно пользоваться. Воспользовавшись им, мы можем высказать теорему существования выпуклого многогранника с данной метрикой в следующей форме: *для всякой заданной на сфере многогранной метрики положительной кривизны существует реализующий её замкнутый выпуклый многогранник (или дважды покрытый выпуклый многоугольник).*

Эта теорема является одной из основных во всей теории, развиваемой в этой книге. Её доказательству посвящена гл. VI.

§ 4. Развёртка.

Пожалуй, несколько странно, что мы, говоря о многогранниках, пользуемся столь абстрактными понятиями, как метрическое пространство, гомеоморфизм и т. п. Мы делаем это сознательно, чтобы на простом примере многогранников привести эти понятия в действие и поставить исследование многогранников в один ряд с исследованием любых выпуклых поверхностей, где эти понятия оказываются не слишком общими, ввиду сложности самого вопроса. Однако, обращаясь к многогранникам, мы особо оговаривали элементарность и наглядность относящихся к ним результатов. Кроме того, говоря о метрическом пространстве, изометричном, скажем, выпуклому многограннику, мы совершенно не знаем ещё, как на самом деле можно заранее задать такое пространство. Естественно, является потребность устранить эту абстрактность и привести всё в такую форму, которую действительно можно было бы считать элементарной. Для этого мы воспользуемся заданием многогранника посредством его развёртки.

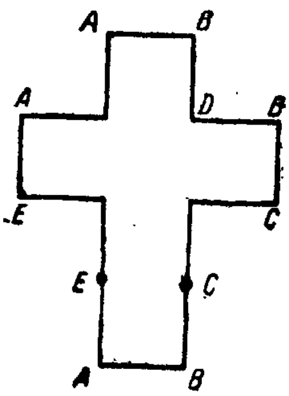
Развёртка есть не что иное, как совокупность многоугольников, для которых указано, как следует их склеивать друг с другом по сторонам и вершинам. Даже если исключить склеивание вершин, не вызванное склеиванием сторон (например, такое, какое имеется в многограннике, составленном из двух тетраэдров, приложенных друг к другу в вершине), нельзя обойтись без ссылки на склеивание вершин, потому что для двух сторон всегда есть две возможности склеивания: в одном или в другом, противоположном, направлении. Две стороны AB и CD можно склеить так, что совпадут вершины A с C и B с D, или так, что совпадут вершины A с D и B с C; эти две возможности необходимо, конечно, различать.

Хорошо известно, что куб можно склеить из одного крестообразного многоугольника. Поэтому вовсе нет надобности предполагать, что склеиваемые стороны и вершины принадлежат разным многоугольникам. Вместе с тем мы предполагаем, что склеивание многоугольников происходит по целым сторонам. Это не является ограничением, потому что в случае необходимости можно любую точку внутри стороны считать вершиной. Далее удобно считать, что каждый из многоугольников развёртки ограничен одной замкнутой ломаной без кратных точек. Этого всегда можно добиться, если подходящим образом разрезать многоугольники, ограниченные несколькими ломаными или ломаной с кратными точками.

Многоугольники развёртки мы будем называть *гранями*; стороны многоугольников — *рёбрами*, причём склеиваемые друг с другом стороны считаются, конечно, за одно ребро; наконец, вершины многоугольника мы будем называть *вершинами* развёртки, причём опять-таки склеиваемые друг с другом вершины считаются за одну. При этом, конечно, склеивание вовсе не предполагается произведённым на самом деле; считается указанным только закон склеивания и производится, так сказать, мысленное отождествление сторон и вершин, подлежащих склеиванию.

Так как стороны, подлежащие склеиванию, отождествляются, то окрестность точки, лежащей на стороне, считается состоящей из кусков тех граней, которым эта сторона принадлежит. Точно так же окрестность вершины образуется из секторов, вырезаемых на всех гранях, которым принадлежит эта вершина. У каждой точки многогранника должна существовать окрестность, гомеоморфная кругу; и кроме того многогранник должен быть связным. Это приводит нас к следующим условиям, которым должна удовлетворять развёртка:

1. Все углы многоугольников, подходящие к одной вершине, должны образовывать циклическую последовательность, будучи подклеены один к другому по сторонам, как того требует закон склеивания. Говоря подробнее, если O — вершина, то, взяв многоугольник P_1, подходящий к этой вершине своими сторонами a_1 и a_2, мы подклеиваем к его стороне a_2 многоугольник P_2; у P_2 есть ещё сторона a_3, подходящая к вершине O; к ней мы подклеиваем многоугольник P_3 и т. д. по данному закону склеивания. Условие состоит в том, что в конце концов мы дойдём до многоугольника P_n, который после подклеивания его к многоугольнику P_{n-1} по стороне a_n должен, в силу закона склеивания, быть подклеен к первому многоугольнику P_1 по оставшейся пока свободной стороне a_1. Таким образом, последовательность замыкается и этим должны исчерпываться все многоугольники, подходящие к вершине O. В результате у вершины O окрестность будет состоять из секторов, подклеенных друг к другу в циклическом порядке так, что получается фигура, гомеоморфная кругу.



Черт. 3.

Не исключено, что некоторые многоугольники подходят к вершине O несколько раз. Точно так же может случиться, что к вершине O подходит только один многоугольник одним своим углом, стороны которого склеиваются друг с другом так, что окрестность вершины O представляет собой нечто в роде «фунтика». В этом случае вся циклическая последовательность секторов сводится к одному единственному сектору. Указанные здесь возможности можно наблюдать на развёртке куба (черт. 3), где окрестность вершины O состоит из одного угла, а окрестность вершины A состоит из трёх углов одного многоугольника. На чертеже склеиваемые вершины помечены одинаковыми буквами.

Из формулированного условия очевидно следует, что каждая сторона одного многоугольника должна склеиваться с одной и только одной стороной другого или того же самого многоугольника.

2. От каждого многоугольника к другому можно перейти, идя по многоугольникам, склеенным друг с другом, т. е. имеющим отождествлённые друг с другом стороны или вершины.

Это второе условие обеспечивает связность, иначе развёртка распадалась бы на части, из которых не склеивался бы один связный многоугольник.

К этим условиям следует для полноты добавить ещё следующее, необходимость которого очевидна.

3. Отождествляемые стороны должны иметь равные длины, и при склеивании сторон совпадающие их отрезки должны быть равной длины.

Пусть теперь X и Y — две точки развёртки. Как ясно из условия 2, можно построить ломаную, начинающуюся в точке X и кончающуюся в точке Y, звенья которой лежат последовательно на гранях развёртки, имеющих общие (отождествлённые) рёбра или вершины; когда отрезок ломаной упёрся в границу грани в какой-то точке Z, то мы продолжаем его в той грани, которая подклеена к первой в точке Z. Длина ломаной определяется сама собой, поскольку звенья её лежат на многоугольниках, где длина есть обычная длина отрезка в эвклидовой геометрии. Точную нижнюю границу длин ломаных, соединяющих в развёртке точки X и Y, мы принимаем за расстояние между этими точками. Таким образом развёртка действительно задаёт нам внутреннюю метрику многогранника. Однако развёртку можно задать заранее, не зная, можно ли из неё склеить какой бы то ни было многогранник, и мы получаем, следовательно, способ задавать заранее метрическое пространство с многогранной метрикой.

Можно доказать обратное утверждение, а именно, что любую многогранную метрику можно задать посредством развёртки. Так как это утверждение в такой общей форме нам не понадобится, то мы ограничимся только нужным нам случаем многогранной метрики на сфере, когда это утверждение доказывается очень просто.

Пусть на сфере S задана многогранная метрика. Тогда каждую точку сферы S можно окружить окрестностью, изометричной конусу, и разбить эту окрестность на треугольники, имеющие общую вершину в этой точке и изометричные обыкновенным плоским треугольникам. В результате сфера S окажется сплошь покрытой такими треугольниками. По лемме Бореля, из этих треугольников можно выбрать конечное число, тоже покрывающих всю сферу S. Налегая друг на друга, эти треугольники сами собой разбиваются на многоугольники, уже не имеющие друг с другом общих внутренних точек. Эти многоугольники покрывают всю сферу, и так как каждый из них можно развернуть на плоскость, то они и образуют развёртку, представляющую метрику, заданную на S.

Рёбра развёртки образуют на сфере сеть отрезков. Сеть эта будет связной, т. е. от одного отрезка можно перейти к любому другому, идя только по отрезкам сети. Действительно, пусть a и b — два ребра, а P и Q — грани, которым они принадлежат. По свойству связности развёртки можно перейти от P к Q, идя по подклеенным друг к другу граням. Этот переход можно осуществить, идя только по границам граней, т. е. по рёбрам, потому что мы предполагаем, что граница каждой грани состоит из одной замкнутой ломаной. Следовательно, от ребра a к ребру b можно перейти, идя всё время по рёбрам.

Если число граней в развёртке есть f, число рёбер k, а число вершин e, то сфера оказывается разбитой связной сетью из k отрезков на f областей с e вершинами. В таком случае по теореме Эйлера

$$f-k+e=2.$$

Следовательно, развёртка, гомеоморфная сфере, должна удовлетворять этой формуле Эйлера. Известно также, что при выполнении трёх указанных выше условий развёртка, удовлетворяющая формуле Эйлера, будет гомеоморфна сфере [1]).

Наконец, мы имеем последнее условие для выпуклого многогранника: полный угол при вершине конуса, которому изометрична окрестность любой его точки, должен быть не больше 2π. Для точек, лежащих внутри граней или внутри рёбер развёртки, это условие выполняется само собой: полный угол вокруг них в точности равен 2π. Остаётся поэтому потребовать выполнения этого условия для вершин. Полный угол при вершине составляется из подходящих к ней углов граней развёртки. Поэтому наше условие сводится к следующему: сумма углов, сходящихся в каждой вершине, должна быть $\leqslant 2\pi$.

Итак, теорема о выпуклых многогранниках, формулированная нами в § 3, может быть теперь формулирована в терминах развёрток следующим образом:

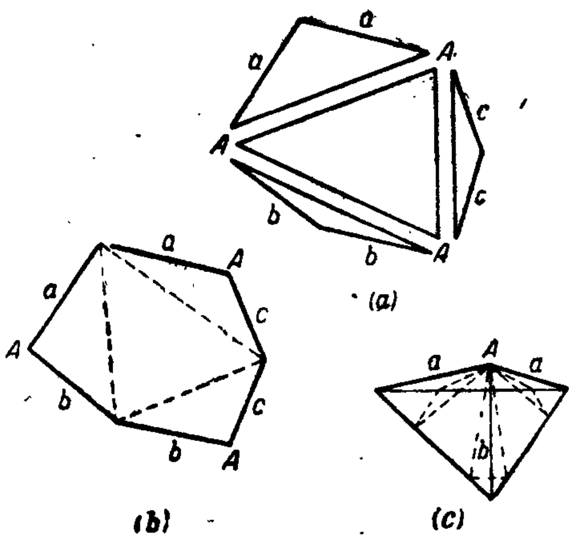
Развёртка всякого замкнутого выпуклого многогранника удовлетворяет трём формулированным выше условиям, необходимым для всякой развёртки, условию Эйлера и, наконец, тому условию, что сумма углов в каждой её вершине $\leqslant 2\pi$. Вместе с тем, из каждой развёртки, удовлетворяющей этим условиям, можно склеить замкнутый выпуклый многогранник (или дважды покрытый выпуклый многоугольник).

---

[1]) Совершенно элементарное доказательство этого утверждения и даже общую топологическую классификацию резвёрток можно найти в книгах Г. Зейферт и В. Трельфалль, Топология, гл. VI, или П. С. Александров и В. А. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, гл. I.

Стоит заметить, что таких многогранников можно склеить только два: один получается из другого путём выворачивания на левую сторону, или, что то же самое, путём зеркального отражения в плоскости. (Конечно, если многогранник имеет плоскость симметрии, то оба многогранника неотличимы друг от друга. С другой стороны, из развёртки выпуклого многогранника можно склеить сколько угодно невыпуклых многогранников, стоит лишь продавить многогранник внутрь в окрестности его вершины.)

Включение дважды покрытых многоугольников становится здесь особенно понятным. Если, например, развёртка состоит из двух равных треугольников, у которых попарно отождествлены равные стороны, а вместе с ними и вершины, то получающийся из неё выпуклый многогранник будет представлять эти два треугольника, склеенные друг с другом в один, так что этот последний будет дважды покрыт в самом реальном смысле.



Черт. 4.

В приведённой здесь форме наша теорема оказывается совершенно элементарной: если нам действительно задана развёртка, хотя бы в виде вырезанных из бумаги многоугольников, у которых одинаковыми буквами отмечены стороны и вершины, подлежащие склеиванию, то всегда можно в конечное число шагов проверить, выполняются ли для неё условия теоремы, так что мы сможем ответить на вопрос: выйдет ли из неё выпуклый многогранник или нет? А если такой многогранник выйдет, то, с точностью до движения и отражения, только один. Поэтому, если мы начнём его клеить, то он примет свою форму в некотором смысле сам собой. Однако, какая это будет форма и как должны переламываться при этом грани развёртки, давая грани и рёбра многогранника, — об этом мы не можем сказать ничего, кроме нескольких очевидных, но совершенно ещё недостаточных замечаний.

Поясним это любопытным примером, который покажет, сколь мало могут иметь отношения к граням и рёбрам многогранника грани и рёбра развёртки. На черт. 4 (*a*) изображена развёртка тетраэдра; на черт. 4 (*b*) указано, по каким линиям пойдут рёбра тетраэдра в этой развёртке, когда она склеена в один многоугольник; наконец, на черт. 4 (*c*) изображён уже склеенный тетраэдр с указанием линий, по которым его нужно разрезать, чтобы обратно получить развёртку черт. 4, *a*; кроме как по пунктирным линиям, его нужно разрезать ещё по рёбрам, сходящимся в вершине *A*. Данная развёртка любопытна ещё в том отношении, что она демонстрирует довольно сложные возможные склеивания друг с другом сторон и вершин одного и того же многоугольника развёртки (в данном случае у каждого из четырёх треугольников).

Мы представляем себе развёртку, задаваемую непосредственно многоугольниками с указанием правила склеивания. Эта точка зрения, напоминающая о бумаге, ножницах и клее, хотя и соответствует сути дела наилучшим образом, тем не менее может не удовлетворить математика. По этому поводу мы заметим, что если все многоугольники развёртки разбить на треугольники, то строение развёртки можно задать посредством матриц инциденции, а потом приписать каждому ребру определённую длину. Такой способ абстрактного задания развёртки позволяет задавать любую многогранную метрику посредством простой схемы, без помощи наглядного представления о многоугольниках, склеивании и т. п.

§ 5. Переход от многогранников к любым поверхностям.

После того как вопрос о внутренней метрике замкнутых выпуклых многогранников решён, путь решения вопроса о внутренней метрике любых замкнутых выпуклых поверхностей намечается на основании следующей «теоремы о сходимости метрик», которая будет доказана в § 1 гл. III:

Если последовательность замкнутых выпуклых поверхностей $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ сходится к замкнутой выпуклой поверхности F и последовательность пар точек X_n, Y_n на поверхностях F_n сходится к паре точек X, Y на F ($X_n \to X$, $Y_n \to Y$), то расстояния на F_n между X_n и Y_n сходятся к расстоянию на F между X и Y, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \rho_{F_n}(X_n Y_n) = \rho_F(XY).$$

Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность и $P_1, P_2, \ldots$ — последовательность сходящихся к ней выпуклых многогранников. Возьмём точку O внутри F, а также внутри всех P_n, что возможно, как только P_n достаточно близки к F. Описав вокруг O сферу S, спроектируем поверхность F и все многогранники P_n на эту сферу из точки O. Тогда метрики $\rho_F(XY)$ и $\rho_{P_n}(XY)$ с F и P_n перенесутся на сферу S, если паре точек A, B на S отнести в качестве расстояния между ними расстояние между соответствующими точками на поверхности F и, соответственно, на многогранниках P_n. Из только что приведённой теоремы о сходимости расстояний следует, что для каждой пары точек A, B на сфере S будет иметь место равенство

$$\rho(AB) = \lim_{n \to \infty} \rho_n(AB),$$

где $\rho(AB)$, $\rho_n(AB)$ — расстояния, перенесённые, согласно указанному построению, с F и P_n на сферу S. Следовательно, метрика выпуклой поверхности, перенесённая на сферу, есть предел метрик выпуклых многогранников.

Пусть теперь мы имеем на сфере заданную метрику $\rho(XY)$, являющуюся пределом многогранных метрик $\rho_n(XY)$ положительной кривизны на той же сфере, т. е. для каждой пары точек X, Y на сфере S имеет место равенство

$$\rho(XY) = \lim_{n \to \infty} \rho_n(XY).$$

Считая теорему о реализуемости многогранной метрики положительной кривизны на сфере доказанной, мы можем построить последовательность замкнутых выпуклых многогранников P_n, реализующих данные метрики ρ_n. Из этой последовательности можно выбрать сходящуюся последовательность [1]). Пределом этой последовательности будет некоторая замкнутая выпуклая поверхность F.

Так как, с одной стороны, метрики ρ_n сходятся к данной метрике ρ на сфере S, а с другой стороны, по приведённой выше теореме, метрики многогранников, сходящихся к поверхности F, сходятся к метрике на F, то тем самым поверхность F как раз имеет метрику $\rho(XY)$.

Таким образом мы пришли к теореме:

Для того чтобы метрика, заданная на сфере, могла быть реализована посредством замкнутой выпуклой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы эта метрика была пределом многогранных метрик положительной кривизны, заданных на той же сфере.

Эта теорема решает вопрос о характеризации внутренней метрики замкнутых выпуклых поверхностей. Однако она является малосодержательной, так как

---

[1]) Это можно сделать, например, в силу известной «теоремы выбора» Бляшке. В § 7 гл. VII, где будет дано строгое обоснование намечаемого здесь рассуждения, мы докажем это непосредственно без всяких ссылок на теорему Бляшке.

она ничего не говорит о внутренней геометрии выпуклых поверхностей, кроме того, что метрика выпуклой поверхности есть предел метрик выпуклых многогранников. Мы остаёмся в полном неведении того, по каким свойствам метрики можно судить, является ли она пределом многогранных метрик положительной кривизны или нет. Тем не менее эта теорема даёт нам метод изучения внутренней метрики выпуклых поверхностей. Пусть мы хотим доказать, что для того, чтобы метрика, заданная на сфере, могла быть реализована посредством замкнутой выпуклой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла некоторой совокупности условий А. Для доказательства необходимости условий А мы можем сначала доказать их для замкнутых выпуклых многогранников, а потом, путём предельного перехода, основанного именно на полученной выше теореме, перенести их на любые замкнутые выпуклые поверхности. Для доказательства достаточности условий А мы можем сначала доказать, что метрика, заданная на сфере и удовлетворяющая этим условиям, может быть представлена как предел многогранных метрик положительной кривизны; и тогда из данной теоремы последует достаточность условий А. Именно так мы поступим в дальнейшем.

Это есть частный случай метода приближения многогранниками, который в общем виде выглядит следующим образом. Пусть мы хотим доказать некоторое свойство В выпуклых поверхностей. Для этого доказываем сначала, что оно имеет место для выпуклых многогранников. Потом доказываем теорему о сходимости следующего типа: если свойство В верно для выпуклых поверхностей F_n, сходящихся к выпуклой поверхности F, то оно верно также для поверхности F. Так как к выпуклым поверхностям можно приближаться многогранниками, то сочетание обоих результатов покажет, что свойство В имеет место для всех выпуклых поверхностей. Этот способ рассуждения мы используем при доказательстве целого ряда теорем.

§ 6. Многообразие с внутренней метрикой.

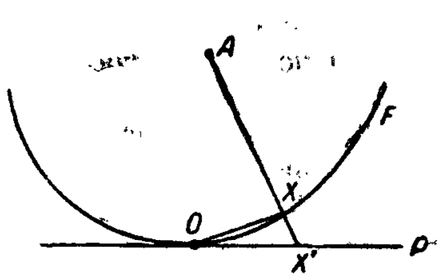
Здесь мы установим два самых основных условия, которым подчиняется внутренняя метрика выпуклых поверхностей. Пусть F — какая-либо выпуклая поверхность и O — точка на ней. Мы можем определить окрестность точки O двумя способами: «внешним» и «внутренним». В первом случае окрестностью точки O на поверхности F называется часть F, лежащая в шаре, описанном вокруг O, или вообще любое множество на поверхности F, заключающее такую часть поверхности F. Во втором случае окрестностью точки O называется любое множество точек на F, содержащее какой-либо геодезический круг с центром в точке O [1]). Геодезический же круг есть множество точек, удалённых от данной менее чем на некоторое данное расстояние в смысле внутренней метрики на F. Докажем, что оба определения окрестностей эквивалентны, т. е. что всякая «внешняя» окрестность является «внутренней» и обратно [2]).

[1]) По поводу отличия этого определения от обычного см. примечание в начале § 1.

[2]) Это имеет место не для всякой поверхности. Возьмём, например, на плоскости замкнутую вейерштрассову кривую L, не имеющую нигде касательной и потому не имеющую длины. (Можно сказать, что длина любой дуги этой кривой бесконечна.) Соединив все точки этой кривой прямолинейными отрезками с какой-нибудь точкой O, не лежащей в той же плоскости, получим конус с вершиной O и кривой L в качестве направляющей. Если точки X и Y лежат на разных образующих, то кратчайшая линия, соединяющая их на таком конусе, состоит из отрезков XO и OY, потому что кривая, пересекающая образующие, имеет обязательно бесконечную длину. Этот конус имеет внутреннюю метрику, но малая внутренняя окрестность точки X образующей состоит только из отрезка этой образующей, потому что от точки X до точек других образующих «далеко»: кратчайшее соединение ведёт через вершину O. Единственная точка, имеющая круговую внутреннюю окрестность, есть точка O.

Пусть U — «внешняя» окрестность точки O на выпуклой поверхности F. По её определению существует такое $r > 0$, что всякая точка на F, удалённая в пространстве от точки O меньше чем на r, принадлежит U. Но расстояние от O до любой точки X, измеренное по поверхности, очевидно, не меньше расстояния от O до X в пространстве. Поэтому тем более U содержит все точки поверхности F, лежащие в геодезическом круге радиуса r с центром в точке O. Следовательно, U есть также «внутренняя» окрестность.

Пусть теперь, обратно, U есть данная «внутренняя» окрестность точки O и пусть r_0 — радиус заключающегося в ней геодезического круга с центром в O. Докажем, что U будет также «внешней» окрестностью, т. е. будет содержать все точки поверхности F, удалённые от точки O не больше, чем на какое-то $r > 0$, если расстояния берутся в пространстве. Для доказательства проведём через точку O опорную плоскость P к нашей поверхности (на черт. 5 представлено сечение поверхности F плоскостью, идущей через O). Поверхность F есть область на границе какого-то выпуклого тела. Возьмём внутри этого тела точку A и спроектируем из этой точки поверхность F на плоскость P. Вблизи точки O проекция поверхности F на плоскость P будет взаимно однозначной и взаимно непрерывной. Поэтому проекция поверхности F покроет на плоскости P некоторую окрестность точки O. Возьмём на плоскости P круг K радиуса r с центром в точке O так, чтобы проекция поверхности F его покрывала. Пусть V — та часть поверхности F, проекция которой и есть этот круг K. Это V есть не что иное, как некоторая «внешняя» окрестность точки O. Пусть h есть максимум расстояния точек X окрестности V от соответствующих точек X' круга K, считая в направлении проектирования, так что $XX' \leqslant h$. Если радиус r круга K стремится к нулю, то h, очевидно, также стремится к нулю. Поэтому можно выбрать r столь малым, что будет



Черт. 5.

$$r + h < r_0,$$

где r_0 — радиус геодезического круга, содержащегося в данной «внутренней» окрестности U точки O. Я утверждаю, что при таком выборе радиуса r «внешняя» окрестность V будет содержаться в U. Действительно, возьмём в окрестности V любую точку X и проведём через точки A, O, X плоскость Q. Она пересечёт круг K по его диаметру. Этот диаметр будет проекцией дуги выпуклой кривой, по которой плоскость Q пересекает поверхность F. Длина выпуклой дуги $\widehat{OX}$ не больше суммы отрезков $\overline{OX'} + \overline{XX'}$[1]). Но длина $\widehat{OX}$ не меньше расстояния $\rho(OX)$ на поверхности F, а $\overline{OX'} \leqslant r$ и $\overline{XX'} \leqslant h$. Поэтому $\rho(OX) \leqslant r + h < r_0$. А это означает, что точка X содержится в геодезическом круге радиуса r_0. Следовательно, «внешняя» окрестность V содержится в данной «внутренней» окрестности U, так что U оказывается вместе с тем «внешней» окрестностью, что и требовалось доказать.

Когда мы требовали, чтобы у каждой точки поверхности была окрестность, гомеоморфная кругу, то речь шла, конечно, о «внешней» окрестности, так как ни о какой внутренней метрике пока не было и речи. Введение

---

[1]) Выпуклая кривая $\widehat{OX} + \overline{OX}$, составленная из дуги $\widehat{OX}$ и отрезка $\overline{OX}$, содержится в треугольнике OXX' и потому (в силу теоремы 3 § 1 Дополнения)

$$s(\widehat{OX}) \leqslant s(\overline{OX'}) + s(\overline{XX'}).$$

внутренней метрики позволяет ввести понятие о внутренней окрестности, и во внутренней геометрии под окрестностью следует понимать всегда именно внутреннюю окрестность. Поскольку для выпуклых поверхностей оба определения окрестностей эквивалентны, мы не будем их различать. В дальнейшем во всех утверждениях о выпуклых поверхностях, в которых фигурирует понятие окрестности, можно иметь в виду внутреннюю окрестность. Это прежде всего относится к понятию о непрерывности, в определение которого, как известно, входит только понятие об окрестности. Таким образом, мы получаем следующие утверждения:

1. У каждой точки выпуклой поверхности есть внутренняя окрестность, гомеоморфная кругу.

2. Любые две точки выпуклой поверхности можно соединить кривой, непрерывной в смысле внутренней метрики.

3. Всякую замкнутую выпуклую поверхность можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно в смысле внутренней метрики отобразить на сферу.

4. Всякая выпуклая поверхность гомеоморфна области на сфере. (Для выпуклой поверхности, являющейся замкнутой или только частью замкнутой, это очевидно из 3. Вместе с тем плоскость и цилиндр также гомеоморфны области на сфере, а потому выпуклые поверхности, являющиеся частями бесконечных полных выпуклых поверхностей, также гомеоморфны областям на сфере.)

Следовательно, *метрическое пространство, изометричное выпуклой поверхности, должно быть гомеоморфно области на сфере.*

Внутренняя метрика поверхности характеризуется тем свойством, что расстояние определяется как точная нижняя граница длин кривых. Это условие также следует перенести на рассматриваемые метрические пространства. Для этого определим, что мы будем называть длиной кривой в метрическом пространстве.

Пусть $X(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — непрерывная кривая в метрическом пространстве R с метрикой $\rho(XY)$. Разобьём промежуток $[0, 1]$ изменения параметра t на части: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$. Образуем сумму расстояний между всеми парами последовательных точек ($X(t_0)$ и $X(t_1)$, $X(t_1)$ и $X(t_2)$ и т. д.):

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\ (X\ (t_{i-1})\ X(t_i)).$$

Точную верхнюю границу таких сумм по всем возможным разбиениям промежутка $[0, 1]$ мы называем длиной кривой $X(t)$. Если эта верхняя граница не существует или, что то же самое, если она равна бесконечности, то кривая не имеет длины или, если угодно, имеет бесконечную длину. Это определение длины дословно повторяет принятое определение длины в эвклидовом пространстве. (Чаще определяют длину как предел указанных сумм при безграничном измельчении разбиения промежутка изменения параметра t; однако с помощью неравенства треугольника легко доказывается тот известный факт, что оба определения эквивалентны.) Легко также доказать, что так определённая длина обладает всеми основными свойствами обычной длины в эвклидовом пространстве; это будет сделано в § 1 гл. II.

Если мы имеем какую-нибудь поверхность F и на ней непрерывную кривую L, то длину кривой можно определять двумя способами: во-первых, как длину в пространстве, а во-вторых, как длину в смысле внутренней метрики поверхности F. В первом случае длина кривой будет (символ sup обозначает точную верхнюю границу):

$$s_0(L) = \sup \sum \rho_0(X\,(t_{i-1})\,X(t_i)), \tag{1}$$

где ρ_0 — расстояние в пространстве, а во втором случае длина будет

$$s(L) = \sup \sum \rho (X(t_{i-1}) X(t_i)), \tag{2}$$

где ρ — расстояние на поверхности.

Докажем, что *обе длины всегда совпадают, т. е. на всякой поверхности из того, что данная кривая L имеет длину в одном смысле, следует, что она имеет длину в другом смысле и обе длины равны.*

Прежде всего заметим, что по определению расстояния на поверхности оно есть точная нижняя граница длин кривых на ней, причём длины определяются в пространстве, т. е. по формулам, аналогичным (1). Поэтому, если L_i — отрезок кривой L между точками $X(t_{i-1})$ и $X(t_i)$, то его длина $s_0(L_i)$ не меньше, чем расстояние на поверхности между этими точками, т. е.

$$s_0(L_i) \geqslant \rho (X(t_{i-1}) X(t_i)). \tag{3}$$

Складывая эти неравенства и замечая, что сумма длин отрезков L_i равна длине всей кривой L, мы получим:

$$s_0(L) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \rho (X(t_{i-1}) X(t_i)). \tag{4}$$

Поскольку все такие суммы не больше $s_0(L)$, то и их точная верхняя граница не больше $s_0(L)$, т. е.

$$s_0(L) \geqslant s(L). \tag{5}$$

Поэтому из существования конечной длины $s_0(L)$ следует существование конечной длины $s(L)$.

С другой стороны, расстояние в пространстве не больше расстояния на поверхности (ведь расстояние в пространстве берётся по линии, кратчайшей во всём пространстве, а не только по поверхности!), т. е.

$$\rho_0 (X(t_{i-1}) X(t_i)) \leqslant \rho (X(t_{i-1}) X(t_i)). \tag{6}$$

Отсюда и из формул (1) и (2) ясно, что

$$s_0(L) \leqslant s(L). \tag{7}$$

Поэтому из существования конечной длины $s(L)$ следует существование конечной длины $s_0(L)$.

Неравенства (5) и (7) дают

$$s_0(L) = s(L),$$

что и требовалось доказать.

Поскольку длины кривых на поверхности совпадают при обоих определениях, то *расстояние на поверхности равно также точной нижней границе длин кривых в смысле определения длины посредством внутренней метрики поверхности.* Эта формулировка не содержит ссылки на расстояния и длины в пространстве; она принадлежит целиком внутренней геометрии и может быть поэтому перенесена на метрические пространства.

Метрику в любом метрическом пространстве мы будем называть внутренней, *если расстояние между любыми двумя точками этого пространства равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих эти точки; при этом длина кривой определяется через метрику по формуле* (2). Мы доказали, что *метрика всякой поверхности является внутренней в смысле этого определения.*

Резюмируя теперь выводы этого параграфа, мы можем сказать, что *метрическое пространство, изометричное выпуклой поверхности, должно быть гомеоморфно области на сфере и иметь внутреннюю метрику.*

Метрическое пространство называется *двумерным многообразием*, если оно связно и всякая точка его имеет окрестность, гомеоморфную кругу (n-мерное многообразие имеет у каждой точки окрестность, гомеоморфную n-мерному шару [1])). Так как мы будем иметь дело только с двумерными многообразиями, то мы будем называть их просто многообразиями. Всякая поверхность в смысле общего определения, данного в § 1, представляет собой двумерное многообразие, если расстояния между её точками измерять в пространстве. В смысле же внутренней метрики не всякая поверхность будет многообразием, потому что внутренние окрестности на ней могут не быть одновременно «внешними» окрестностями. Однако мы показали, что все выпуклые поверхности оказываются многообразиями также с точки зрения внутренней метрики, именно многообразиями, гомеоморфными областям на сфере. Точно так же всякий многогранник или всякая регулярная поверхность будут многообразиями с точки зрения внутренней метрики. Вообще представляется целесообразным выделить особо те поверхности, которые оказываются многообразиями в смысле их внутренней метрики. Этим свойством обладает всякая поверхность, имеющая внутреннюю метрику и такая, что из сходимости её точек X_n к точке X как точек в пространстве следует, что расстояние $\rho(XX_n)$ на поверхности стремится к нулю [2]). Вместе с тем, мы доказали, что метрика всякой поверхности является внутренней в том смысле, что расстояние между двумя точками равно точной нижней границе длин соединяющих кривых, измеренных в самой метрике поверхности. Сопоставление этих результатов порождает в качестве общего объекта исследования во внутренней геометрии понятие *многообразия с внутренней метрикой*, т. е. *метрического пространства, являющегося многообразием и имеющего внутреннюю метрику в смысле данного выше общего определения* [3]). Некоторые общие свойства многообразий с внутренней метрикой будут рассмотрены в гл. II. Выпуклые поверхности представляют частный класс таких многообразий.

§ 7. Основные понятия внутренней геометрии.

Здесь мы дадим определения некоторых основных понятий внутренней геометрии. Мы рассматриваем при этом любое данное многообразие с внутренней метрикой $\rho(XY)$, в частности, оно может быть выпуклой поверхностью. Но так как все наши определения будут основаны только на понятии расстояния, то тем самым они не зависят от того, реализована ли данная метрика посредством какой-либо поверхности или нет.

Прежде всего мы имеем, помимо понятия о расстоянии, понятия об окрестности, о сходимости последовательности точек и другие топологические понятия, определённые для любого метрического пространства вообще. В § 6 мы опре-

---

[1]) В топологии принято называть многообразием всякое топологическое пространство, которое, помимо указанных свойств, допускает ещё разбиение на симплексы. Это требование в нашем случае оказывается лишним.

[2]) Если ρ_0 — расстояние в пространстве, то, очевидно, $\rho_0 \leqslant \rho$ и потому, если $\rho(XX_n) < \varepsilon$, то подавно $\rho_0(XX_n) < \varepsilon$. Поэтому внешняя окрестность всегда оказывается также внутренней. Если же из $\rho_0(XX_n) \to 0$ следует $\rho(XX_n) \to 0$, то и обратно, всякая внутренняя окрестность оказывается также внешней.

[3]) Все метрические пространства, которые фактически изучаются в геометрии (пространства Римана, Финслера), представляют собой n-мерные многообразия с внутренней метрикой. Метрические пространства функционального анализа тоже имеют внутреннюю метрику. Наконец, имеет место теорема: всякое метрическое пространство изометрично подпространству метрического пространства с внутренней метрикой. Доказательство её тривиально: каждой паре точек X, Y данного пространства R с метрикой ρ сопоставляется отрезок длины $\rho(XY)$ и концы его отождествляются с точками X и Y; получается пространство с внутренней метрикой, содержащее данное R.

Важным свойством пространств с внутренней метрикой является следующее: если два таких пространства R_1 и R_2 можно гомеоморфно отобразить друг на друге так, что в сколь угодно малых соответственных окрестностях отображение будет изометрично, то оно будет также изометрично в целом. Внутренняя метрика определяется в целом заданием её в сколь угодно малых областях.

делили длину кривой, пользуясь данной метрикой $\rho(XY)$. Кривая, соединяющая две данные точки и имеющая наименьшую длину среди всех кривых, соединяющих эти точки, называется *кратчайшей* (кратчайшей, соединяющей данные точки). Если расстояние $\rho(XY)$ равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки X и Y, то длина кратчайшей линии XY равна, очевидно, расстоянию $\rho(XY)$. Однако между двумя точками поверхности может и не быть кратчайшей; должны быть только кривые с длиной сколь угодо близкой к расстоянию. Например, если поверхность представляет собой посто невыпуклую плоскую область, то в ней всегда имеется сколько угодно таких пар точек. Впрочем, мы дальше покажем, что во всяком многообразии с внутренней метрикой две достаточно близкие точки всегда можно соединить кратчайшей и что на всякой замкнутой, даже на всякой полной выпуклой поверхности любые две точки можно соединить кратчайшей.

Геодезической называется непрерывная кривая, являющаяся кратчайшей на всяком достаточно малом своём отрезке. Говоря подробнее, геодезическая есть такая непрерывная кривая $X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, что для всякого значения t можно указать такой отрезок $[t_1, t_2]$, содержащий t внутри (или на границе, если $t=0$ или 1), что кривая $X(t)$ на промежутке $[t_1, t_2]$ есть кратчайшая между точками $X(t_1)$ и $X(t_2)$. В силу этого определения и леммы Бореля, геодезическую можно покрыть конечным числом кратчайших, а следовательно, также разбить на конечное число кратчайших.

Например, дуга большого круга на сфере, бо́льшая чем полукруг, есть геодезическая, но не кратчайшая. Кратчайшие и геодезические играют во внутренней геометрии роль прямых.

Треугольником мы будем называть фигуру, гомеоморфную кругу и ограниченную тремя кратчайшими. Сами кратчайшие называются сторонами, а точки, где они попарно сходятся, — вершинами треугольника. *Геодезическим треугольником*, в отличие от просто треугольника, называется фигура, ограниченная тремя геодезическими.

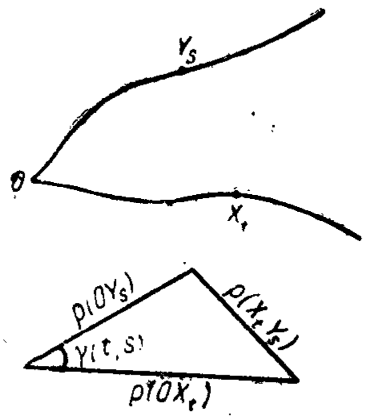
Многоугольником мы будем называть фигуру, обладающую следующими двумя свойствами: 1) граница её состоит не более чем из конечного числа кратчайших (в частности, она может вовсе не иметь границы); 2) каждая последовательность её точек имеет в ней точку сгущения (т. е. она, как говорят, компактна). Примерами многоугольников могут служить сфера, полусфера, пояс на цилиндре между двумя направляющими.

Можно ещё определить *круг* и *окружность*: круг есть геометрическое место точек, удалённых от данной не более чем на данное расстояние, а окружность — геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки.

Определим теперь понятия угла между двумя кривыми, исходящими из одной точки в многообразии с внутренней метрикой. Пусть $X_t = X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и $Y_s = Y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ — две непрерывные кривые, исходящие из точки O, т. е. $X_0 = Y_0 = O$. Мы предполагаем, что точка O не является кратной, т. е. при t и s, не равных нулю, точки X_t и Y_s отличны от O. Построим на плоскости треугольник со сторонами, равными $\rho(OX_t)$, $\rho(OY_s)$, $\rho(X_tY_s)$. Угол, лежащий в этом треугольнике против стороны, равной $\rho(X_tY_s)$, мы обозначаем $\gamma(t, s)$ (черт. 6). Так как по неравенству треугольника сумма двух любых из чисел $\rho(OX_t)$, $\rho(OY_s)$, $\rho(X_tY_s)$ не меньше третьего, то такой треугольник всегда существует. Конечно, он может вырождаться в отрезок, если, например, $\rho(X_tY_s) = \rho(OX_t) + \rho(OY_s)$; этот случай мы не предполагаем исключённым. Вместе с тем, мы предполагаем, что t и s отличны от нуля, так что точки X_t и Y_s отличны от O и, следовательно, $\rho(OX_t)$ и $\rho(OY_s)$ положительны.

Углом между данными кривыми мы называем предел угла $\gamma(t, s)$, при t и s, стремящихся к нулю, т. е. при X_t и Y_s, стремящихся к O. Этот предел, конечно, может не существовать, и тогда мы считаем, что в точке O данные кривые не образуют друг с другом никакого определённого угла.

Это понятие угла прилагается, в частности, к кратчайшим, исходящим из одной точки O. Пусть L и M — две такие кратчайшие и X, Y — переменные точки на них, отличные от O. Параметры t и s тут нет надобности вводить: за t и s можно принять длины дуг OX и OY и, так как длина дуги кратчайшей равна расстоянию, то на место t и s подставляются самые $\rho(OX)$ и $\rho(OY)$, которые мы будем постоянно обозначать через x и y. Далее, в согласии с общим определением, строится плоский треугольник со сторонами $x=\rho(OX)$, $y=\rho(OY)$, $z=\rho(XY)$ и в нём берётся угол $\gamma(x, y)$, лежащий против стороны, равной z. Предел α этих углов $\gamma(x, y)$ при x и y, стремящихся к нулю, есть угол между кратчайшими L и M.



Черт. 6.

Мы докажем (в § 4 гл. III), что *между кратчайшими на выпуклой поверхности так определённый угол всегда существует.*

Угол можно, конечно, определить формально, вовсе не привлекая треугольников на плоскости. Действительно, в этих треугольниках

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma(x, y).$$

Поэтому угол α между кратчайшими L и M можно просто определить по формуле

$$\cos\alpha = \lim_{x,\, y \to 0} \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}.$$

А в случае двух любых кривых

$$\cos\alpha = \lim_{t,\, s\to 0} \frac{\rho(OX_t)^2+\rho(OY_s)^2-\rho(X_tY_s)^2}{2\rho(OX_t)\,\rho(OY_s)},$$

причём берётся значение α в промежутке $[0, \pi]$. Однако определение с помощью плоских треугольников раскрывает истинную сущность этих формул.

Общие свойства угла будут исследованы специально в гл. IV. Они во многом аналогичны свойствам угла между полупрямыми на плоскости. Для гладких поверхностей данное определение угла совпадает с тем, какое принято в дифференциальной геометрии: угол между кривыми, исходящими из точки O на гладкой поверхности, оказывается углом между касательными к этим кривым, проведёнными в точке O. Для того чтобы выяснить аналогичный пространственный смысл угла между кривыми на любой выпуклой поверхности, введём понятие о *касательном конусе*, представляющем естественное обобщение понятия о касательной плоскости.

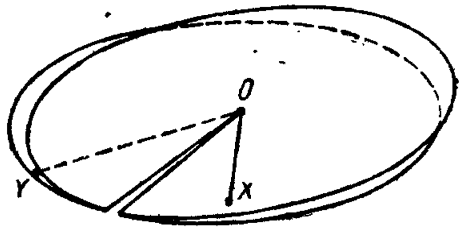
Пусть F — какая-либо выпуклая поверхность и O — произвольная точка на ней. Будем подобно увеличивать поверхность F с центром подобия в точке O. Тогда, если коэффициент подобия стремится к бесконечности, то поверхности, получающиеся при этом из F, будут, как это можно показать (см. § 5 гл. IV), сходиться к некоторому выпуклому конусу с вершиной в точке O. *Этот конус называется касательным конусом к поверхности F в точке O.* Если в точке O поверхность имеет касательную плоскость, то она и будет касательным конусом в этой точке. В точках, лежащих на рёбрах поверхности, касательный конус сводится к двугранному углу и только в остриях, или так называемых *конических точках*, он может быть уже любым выпуклым конусом. Можно показать, что касательный конус можно также определить как геометрическое место точек, лежащих на всех полупрямых, являющихся пределами полупрямых, проведённых из точки O в точки X поверхности F, когда точки X сходятся к O.

Пусть из точки O на поверхности F проведена кривая L. Предел полупрямой, идущей из O в переменную точку X кривой L при условии, что X

стремится к O, называют *полукасательной* к кривой L в точке O. Если полукасательная существует, то она есть образующая касательного конуса.

Мы докажем (в § 1 гл. IX) следующую теорему: *Для того чтобы две кривые, исходящие из одной точки O на выпуклой поверхности F, образовывали в этой точке угол в смысле данного выше внутреннего определения, необходимо и достаточно, чтобы они имели в точке O полукасательные. Угол между этими кривыми равен тогда углу между их полукасательными, измеренному на касательном конусе.* Последнее нужно понимать следующим образом: полукасательные, будучи образующими касательного конуса, делят его на два сектора; углы этих секторов определяются развёртыванием на плоскость; меньший из углов этих секторов и есть «угол между полукасательными, измеренный на касательном конусе». Если в точке O касательный конус сводится к плоскости, то этот угол будет обычным углом между полукасательными.

В частности, для кратчайших имеет место теорема, доказанная И. М. Либерманом: *Кратчайшая на выпуклой поверхности имеет в каждой точке правую и левую касательные* (а следовательно, правую и левую полукасательные)[1]). Поэтому угол между кратчайшими, исходящими из одной точки, равен углу между их полукасательными в этой точке, измеренному на касательном конусе.



Черт. 7.

Данное нами внутреннее определение угла для кривых на выпуклых поверхностях полностью соответствует естественному понятию об угле, но в других случаях оно может иметь одну особенность, которую полезно оговорить. Возьмём, например, конус с полным углом при вершине, равным 4π; такой конус можно изготовить, разрезав две плоскости по полупрямым и склеив их друг с другом по сторонам произведённых разрезов (черт. 7)[2]. Этот конус можно разбить на четыре сектора с углами, равными π, т. е. на четыре полуплоскости. Если точки X и Y лежат в двух противоположных секторах, то соединяющая их кратчайшая обязательно проходит через вершину O конуса, и её отрезки OX и OY разбивают окрестность вершины на два сектора, каждый из которых имеет угол, больший π. Естественно считать, что угол между отрезками OX и OY равен меньшему из углов этих секторов. Между тем, по принятому нами определению угла, он никогда не может быть больше π, потому что является пределом углов некоторых плоских треугольников, а углы в плоском треугольнике всегда не больше π. Для отрезков OX и OY угол в нашем определении равен, очевидно, π. Здесь получается, следовательно, некоторое несоответствие с естественным понятием угла. Тем не менее, данное нами определение оказывается всё же весьма удобным. Устранение же указанного несоответствия достигается введением нового важного понятия об *угле сектора*.

Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из точки O в многообразии с внутренней метрикой и не имеющие вблизи O никаких других общих точек. (На выпуклой поверхности всякие две несовпадающие кратчайшие обладают этим свойством, как будет показано в § 4 гл. III.). Тогда кратчайшие L и M разбивают достаточно малую окрестность точки O на два «сектора». Возьмём один из этих секторов U и будем проводить в нём из точки O кратчайшие N_1,

---

[1]) И. Либерман, Геодезические линии на выпуклых поверхностях, Доклады Ак. Наук СССР т. XXXII, № 5 (1941), стр. 310—313. Эту теорему мы докажем в § 6 гл. IV. Правой (левой) касательной к кривой $X(t)$ в точке $X(t_0)$ называется предел секущих, проходящих через точки $X(t_0)$, $X(t)$ кривой, когда t стремится к t_0 справа (слева), т. е. так, что всё время $t > t_0$ ($t < t_0$).

[2]) На черт. 7 одна плоскость расположена целиком над другой. Края разрезов, по которым произведено склеивание, слегка разведены.

$N_2, \ldots, N_n$, нумеруя их в порядке их расположения между L и M. Обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ углы между L и N_1, N_1 и $N_2, \ldots, N_n$ и M. Точную верхнюю границу сумм $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ при всевозможном выборе кратчайших N_i и при любом их числе мы называем *углом сектора U*. Детальное обоснование этого определения и исследование свойств угла сектора будет проведено в § 3 гл. IV; здесь же мы ограничимся только некоторыми общими указаниями.

Легко проверить, что на всяком конусе и, в частности, на конусе с полны углом 4π, углы секторов между образующими, определяемые путём развёртывания на плоскость, совпадают с теми, какие получаются при нашем определении. Таким образом, введение понятия об угле сектора устраняет указанное выше несоответствие.

Для выпуклых поверхностей имеет место следующее предложение: *Пусть из точки O на выпуклой поверхности исходят кратчайшие $L_1, L_2, \ldots, L_n$ с полукасательными $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Углы секторов, на которые эти кратчайшие разбивают окрестность точки O, равны углам секторов, на которые их полукасательные делят касательный конус в точке O.* (Доказательство даётся в § 6 гл. IV). Отсюда, в частности, следует, что *углы секторов на выпуклой поверхности складываются точно так же, как углы секторов на конусе, и что сумма углов секторов, образующих полную окрестность точки O, не зависит от этих секторов и равна полному углу касательного конуса в этой точке.* Эту сумму естественно поэтому назвать *полным углом вокруг точки O*. На выпуклой поверхности полный угол вокруг всякой точки не больше 2π, на гладкой поверхности он всегда равен 2π, но на негладкой и невыпуклой поверхности он может быть больше 2π, как, например, угол вокруг вершины рассмотренного выше конуса. Если полный угол вокруг точки O не больше 2π, то угол между двумя кратчайшими, исходящими из точки O, совпадает с наименьшим из углов тех двух секторов, на которые эти кратчайшие делят окрестность точки O. Если же полный угол вокруг точки O больше 2π, то из точки O могут исходить кратчайшие, делящие её окрестность на секторы с углами, бо́льшими π, и тогда ни один из углов этих секторов не равен самому углу между кратчайшими.

Понятие об угле сектора аналогично понятию об угле сектора в планиметрии. В полном согласии с планиметрией мы будем называть углом многоугольника P при вершине A угол того сектора, ограниченного сторонами, сходящимися в A, который содержится в P. Даже для треугольника этот угол не обязан совпадать с углом между сторонами. Например, взяв на сфере три точки A, B, C и соединив их кратчайшими, мы разобъём сферу на два треугольника ABC и если в одном из них угол при вершине A равен углу между кратчайшими AB и AC, то в другом он дополняет этот угол до 2π.

Единственное, пожалуй, существенное отличие углов между кратчайшими от углов между полупрямыми на плоскости состоит в том, что на выпуклой поверхности не всегда от данной кратчайшей можно отложить угол, равный данному. Возьмём, например, прямой круговой конус, к которому мы присоединяем также его основание, и пусть O — его вершина, а A — точка на окружности основания. На конусе нет кратчайших, касающихся окружности основания; то, что таких нет на основании, — очевидно, а в том, что их нет и на боковой поверхности, убеждаемся, разворачивая её на плоскость. Поэтому не существует кратчайшей, образующей с OA в точке A прямой угол. Говоря иначе, в направлении окружности основания на прямом круговом конусе не проходит никакая кратчайшая. Следовательно, в отличие от случая регулярных поверхностей, вообще говоря, не во всяком направлении из данной точки на выпуклой поверхности можно провести кратчайшую. Дальше, в § 5 гл. V, будет, однако, доказано, что в каждой точке множество таких особых направлений имеет угловую меру нуль.

В связи с тем, что на прямом круговом конусе нет кратчайших, касающихся окружности основания, представляется неудобным вводить внутреннее понятие о касательной к кривой как о пределе секущих кратчайших. Вместо него мы введём понятие о направлении кривой в данной точке. Именно, мы будем говорить, что *кривая, исходящая из точки O, имеет в ней определённое направление, если она образует сама с собой определённый угол.* Это определение выглядит на первый взгляд довольно дико, но на самом деле оно имеет полный смысл. Действительно, пусть $X_t = X(t)$ — кривая, исходящая из точки $O = X_0$ в многообразии с внутренней метрикой ρ. Будем рассматривать эту кривую как две совпадающие кривые $X_t = X(t)$ и $X_t' = X'(t)$; угол между этими кривыми определяется по формуле

$$\alpha = \lim_{t,\, t' \to 0} \gamma(t,\, t').$$

Совершенно очевидно, что не для всякой кривой $X(t)$ этот предел будет существовать при любом способе стремления значений t, t' к нулю. Рассматривая этот вопрос для кривой на плоскости, можно без труда убедиться в том, что $\lim\limits_{t,\, t' \to 0} \gamma(t,\, t')$ существует тогда и только тогда, когда кривая $X(t)$ имеет в точке $X(0)$ касательную. То же верно и на любой выпуклой поверхности; именно, в § 1 гл. IX мы докажем, что *кривая на выпуклой поверхности имеет в своей начальной точке касательную (предел секущих прямых) тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке определённое направление в смысле данного нами определения.*

Дальше, в гл. IX, будет введено понятие «о повороте направления кривой», или просто о «повороте кривой», являющееся обобщением понятия об интеграле кривизны кривой по длине дуги. Таким образом, мы получим в наше распоряжение основные понятия внутренне-геометрической теории кривых и там же дадим ряд их приложений.

Чтобы завершить определение всех основных понятий внутренней геометрии, аналогичных известным понятиям планиметрии, остаётся только ввести чисто внутренним путём площадь многоугольника, а затем и любой области на поверхности. Пусть P — многоугольник на поверхности, т. е. фигура, ограниченная конечным числом кратчайших. Разобьём его на треугольники и, сопоставив каждому из них плоский треугольник со сторонами той же длины, возьмём сумму площадей всех этих плоских треугольников. *Предел этих сумм*, получающийся при всё более и более мелком разбиении многоугольника P, если таковой существует, *мы и принимаем за площадь многоугольника P*. В § 6 гл. II мы докажем, что многоугольники на выпуклой поверхности всегда можно разбить на сколь угодно малые треугольники, а в гл. X докажем, что для каждого многоугольника P на выпуклой поверхности так определённая площадь существует и совпадает с его площадью в смысле обычного определения как предела площадей многогранных поверхностей, сходящихся к P. После того как площадь многоугольников определена, распространение её на любые области проводится уже известными методами теории меры.

Таким образом, мы видим, что на всякой выпуклой поверхности можно ввести все понятия, аналогичные основным понятиям планиметрии. Можно поэтому ожидать, что внутренняя геометрия любых выпуклых поверхностей может быть развита не менее содержательно, чем, скажем, планиметрия. Но для кривых поверхностей имеется ещё одно основное понятие — именно, понятие о их внутренней кривизне; его мы рассмотрим особо в следующем параграфе.

§ 8. Кривизна.

Отправным пунктом в распространении понятия о кривизне на любые выпуклые поверхности нам служит теорема Гаусса: площадь сферического изображения треугольника равна его «избытку», т. е. избытку суммы его углов над π. В этой теореме приравниваются две величины, из которых первая — площадь сферического изображения — характеризует искривлённость поверхности в пространстве, а вторая — «избыток треугольника» — характеризует отклонение внутренней метрики поверхности от метрики на плоскости, т. е. является как бы мерой неэвклидовости внутренней метрики поверхности. В связи с этим мы имеем две кривизны: «внешнюю» и «внутреннюю». Определим их для любой выпуклой поверхности.

Пусть G — какая-либо область на выпуклой поверхности F. Будем проводить во всех точках области G все опорные плоскости к поверхности F и будем проводить из центра некоторой единичной сферы S радиусы, направленные параллельно внешним нормалям к этим опорным плоскостям. Множество точек на сфере S, образуемое концами проведённых таким образом радиусов, называется *сферическим изображением* области G. Это определение отличается от обычного только тем, что вместо касательных плоскостей, которые, вообще говоря, могут не существовать в некоторых точках области G, берутся все возможные опорные плоскости. Площадь сферического изображения области G и будет представлять «внешнюю кривизну» этой области.

Если X — коническая точка поверхности F, то сферическое изображение её одной образует на сфере S целую область. Если L есть непрямолинейное ребро поверхности, то его сферическое изображение также покрывает на сфере S целую область; например, сферическое изображение окружности основания прямого кругового цилиндра покрывает целую полусферу.

Внутренняя кривизна, подобно площади сферического изображения, определяется как функция множества на поверхности, т. е. каждому множеству M из некоторого класса множеств (в общем случае — каждому борелевскому множеству [1])) ставится в соответствие число $\omega(M)$ — кривизна множества M. В соответствии с терминологией, принятой в дифференциальной геометрии, следовало бы говорить о полной (или интегральной) внутренней кривизне, но ради краткости мы опускаем оба этих прилагательных, что не поведёт к недоразумениям, так как одним словом «кривизна» мы не будем называть ничего другого. В определении кривизны можно исходить из избытка треугольника $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, где α, β, γ — углы треугольника. Мы докажем, что на выпуклой поверхности он всегда неотрицателен. (Это есть прямое следствие теоремы 3 § 4 гл. III.)

Рассматриваем все возможные покрытия данного множества M на поверхности внутренними областями треугольников в конечном или счётном числе. *Кривизну множества M на выпуклой поверхности можно определить как точную нижнюю границу сумм избытков треугольников, внутренние области которых покрывают M.*

Это определение напоминает определение внешней меры множества по Лебегу, и кривизна обладает свойствами, аналогичными свойствам меры. Оказывается, что каждое множество на выпуклой поверхности имеет конечную кривизну. Так как избыток треугольника на выпуклой поверхности не меньше нуля, то *кривизна всякого множества на выпуклой поверхности неотрицательна.* Для борелевских множеств кривизна оказывается также вполне или, как ещё

---

1) Класс борелевских множеств есть класс множеств, порождаемый замкнутыми (или открытыми) множествами в результате неограниченного применения операций счётного суммирования и образования пересечений. Говоря точнее, это обозначает следующее. Система множеств называется кольцом, если вместе с последовательностью множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ она содержит также их сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и пересечение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Множество называется борелевским, если оно входит в каждое кольцо, содержащее все замкнутые множества. Открытые множества представимы как суммы замкнутых и, следовательно, борелевские. Сумма и пересечение счётного числа борелевских множеств есть борелевское множество. Наконец, если A и B — борелевские множества, то $A-B$ тоже борелевское множество.

говорят, абсолютно аддитивной, т. е. если $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ и множества M_i не имеют попарно общих точек, то $\omega(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(M_i)$. Кривизна внутренней области треугольника оказывается равной его избытку и вообще кривизна внутренней области гомеоморфного кругу n-угольника равна избытку суммы его углов по сравнению с суммой углов плоского n-угольника, которая равна, как известно, $(n-2)\pi$. Кривизна целой замкнутой поверхности всегда равна 4π. Кривизна множества, состоящего из одной только точки, равна 2π минус полный угол вокруг этой точки и, следовательно, для конических точек она не равна нулю. В этом состоит существенное отличие кривизны от лебеговской меры. Отсюда также видно, что, говоря о кривизне, следует различать кривизну самого многоугольника от кривизны его внутренней области, потому что многоугольник может иметь в качестве вершин конические точки. Например, кривизна внутренности грани куба равна нулю, а кривизна грани со включением вершин равна 2π. Что же касается сторон многоугольника, то они ничего не могут добавить к кривизне, потому что, как оказывается, на выпуклой поверхности кривизна всякой кратчайшей с исключёнными концами равна нулю. Исключение концов существенно по той же причине, что концы кратчайшей могут быть коническими точками; вместе с тем легко показать, что проходить через коническую точку кратчайшая не может.

Данное здесь определение кривизны хотя и является наилучшим с общей точки зрения, однако для наших целей его можно заменить эквивалентным, но более элементарным определением, которое будет дано в гл. V, посвящённой специально учению о кривизне. Там же будет обстоятельно выяснено значение кривизны как «меры неэвклидовости» внутренней метрики поверхности. Из относящихся сюда теорем приведём здесь одну: *если кривизна области G на выпуклой поверхности равна нулю, то каждая точка области G имеет окрестность, изометричную части плоскости.* То, что вся область G может не быть изометричной части плоскости, показывает пример боковой поверхности цилиндра.

Связь между кривизной и площадью сферического изображения множества на выпуклой поверхности устанавливается обобщённой теоремой Гаусса: *Кривизна всякого множества на выпуклой поверхности равна площади его сферического изображения* (при том непременном условии, что его сферическое изображение имеет определённую площадь, т. е. лебеговскую меру). В частности, площадь сферического изображения внутренней области треугольника равна его избытку, а площадь сферического изображения одной точки равна 2π минус полный угол вокруг неё. Доказательство этой обобщённой теоремы Гаусса, даваемое в гл. V, будет проведено методом приближения многогранниками по схеме, указанной в конце § 5.

Формулированные здесь результаты имеют двоякое значение. Во-первых, мы видим, что множества на выпуклых поверхностях имеют неотрицательную кривизну. Это свойство, как известно, выделяет регулярные выпуклые поверхности из всех вообще регулярных поверхностей, а мы докажем, что оно характерно также для любых выпуклых поверхностей. Грубо говоря, мы докажем, что в многообразии с внутренней метрикой, в котором кривизна всякого множества неотрицательна, каждая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности. Здесь мы забегаем несколько вперёд; точная формулировка этого результата будет дана в следующем параграфе.

Во-вторых, обобщённая теорема Гаусса устанавливает связь между внутренней метрикой и пространственной формой выпуклой поверхности; она открывает тем самым путь к более детальному исследованию этой связи. Некоторые относящиеся сюда результаты будут рассмотрены, в частности, в гл. XI.

Введённое нами понятие о кривизне является обобщением известного в дифференциальной геометрии понятия полной или интегральной кривизны, которая обычно определяется как интеграл гауссовой кривизны по площади. Исходным считается, следовательно, понятие о кривизне как функции точки, а не функции множества. Мы же, напротив, берём за основу именно интегральное понятие кривизны, а кривизну в точке определяем затем как удельную кривизну, т. е. как предел отношения кривизны области к её площади при условии, что область стягивается к данной точке. Этот предел вовсе не обязан существовать во всякой точке выпуклой поверхности. Более того, кривизна области на выпуклой поверхности может не равняться интегралу от удельной кривизны по площади. Самый простой тому пример представляют многогранники: на многограннике удельная кривизна существует всюду, за исключением вершин, и равна, очевидно, нулю. Поэтому она интегрируема, но интеграл от неё по всей поверхности многогранника равен нулю, в то время как кривизна выпуклого многогранника, имеющего хотя бы одну вершину, отлична от нуля.

Особенно просто можно определить кривизну множества на многограннике или вообще в многообразии с многогранной метрикой, потому что кривизна на многограннике представляет собою дискретную функцию множества, как бы сосредоточенную в одних только вершинах. Пусть множество M на многограннике содержит его вершины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с полными углами вокруг них, равными $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$; кривизна множества M может быть определена как

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^{n} (2\pi - \theta_i),$$

т. е. как сумма кривизн вершин, содержащихся в M. При таком определении очевидно, что всякое множество M на многограннике будет иметь неотрицательную кривизну тогда и только тогда, когда полный угол вокруг всякой вершины $\leqslant 2\pi$. Отсюда и происходит введённый нами выше термин «многогранная метрика положительной кривизны».

Для того чтобы связать это определение кривизны для многогранников с данным выше общим определением, докажем теорему: *Пусть на многограннике дан гомеоморфный кругу многоугольник P с углами, равными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ — полные углы вокруг вершин многогранника, лежащих внутри P. Тогда*

$$2\pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^{m} (2\pi - \theta_j). \tag{1}$$

Говоря коротко, *избыток многоугольника равен сумме кривизн заключающихся внутри него вершин.*

Для доказательства разобьём многоугольник P на треугольники T_P, лежащие каждый на одной грани. При этом может оказаться, что некоторые вершины их, лежащие на границе многоугольника P, не совпадают с его вершинами. Однако мы можем принять их за вершины многоугольника P, что не изменит суммы, стоящей в (1) слева, так как угол при такой вершине равен π и, следовательно, соответствующее ей слагаемое $\pi - \alpha_i$ равно нулю. Точно так же некоторые вершины треугольников T_P, лежащие внутри многоугольника P, могут не совпадать с вершинами многогранника. Однако, присоединив их к вершинам многогранника, мы не изменим суммы, стоящей в (1) справа, так как полный угол вокруг такой вершины равен 2π и, следовательно, соответствующее ей слагаемое $2\pi - \theta_j$ равно нулю. Итак, мы можем все вершины треугольников T_P, лежащие на границе многоугольника P, считать вершинами самого многоугольника, а вершины этих треугольников, лежащие внутри P, — считать вершинами многогранника. Так как каждый треугольник T_P лежит на одной грани, то сумма его углов равна π, и если число всех треугольников равно f, то сумма всех их углов равна $f\pi$. С другой стороны, сумма этих углов равна сумме углов вокруг всех вершин треугольников, т. е. сумме углов многоугольника P плюс сумма полных углов вокруг внутренних вершин. Следовательно,

$$f\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha + \sum_{j=1}^{m} \theta_j. \tag{2}$$

Если k — число сторон треугольников T_P и e — число вершин, то по теореме Эйлера $f - k + e = 1$. Вместе с тем, число всех вершин равно сумме числа вершин на границе и внутри, т. е. $e = m + n$; поэтому

$$f - k + m + n = 1. \tag{3}$$

Наконец, у каждого треугольника по три стороны, но при этом только n сторон, лежащих на границе, принадлежат каждая одному треугольнику, а внутренние стороны принадлежат каждая двум треугольникам. Поэтому

$$3f = 2k - n. \tag{4}$$

Умножая равенство (3) на (2) и полагая в нём $2k = 3f + n$, получим

$$f = 2m + n - 2. \tag{5}$$

Подставляя это выражение для f в формулу (2), получим

$$2\pi m + \pi n - 2\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_j$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^{m} (2\pi - \theta_j),$$

что и требовалось доказать.

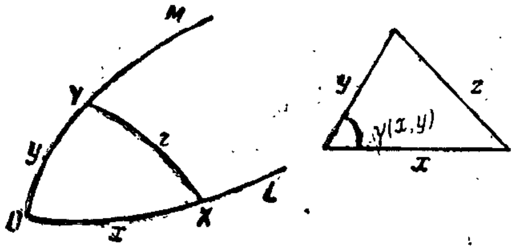
Применяя этот результат к выпуклым многогранникам, легко убедиться, что для них определение кривизны множества M как суммы кривизн вершин, содержащихся в M, эквивалентно определению кривизны как точной нижней границы сумм избытков треугольников, внутренние области которых покрывают M.

§ 9. Характерные свойства внутренней метрики выпуклых поверхностей.

Говоря в §§ 3, 4 об условиях, характеризующих внутреннюю метрику замкнутых выпуклых многогранников, мы присоединили к этим многогранникам дважды покрытые выпуклые многоугольники, что представлялось необходимым во избежание лишних оговорок в теореме существования многогранника с данной метрикой. Совершенно по той же причине представляется удобным присоединить к полным выпуклым поверхностям дважды покрытые выпуклые области со включённой границей. Плоские выпуклые области, не простирающиеся на всю плоскость, могут быть трёх типов: 1) ограниченные, гомеоморфные кругу, 2) бесконечные, гомеоморфные полуплоскости, 3) полосы между парами параллельных прямых. Определение того, что следует понимать под дважды покрытой ограниченной выпуклой областью, было дано в § 3 посредством такого непрерывного отображения сферы на область, при котором внутренность области оказывается покрытой образами обеих полусфер, а граница области оказывается образом разделяющего их экватора. Совершенно аналогично дважды покрытая область, гомеоморфная полуплоскости, должна рассматриваться как непрерывный образ плоскости, две полуплоскости которой покрывают внутренность этой области. Наконец, дважды покрытая полоса между двумя параллельными прямыми есть не что иное, как сплющенный цилиндр. Такую дважды покрытую область можно изогнуть в обыкновенный цилиндр. Таким образом, выпуклые области, рассматриваемые как дважды покрытые, превращаются в полные выпуклые поверхности, соответственно, — замкнутые, гомеоморфные плоскости и цилиндрические.

Если две точки X и Y лежат на одной стороне области, то соединяющая их кратчайшая есть прямолинейный отрезок XY. Если же они лежат на разных сторонах области, то соединяющая их кратчайшая состоит из двух прямолинейных отрезков, встречающихся на границе области.

Включив указанные предельные случаи в число полных выпуклых поверхностей, мы, естественно, должны присоединить к любым выпуклым поверхностям все области на таких вырожденных полных выпуклых поверхностях. При этом нужно, конечно, помнить о том, что внутренние точки дважды покрытой области читаются за две. Например, из поверхности, являющейся дважды покрытой кругом, можно образовать незамкнутую поверхность, вырезая некоторую область только на одной стороне круга, оставляя другую в целости. Все свойства выпуклых поверхностей, о которых шла речь в предыдущих параграфах, имеют место также для этих вырожденных поверхностей. Во всём дальнейшем изложении мы без особых оговорок будем считать эти вырожденные поверхности среди всех выпуклых поверхностей.



Черт. 8.

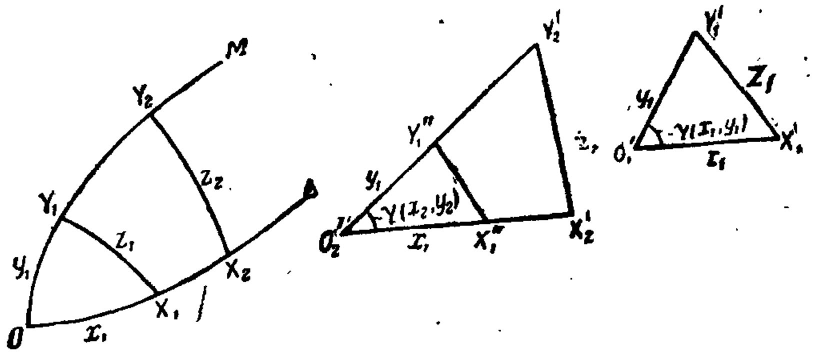
Вопрос о свойствах, характеризующих внутреннюю метрику выпуклых поверхностей, т. е. вопрос о тех условиях, которым должно удовлетворять метрическое пространство для того, чтобы оно было изометрично выпуклой поверхности, мы можем пока решить не для всех вообще выпуклых поверхностей, а лишь для «выпуклых в себе», т. е. для таких, которые представляют собой выпуклые области на границах выпуклых тел. Это будут такие выпуклые поверхности, на которых любые две точки можно соединить кратчайшей. Причины такого ограничения были выяснены в § 1: не на всякой выпуклой поверхности любые две точки можно соединить кратчайшей и вместе с тем у каждой точки на выпуклой поверхности есть сколь угодно малая выпуклая окрестность. Примерами неполных выпуклых поверхностей, любые две точки которых можно соединить кратчайшей, могут служить боковая поверхность прямого цилиндра или прямого кругового конуса, полусфера и т. п.

Поставленный вопрос, как всякий вопрос о необходимых и достаточных условиях, имеет две стороны. Во-первых, нас интересуют необходимые условия, т. е. те свойства, которыми на самом деле обладает внутренняя метрика выпуклых поверхностей. В этом случае желательно сразу найти по возможности более сильные свойства, легко приводящие к различным следствиям, которые только могут нас интересовать. Во-вторых, мы хотим выделить из этих необходимых условий такие, которые были бы также достаточными, и в этом случае желательно как раз обратное, именно — найти по возможности наиболее слабые достаточные условия. Столкновение этих противоположных стремлений приводит к тому, что мы разделяем эти две стороны задачи и рассматриваем их отдельно.

Два общих свойства выпуклых поверхностей были установлены в § 6: всякая выпуклая поверхность имеет внутреннюю метрику и гомеоморфна области на сфере. Дальше в § 3 гл. III будет показано, что *внутренняя метрика выпуклых поверхностей удовлетворяет ещё следующему условию, которое мы* *называем условием выпуклости.* Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из одной точки O, и X, Y — переменные точки на них, отличные от O.

Пусть x, y обозначают расстояние от O до X, Y, а $z = z(x, y)$ — расстояние между X и Y. В согласии с принятым нами обозначением, $\gamma(x, y)$ есть угол в плоском треугольнике со сторонами, равными x, y, z, лежащий против стороны, равной z (черт. 8). *Условие выпуклости состоит в том, что $\gamma(x, y)$ является невозрастающей функцией x и y*[1]) *на всякой паре промежутков $0 < x \leqslant x_0$, $0 < y \leqslant y_0$, такой, что точки X и Y, соответствующие любым двум значениям x, y из этих промежутков, можно соединить кратчайшими.* (На поверхности, «выпуклой в себе», кратчайшая XY существует для любых двух точек X, Y, и потому указанный интервал простирается на всю длину кратчайших L и M.)

Возьмём две пары точек X_1, Y_1 и X_2, Y_2 так, что $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ (черт. 9). Рассмотрим два плоских треугольника $O'_iX'_iY'_i$ $(i = 1, 2)$ со сторонами $O'_iX'_i = x_i$, $O'_iY'_i = y_i$, $X'_iY'_i = z_i = z(x_i, y_i)$. Углы при их вершинах O'_i и O'_i будут $\gamma_1 = \gamma(x_1, y_1)$, $\gamma_2 = \gamma(x_2, y_2)$ и, по условию выпуклости, $\gamma(x_1, y_1) \geqslant \geqslant \gamma(x_2, y_2)$. Если на сторонах $O'_2X'_2$ и $O'_2Y'_2$ треугольника $O'_2X'_2Y'_2$ взять точки X''_1, Y''_1 так, что $O'_2X''_1 = O'_1X'_1 = x_1$, $O'_2Y''_1 = O'_1Y'_1 = y_1$, то стороны треугольника $O'_2X''_1Y''_1$, заключающие угол $\gamma_2 = \gamma(x_2, y_2)$, будут равны сторонам треугольника $O'_1X'_1Y'_1$, заключающим угол $\gamma_1 = \gamma(x_1, y_1)$ и, так как $\gamma_1 \geqslant \geqslant \gamma_2$, то $X'_1Y'_1 \geqslant X''_1Y''_1$. Длина отрезка $X'_1Y'_1$ по построению равна длине кратчайшей X_1Y_1. Поэтому полученный результат обозначает, что расстояние между точками на боковых сторонах треугольника OX_2Y_2 не меньше расстояния между соответствующими точками на сторонах плоского треугольника $O'_2X'_2Y'_2$.



Черт. 9.

Представляется естественным, что так и должно быть на выпуклой поверхности: на ней стороны треугольника с данными длинами сторон раздвигаются сильнее, чем на плоскости. Раздвижение это будет тем более, чем более выпуклой будет поверхность. Наглядным примером может служить равносторонний треугольник на сфере. Это замечание выясняет, почему указанное условие мы называем условием выпуклости. Доказательство того, что на всякой выпуклой поверхности это условие выполняется, будет проведено методом приближения многогранниками по общей схеме, описанной в § 5.

Условие выпуклости оказывается весьма сильным и из него легко выводится ряд важных теорем внутренней геометрии выпуклых поверхностей. Например, так как по условию выпуклости угол $\gamma(x, y)$ не убывает с уменьшением x и y, то существует $\lim\limits_{x,\, y \to 0} \gamma(x, y)$, а по принятому нами определению этот предел есть угол между кратчайшими L и M. Таким образом, существование угла между кратчайшими есть прямое следствие условия выпуклости. Столь же просто получается другая важная теорема: каждый угол треугольника на выпуклой поверхности, а также каждый угол между сторонами такого треугольника не меньше соответствующего угла плоского треугольника, имеющего стороны такой

[1]) Т. е. при $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$ непременно $\gamma(x_1, y_1) \geqslant \gamma(x_2, y_2)$.

же длины [1]). Эта теорема не только служит основой исследования треугольников на выпуклых поверхностях, но имеет также многие другие приложения. Из неё, в частности, следует, что сумма углов треугольника на выпуклой поверхности всегда не меньше π, — результат, уже упомянутый в предыдущем параграфе в связи с теорией кривизны.

Из других следствий условия выпуклости отметим здесь ещё одно. Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из точки O, а X и Y — переменные точки на этих кратчайших. Пусть $\gamma(x, y)$ имеет то же значение, что и выше. Тогда, *если хотя бы одна из точек X и Y стремится к O, а другая меняется произвольно, но так, что кратчайшая XY сходится к отрезку кратчайшей L или M, то угол $\gamma(x, y)$ стремится к определённому пределу.* Этот предел будет, конечно, тот же самый, что и в случае, когда обе точки X и Y стремятся к O, и, следовательно, равен углу между кратчайшими L и M. Этот результат можно выразить и так: если произведение xy стремится к нулю так, что кратчайшие XY сходятся к части линии $L+M$, составленной из данных кратчайших, то $\lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y)$ существует. Назвав этот предел «углом в сильном смысле», можно сказать, что между кратчайшими на выпуклой поверхности «угол в сильном смысле» всегда существует. Для регулярных выпуклых поверхностей этот результат хорошо известен и основан на том, что в окрестности геодезической линии метрика поверхности совпадает с метрикой в окрестности прямой на плоскости с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем ширина окрестности. На выпуклом многограннике достаточно малую окрестность кратчайшей можно развернуть на плоскость [2]), и потому существование угла в сильном смысле между кратчайшими на выпуклом многограннике очевидно.

Условие выпуклости оказывается характеристическим для внутренней метрики выпуклых поверхностей. Именно, можно доказать следующую теорему: *Для того чтобы данное метрическое пространство R было изометрично выпуклой поверхности, каждые две точки которой можно соединить кратчайшей, необходимы и достаточны следующие условия:* 1) *R гомеоморфно области на сфере;* 2) *любые две точки в R можно соединить кривой с длиной, равной расстоянию;* 3) *в R выполняется условие выпуклости.* Следовательно, основываясь только на условии выпуклости вместе с общими свойствами многообразий с внутренней метрикой, можно развивать внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей чисто внутренним путём, т. е. не привлекая уже никаких соображений, связанных со свойствами выпуклой поверхности как фигуры в пространстве. Для этой цели условие выпуклости оказывается весьма удобным благодаря тому, что в нём заключается очень сильное требование. Вместе с тем, именно вследствие этой силы оно не может рассматриваться как удачно выбранное достаточное условие. Например, то, что оно выполняется во всяком многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны, представляет хотя по существу элементарную, но всё же не очевидную теорему. Точно так же тот факт, что оно выполняется в многообразии с метрикой, заданной посредством линейного элемента с положительной кривизной, также представляет собой

---

[1]) Доказательство. Пусть ABC — треугольник на выпуклой поверхности. Ограничимся тем случаем, когда любые точки на его сторонах можно соединить кратчайшей. Пусть $\gamma(x, y)$ — угол плоского треугольника, определённый, согласно предписанию, данному в условии выпуклости для точек X и Y, на сторонах AB и AC. По определению угла α между сторонами AB и AC, $\alpha = \lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y)$. Соответствующий угол α_0 плоского треугольника со сторонами той же длины есть значение $\gamma(x, y)$, соответствующее $x = AB$, $y = AC$. Так как $\gamma(x, y)$ не возрастает с ростом x и y, то, очевидно, $\alpha \geqslant \alpha_0$, что и требовалось доказать. Так как, кроме того, угол сектора, заключённого в треугольнике, не меньше угла между сторонами, то и угол этого сектора, т. е. угол треугольника при вершине не меньше α_0.

[2]) Если кратчайшая исходит из вершины, то для развёртывания окрестности на плоскость нужно произвести разрез по отрезку, исходящему из этой вершины.

теорему, которая доказывается не «в два слова». (Повидимому, до сих пор вообще оставалось незамеченным, что такая теорема имеет место.) Из этих замечаний следует, что должны искать другие, более слабые достаточные условия.

В качестве таких условий можно взять два:

1. *Между всякими двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол в сильном смысле (как он был определён выше).*

2. *Сумма углов между сторонами всякого треугольника не меньше* π.

Эти условия, как было указано, вытекают из условия выпуклости и выполняются на всякой выпуклой поверхности. То, что они, в частности, выполняются в многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны, мы доказали для первого условия здесь, а для второго — в предыдущем параграфе. То, что эти условия выполняются в многообразии с метрикой, заданной посредством линейного элемента положительной кривизны, представляет собою факт, известный со времени Гаусса.

Условие существования угла в сильном смысле можно было бы ослабить, заменив его условием существования угла в смысле нашего определения, введённого в § 7, т. е. угла, как $\lim\limits_{x,\, y \to 0} \gamma(x, y)$. Но доказательство такой возможности, которым мы владеем, включает, хотя и простое дополнительное условие и слишком трудно для того, чтобы изложить его в рамках этой книги.

Однако, вообще условие существования угла в каком бы то ни было смысле оказывается по существу лишним! Конечно, без существования угла, условие, налагаемое на сумму углов между сторонами треугольника, теряет смысл, но оказывается возможным так определить угол между кратчайшими, чтобы он всегда существовал и чтобы условие о сумме так определённых углов между сторонами треугольника оказывалось само по себе достаточным. Это определение угла можно ввести следующим образом. Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из одной точки O в многообразии с внутренней метрикой ρ. Пусть X и Y — переменные точки на этих кратчайших, отличные от O, и $x = \rho(OX)$, $y = \rho(OY)$, $z = z(x, y) = \rho(XY)$. Обозначим, согласно принятому нами условию, через $\gamma(x, y)$ тот угол в плоском треугольнике со сторонами, равными x, y, z, который лежит против стороны, равной z. *Нижним углом (в сильном смысле) между кратчайшими L и M мы называем нижний предел угла $\gamma(x, y)$ получающийся при условии, что хотя бы одна из точек X и Y стремится к O, а кратчайшая XY безгранично приближается к одной из кратчайших L или M.* (В § 2 гл. II будет доказано, что в многообразии с внутренней метрикой кратчайшая XY существует, как только точки X и Y достаточно близки к O.) Это определение отличается от введённого выше определения угла в сильном смысле только тем, что вместо предела $\gamma(x, y)$ берётся нижний предел, который заведомо существует, так как $0 \leq \gamma(x, y) \leq \pi$. Вместо угла в сильном смысле мы можем рассматривать этот нижний угол (в сильном смысле); на выпуклой поверхности он сводится к углу в сильном смысле, поскольку этот последний существует. Воспользовавшись введённым определением, можно формулировать следующую теорему:

Теорема А. *Для того чтобы метрическое пространство R было изометрично такой выпуклой поверхности, любые две точки которой можно соединить кратчайшей, необходимы и достаточны следующие условия:*

1. *R гомеоморфно области на сфере.*

2. *Любые две точки в R можно соединить кривой, имеющей длину, равную расстоянию между ними.* (Или, в более слабой форме: для каждых двух точек X, Y существует такая точка Z, что $\rho(XZ) = \rho(YZ) = \frac{1}{2}\rho(XY)$, где ρ — метрика в R.)

3. *Каждая точка R имеет такую окрестность, что у всякого содержащегося в ней треугольника сумма нижних углов между сторонами не меньше* π.

Первое и третье условия выполняются для всех выпуклых поверхностей. Второе же — только для тех, на которых каждые точки соединимы кратчайшей; для любых выпуклых поверхностей можно сказать только, что их метрика — внутренняя, т. е. для каждых двух точек существует соединяющая их кривая с длиной, сколь угодно близкой к расстоянию. Однако такое условие в соединении с первым и третьим условиями вовсе не достаточно для существования какой бы то ни было выпуклой поверхности, изометричной пространству R, удовлетворяющему этим условиям. Возьмём, например, две равные сферы и, надрезав их по меридианам, склеим их друг с другом так, чтобы получилась удвоенная сфера. Если у этой удвоенной сферы исключить полюсы — концы произведённых надрезов, то получится многообразие, гомеоморфное области на сфере [1]) и имеющее метрику положительной кривизны, но заведомо не реализуемое в виде выпуклой поверхности, потому что его полная кривизна равна 8π, в то время как кривизна выпуклой поверхности не может превосходить 4π.

Так как уже было указано, что метрика выпуклых поверхностей удовлетворяет более сильным условиям, чем условие 3 теоремы А (именно, — условию выпуклости и приведённым выше его следствиям), то сущность этой теоремы состоит в достаточности её условий.

Сравним условие 3 с условиями, определяющими многогранную метрику и метрику, задаваемую линейным элементом. В определении многообразия с многогранной метрикой заранее предположено, что это многообразие в малом изометрично поверхности в пространстве, именно конусу. Сущность же задания метрики линейным элементом состоит, как было выяснено в § 2, в том, что многообразие с такой метрикой предполагается изометричным плоскости в бесконечно малом. В нашем же условии нет ничего подобного, именно, благодаря исключению гипотезы о существовании угла, которая, как легко видеть, очень близка гипотезе об изометрии плоскости в бесконечно малом. Тем не менее, поскольку это условие вместе в двумя другими достаточно для существования выпуклой поверхности с данной метрикой, из него уже следуют и существование угла, и изометрия в бесконечно малой плоскости всюду, кроме счётного множества конических точек. Это обстоятельство делает данное условие особенно интересным и потому мы принимаем его за основу. Некоторые другие условия, могущие его заменить, будут рассмотрены в общих чертах в § 6 гл. VIII [2]).

В рамках нашей книги теорема А не может быть доказана в полном объёме и нам придётся ограничиться наиболее существенными частными случаями её, дающими характеризацию метрики полных выпуклых поверхностей, с одной стороны, и характеризацию метрики любых выпуклых поверхностей в малом — с другой стороны. При этом для упрощения доказательств мы несколько изменим данное здесь определение нижнего угла, но сейчас, во избежание нагромождения определений, мы не станем этого делать. Для сокращения мы будем дальше называть внутреннюю метрику, удовлетворяющую условию 3 теоремы А, *метрикой положительной кривизны* [3]).

---

[1]) Именно, гомеоморфное сфере с исключёнными полюсами, в чём легко убедиться, отображая каждую из надрезанных сфер на полусфере.

[2]) Введённое нами понятие нижнего угла, к сожалению, слишком далеко от естественного представления об угле. При нашем определении нижний угол между кратчайшими зависит от всего протяжения этих кратчайших, в то время как в естественном понятии угол должен был бы зависеть только от сколь угодно малых их отрезков, исходящих из их общего начала. Поэтому нижний угол может, вообще говоря, измениться, если кратчайшие L_1 и L_2 заменить их отрезками или, если их, напротив, продолжить. Этого можно избежать, введя иное понятие нижнего угла; его определение будет дано в § 6 гл. VIII. Мы не вводим сразу такого понятия нижнего угла, потому что оно в свою очередь имеет существенные неудобства. Вопрос о разных определениях угла будет рассмотрен в § 6 гл. VIII.

[3]) Так как под это определение подпадает, в частности, эвклидова метрика, то лучше было бы говорить о метрике неотрицательной кривизны.

Теоремы, характеризующие метрику выпуклых поверхностей, мы формулируем как теоремы существования поверхности с данной метрикой, потому что, так же как в теореме А, необходимость условий этих теорем не представляет интереса.

Когда речь идёт о метрическом пространстве R, гомеоморфном области на сфере или какому-нибудь другому конкретному многообразию, то в целях наглядности пространство R удобно представлять как это самое многообразие с заданной на нём непрерывной функцией пары точек $\rho(XY)$ — метрикой пространства R [1]). В таком смысле можно говорить о многообразии с заданной на нём метрикой.

Характеризация внутренней метрики замкнутых выпуклых поверхностей даётся следующей теоремой:

Теорема В. *Метрическое пространство, гомеоморфное сфере и имеющее метрику положительной кривизны, изометрично замкнутой выпуклой поверхности.*

Это есть частный случай теоремы А, потому что во всяком пространстве с внутренней метрикой, гомеоморфном сфере (и вообще во всяком компактном пространстве с внутренней метрикой), каждые две точки можно соединить кратчайшей. Доказательство теоремы В даётся в гл. VII; оно основано на приближении общей метрики положительной кривизны многогранными метриками и на формулированной в § 3 теореме существования выпуклого многогранника с данной метрикой. Именно, гомеоморфное сфере пространство с метрикой положительной кривизны мы разбиваем на малые треугольники и каждый из них заменяем плоским треугольником со сторонами той же длины. Эти плоские треугольники образуют развёртку, которая, как мы доказываем, определяет многогранную метрику положительной кривизны, тем ближе подходящую к данной метрике, чем мельче разбиение. Поэтому можно воспользоваться рассуждением, схема которого была намечена в § 5. Именно, беря всё более и более мелкие разбиения и склеивая из соответствующих развёрток замкнутые выпуклые многогранники, мы получим последовательность их, сходящихся к выпуклой поверхности, которая и будет изометрична данному пространству.

Для того чтобы характеризовать метрику бесконечных полных поверхностей, условия теоремы А недостаточны. Например, полусфера гомеоморфна плоскости и каждые две её точки можно соединить кратчайшей, но она, конечно, не изометрична никакой выпуклой поверхности. Здесь необходимо, следовательно, дополнительное условие, а именно условие «полноты» метрики. *Метрика пространства R называется полной, если в R верна теорема Вейерштрасса, т. е. если всякое бесконечное и ограниченное множество в R имеет точку сгущения* [2]).

Необходимость условия полноты вытекает из теоремы:

Выпуклая поверхность имеет полную метрику тогда и только тогда, когда она полная, т. е. представляет целую границу выпуклого тела.

---

[1]) Так как метрика $\rho(XY)$ есть непрерывная функция в самом метрическом пространстве, то нужно требовать, чтобы она была непрерывной на соответствующем конкретном многообразии.

[2]) В теории метрических пространств полным называется такое метрическое пространство, в котором всякая фундаментальная (сходящаяся в себе) последовательность сходится в некоторой точке, т. е., иными словами, из того, что при $n, m \to \infty$, $\rho(X_nX_m) \to 0$ следует существование такой точки X, что $\rho(XX_n) \to 0$. Кон-Фоссен доказал: для того чтобы многообразие (и даже всякое локально компактное пространство) с внутренней метрикой было полным в этом смысле, необходимо и достаточно, чтобы его метрика была полной в смысле данного нами определения. [См. С. Кон-Фоссен, О существовании кратчайших путей. Доклады Ак. Наук СССР, т. III, № 8 (1935), стр. 339—342]. Кон-Фоссен пользуется понятием, несколько отличным от понятия внутренней метрики, что не имеет, однако, существенного значения. Самое понятие полной метрики было введено в дифференциальную геометрию Хопфом и Риновым. Однако оно рассматривалось и раньше под другим названием. Например, Э. Картан рассматривает пространства с полной метрикой, называя их «нормальными пространствами», См. Э. Картан, Геометрия римановых пространств, гл. III.

Доказательство. Пусть F есть полная выпуклая поверхность. Возьмём на ней бесконечное множество точек M, ограниченное в смысле её внутренней метрики. Так как расстояние в пространстве не больше расстояния на поверхности, то это множество тем более будет ограниченным в смысле расстояний в пространстве и, следовательно, будет иметь в пространстве хотя бы одну точку сгущения. Эта точка A будет принадлежать поверхности F (потому что граница всякого множества есть замкнутое множество, т. е. содержит все свои точки сгущения).

Точка A будет точкой сгущения для множества M также в смысле внутренней метрики, потому что, как было доказано в § 6, сходимость точек на выпуклой поверхности в смысле расстояний в пространстве эквивалентна их сходимости в смысле расстояний на самой поверхности. Этим доказано, что полная выпуклая поверхность имеет полную метрику.

Если же выпуклая поверхность F не полная, то она есть только часть некоторой полной выпуклой поверхности F_0. Возьмём на F_0 две точки A и B так, что A лежит на F, а B не лежит на F. Проведём на F_0 кратчайшую AB и пусть C—ближайшая к A точка этой кратчайшей, не принадлежащая F. (Возможность соединить две точки на полной поверхности кратчайшей доказывается в § 2 гл. II.) Отрезок AC нашей кратчайшей с исключённой точкой C представляет собой ограниченное множество на F, но его предельная точка C ему не принадлежит. Последовательность точек, лежащих на отрезке AC и сходящихся к C, не имеет на F точки сгущения. Следовательно, метрика неполной выпуклой поверхности — неполная.

Понятие полной метрики является одним из основных понятий геометрии «в целом», потому что внутренняя геометрия в целом есть по существу не что иное, как теория многообразий с полной внутренней метрикой.

Бесконечные полные выпуклые поверхности могут быть двух типов: гомеоморфные плоскости или цилиндры. Внутренняя метрика последних характеризуется очевидным образом, а для первых имеет место

Теорема С. *Метрическое пространство, гомеоморфное плоскости и имеющее полную метрику положительной кривизны, изометрично бесконечной полной выпуклой поверхности.*

Характеристика метрики произвольной выпуклой поверхности в малом заключается в следующей теореме:

Теорема D. *В многообразии с метрикой положительной кривизны всякая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности.*

Доказательство этой теоремы, даваемое в § 2 гл. VIII, основано на следующих соображениях. Мы доказываем, что в многообразии с метрикой положительной кривизны всякая точка имеет окрестность, являющуюся выпуклым многоугольником. Вырежем такой многоугольник P из данного многообразия и, взяв другой экземпляр P' ровно такого же многоугольника, отождествим их соответственные стороны. Многоугольник P гомеоморфен кругу, а потому в результате такого отождествления получится многообразие $P+P'$, гомеоморфное сфере. В нём естественно определяется метрика: за расстояние между точками X и Y принимается точная нижняя граница длин соединяющих их кривых, причём длина определяется через метрику, имеющуюся в P и P'. Основываясь на том, что у выпуклого многоугольника углы не превосходят π и что, следовательно, полные углы вокруг склеенных вершин многоугольников P и P' оказываются не больше 2π, легко доказать, что метрика в многообразии $P+P'$ будет положительной кривизны. На основании теоремы В её можно реализовать посредством замкнутой выпуклой поверхности, а вырезая из этой поверхности часть, соответствующую многоугольнику P, получим выпуклую поверхность, изометричную этому многоугольнику. Таким образом, оказывается доказанной не только теорема D, но также и то, что всякий выпуклый многоугольник, гомеоморфный кругу, вырезанный из многообразия с метрикой положительной кривизны, изометричен выпуклой поверхности.

Доказательство теоремы С проводится в § 3 гл. VIII сведением её к теореме В посредством аналогичного приёма. Обобщение этого метода склеивания нового многообразия из кусков данных многообразий приводит к общей «теореме о склеивании», имеющей много интересных приложений. Формулировка и намётка доказательства этой теоремы даются в § 3 гл. IX, однако полное доказательство её не может быть изложено в рамках нашей книги. Эта теорема о склеивании устанавливает весьма общие условия, при которых из кусков данных многообразий с метрикой положительной кривизны можно «склеить» путём отождествления частей границ этих кусков новое многообразие также с метрикой положительной кривизны. Частным случаем будет «склеивание» выпуклой поверхности из кусков других выпуклых поверхностей; это является широким обобщением теоремы о склеивании выпуклого многогранника из кусков плоскости.

Общая теорема о склеивании позволяет, в частности, выяснить, какие выпуклые поверхности обладают тем свойством, что на них каждые две точки соединимы кратчайшей. Оказывается, что, например, такая ограниченная поверхность может быть только одного из следующих типов: 1) замкнутая; 2) изометричная выпуклой шапке, т. е. выпуклой поверхности с плоским краем, однозначно проектирующейся на плоскость края; 3) изометричная боковой поверхности прямого кругового цилиндра; и ещё она может получаться из поверхности первого или второго типа путём исключения любого замкнутого множества тех точек, через которые не проходят никакие кратчайшие (этим свойством обладают, в частности, все конические точки). Все перечисленные здесь поверхности и только они ограничены и допускают соединение любой пары точек кратчайшей.

§ 10. Некоторые особенности внутренней геометрии выпуклых поверхностей.

Между внутренней геометрией произвольных выпуклых поверхностей и планиметрией или даже внутренней геометрией регулярных выпуклых поверхностей имеется существенное качественное различие. Оно связано с теми особенностями, которые может представить произвольная выпуклая поверхность. Понимание этих особенностей очень важно для геометра, потому что оно предостерегает от построения наглядных картин по аналогии с планиметрией, картин, которые могут не соответствовать действительности и могут поэтому навести на слишком поспешные неверные заключения. В связи с этим будет небесполезно выяснить здесь на ряде примеров основные качественные особенности внутренней геометрии выпуклых поверхностей. Эти особенности связаны, главным образом, с отличием свойств кратчайших на выпуклой поверхности от свойств прямолинейных отрезков на плоскости.

Прежде всего перечислим «хорошие» свойства кратчайших на выпуклых поверхностях, которые будут доказаны в последующем (§ 2 гл. II и § 4 гл. III):

1. На всякой полной выпуклой поверхности каждые две точки можно соединить кратчайшей. На произвольной выпуклой поверхности каждая точка имеет окрестность, любые две точки которой можно соединить кратчайшей.

2. Кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку. Каждая дуга кратчайшей также является кратчайшей. Длина кратчайшей равняется расстоянию между её концами.

3. Из данной точки в данном направлении может исходить только одна кратчайшая, или, иными словами, две касающиеся кратчайшие налегают друг на друга.

4. Для двух кратчайших возможны только такие же случаи взаимного расположения, какие имеют место для дуг больших кругов на сфере. Именно, две

кратчайшие или не имеют общих точек, или имеют только одну общую точку, или имеют только две общие точки, которые оказываются при этом их общими концами, подобно двум большим полуокружностям на сфере, соединяющим две диаметрально противоположные точки; наконец, две кратчайшие могут налегать друг на друга на целом отрезке так, что одна есть часть другой, или так, что один конец их общего отрезка есть конец одной из них, а другой конец его есть конец другой, подобно двум налегающим дугам большого круга. Никакие другие взаимные расположения кратчайших невозможны. (См. черт. 16 на стр.).

5. Предел кратчайших есть кратчайшая, т. е. если кратчайшие сходятся к некоторой кривой, то эта последняя также оказывается кратчайшей.

Теперь перечислим основные особенности кратчайших, а потом продемонстрируем эти особенности на ряде примеров. При этом тот факт, что на произвольной выпуклой поверхности, вообще говоря, не всякие две точки можно соединить кратчайшей, можно не считать особенностью, потому что тем же свойством обладает, например, всякая невыпуклая область на плоскости.

1. На выпуклой поверхности могут существовать пары точек, которые соединяются не одной, а многими кратчайшими; такие точки могут быть даже сколь угодно близкими друг к другу.

2. Могут существовать точки, из которых в некоторых направлениях не исходят никакие кратчайшие. Мы дадим пример поверхности, у которой все точки обладают этим свойством.

3. Могут существовать точки, через которые не проходит никакая кратчайшая.

4. Если данную точку A соединить кратчайшей с переменной точкой X, то при непрерывном движении точки X кратчайшая AX может меняться не непрерывно.

Из особенностей 2 и 3 следует, что, вообще говоря, не всякую кратчайшую можно продолжить за один из её концов A так, чтобы получилась линия, кратчайшая хотя бы на сколь угодно малом участке, содержащем внутри себя точку A. Иными словами, геодезическая линия на выпуклой поверхности может не допускать безграничного продолжения, как это имеет место в случае регулярных поверхностей.

Особенности 1, 3, 4 имеют место на всяком выпуклом конусе (с полным углом $<2\pi$). Пусть O — вершина такого конуса, а A и B — какие-либо две его точки, отличные от O. Проведём образующие OA, OB и, разрезав конус по этим образующим на два сектора, развернём эти секторы на плоскость. Так как сумма углов этих секторов есть $\theta<2\pi$, то угол одного из них будет меньше или равен $\frac{\theta}{2}<\pi$. Прямолинейному отрезку AB, проведённому в этом секторе, соответствует кратчайшая AB на конусе. Отсюда видно, что через вершину конуса не может проходить никакая кратчайшая. Далее, если углы обоих секторов равны, то отрезки AB в них обоих получаются равными и, следовательно, в этом случае точки A и B соединяются двумя кратчайшими, как бы ни были они близки к вершине O.

Опишем на нашем конусе окружность с центром в вершине, проходящую через точку A. Будем двигать точку B по этой окружности, начиная от точки A. Пока угол φ между образующими OA и OB остаётся меньше $\frac{\theta}{2}$, кратчайшая AB меняется непрерывно. Но при переходе через значение $\varphi=\frac{\theta}{2}$ происходит скачок кратчайшей с одной стороны от O на другую. Следовательно, кратчайшая AB меняется не непрерывно с непрерывным движением точки B.

Эти соображения имеют совершенно общий характер. Действительно, пусть через точку O на какой-либо поверхности не проходит никакая кратчайшая. Опишем вокруг O замкнутую кривую L и, взяв на ней произвольную точку A, будем двигать переменную точку X по кривой L в определённом направлении, начиная от точки A. При таком движении кратчайшая AX не сможет пройти через O и, следовательно, при некотором положении X_0 точки X она должна будет через O перескочить. В таком случае существуют по крайней мере две кратчайшие AX_0: это будут пределы кратчайших AX, получающиеся при приближении точки X к X_0 с одной и с другой стороны. Это рассуждение не претендует на строгость, хотя его и можно сделать совершенно точным; нам важно только наглядно уяснить, что наличие точек, через которые не проходят кратчайшие, влечёт за собою другие особенности в поведении кратчайших.

Мы докажем в § 3 гл. IV, что на выпуклой поверхности через всякую коническую точку (т. е. точку, полный угол вокруг которой $< 2\pi$) не проходит никакая кратчайшая. Это, впрочем, довольно очевидно само по себе. Гораздо интереснее то обстоятельство, что этим свойством могут обладать также точки, не являющиеся коническими (на это мне указал В. А. Залгаллер). Пусть, например, G — выпуклая область на плоскости и L — ограничивающая её кривая. Тогда, если в некоторой точке A кривизна кривой L бесконечна, то на дважды покрытой области G никакая кратчайшая не проходит через точку A, что проверяется простым подсчётом. В этом примере точка A лежит на ребре поверхности, но тем же свойством могут обладать точки, где существует касательная плоскость. Вот построение, приводящее к поверхности вращения, через полюс которой не проходит никакая кратчайшая.

Пусть K_0 — боковая поверхность прямого кругового конуса. Кратчайшие, соединяющие точки на окружности его основания, заполняют на ней некоторую кольцевую область H_0 [1]). Вырежем эту область и к её меньшей окружности приставим конус K_1 с полным углом при вершине, бо́льшим чем у K_0. На этом конусе выделим снова область H_1, заполняемую кратчайшими, соединяющими точки на окружности его основания, и к меньшей окружности области H_1 приставим конус K_2, и т. д. Повторяя это построение, придём в пределе к выпуклой поверхности вращения, на которой, как легко проверить, никакая кратчайшая не проходит через полюс. Если полные углы конусов $K_1, K_2, \ldots$ достаточно быстро сходятся к 2π, то эта поверхность будет иметь в полюсе касательную плоскость. Если вместо самих областей $H_0, H_1, \ldots$ брать несколько бо́льшие области, то рёбра между ними можно будет сгладить и получить полностью гладкую выпуклую поверхность вращения, через полюс которой не проходит никакая кратчайшая. Стоит отметить ещё, что в то время как число конических точек на поверхности всегда не более чем счётно (что будет потом доказано), множество точек, через которые не проходят кратчайшие, может иметь мощность континуума.

Пример поверхности, на которой имеются точки, из которых не во всех направлениях исходят кратчайшие, мы уже привели в § 7. Именно, на прямом круговом конусе нет кратчайших, касающихся окружности основания. Тем же свойством обладают, например, окружность основания цилиндра или ребро двояковыпуклой линзы. Однако все эти поверхности — негладкие. Гладкую поверхность, на которой из некоторой точки в некотором направлении не исходит никакая кратчайшая, можно получить следующим построением. Возьмём сферу S; выберем на ней полюс O и, проведя через O меридиан L, построим на нём последовательность точек $A_1, A_2, \ldots$, сходящуюся к O. Вокруг точек A_n опишем окружности C_n так, чтобы они не пересекались. Построим конусы K_n, касающиеся сферы S по этим окружностям. На полученной таким образом поверхности нет кратчайшей, исходящей из O в направлении меридиана L. То, что это действительно так, доказывается путём простого рассуждения, которое мы проведём несколькими строками дальше. Если же вершины конусов K_n загладить,

1) Если θ — полный угол при вершине конуса K_0, а r_0 — длина его образующей, то область H_0 представляет усечённый конус с образующей $r = r_0 \left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$, в чём, легко убедиться, если разрезать конус K_0 по образующей и, развернув его на плоскость, заметить, что кратчайшие суть хорды полученного сектора.

то получим гладкую поверхность, на которой также не будет кратчайшей, исходящей из O в направлении меридиана L. Если из точки O провести несколько меридианов L и для всех них проделать такое же построение, то из точки O кратчайшие не будут исходить в направлениях всех этих меридианов. Можно взять даже счётное всюду плотное множество меридианов L и провести на них то же построение, следя лишь за тем, чтобы все окружности C_n не пересекались (чего легко достигнуть, если радиусы их будут убывать достаточно быстро при переходе от одного меридиана к другому, причём меридианы L следует предварительно перенумеровать).

Наконец, можно указать выпуклую поверхность, на которой во всякой точке имеется всюду плотное множество направлений, в которых не проходит никакая кратчайшая. Этим свойством обладает поверхность со всюду плотным множеством конических точек. Построить такую поверхность можно следующим образом. Будем исходить, например, из правильного тетраэдра P_0. Пусть $A_1, \ldots, A_4$ — центры тяжести его граней. Выдвинув точки A_i наружу, построим выпуклую оболочку тетраэдра P_0 и этих выдвинутых точек A_i. Если смещения точек A_i достаточно малы, то получим многогранник P_1, имеющий в качестве вершин все вершины тетраэдра P_0 и все смещённые точки A_i. Взяв центры тяжести граней многогранника P_1, повторим то же построение и т. д. до бесконечности. Если смещения центров тяжести граней при каждом следующем шаге будут убывать достаточно быстро, то полные углы вокруг уже полученных раньше вершин многогранников P_n будут расти достаточно медленно и не будут стремиться к 2π. Поэтому в пределе получится поверхность со всюду плотным счётным множеством конических точек.

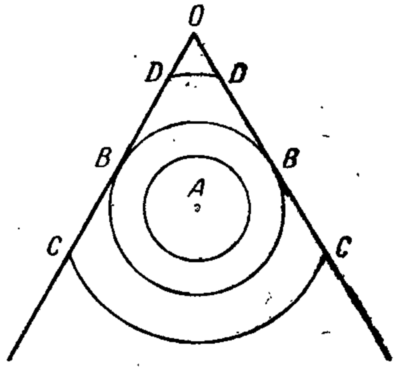
Черт. 10.

Пусть теперь O — произвольная точка такой поверхности. Сколь угодно близко к O имеются конические точки, а через них не проходят кратчайшие. Поэтому, следуя общему рассуждению, проведённому выше, можно заключить, что найдётся точка B_1, которая соединяется с O двумя кратчайшими. Эти две кратчайшие ограничивают на поверхности двуугольник D_1 (черт. 10). И так как множество конических точек всюду плотно, то в этом двуугольнике имеются конические точки сколь угодно близко к точке O. Отсюда можно заключить, что в двуугольнике D_1 найдётся точка B_2, которая соединяется с O двумя кратчайшими. Эти кратчайшие ограничивают двуугольник D_2. Повторяя это рассуждение, получим последовательность вложенных друг в друга двуугольников $D_1, D_2, D_3, \ldots$, сжимающихся к точке O. В направлении из точки O, содержащемся во всех этих двуугольниках, не исходит никакая кратчайшая. Говоря точнее, пусть K — касательный конус к нашей поверхности в точке O. Пусть T_n, T_n' — образующие этого конуса, касающиеся двух кратчайших OB_n, ограничивающих двуугольник D_n, а V_n — ограниченный ими сектор на конусе K. Так как двуугольник D_{n+1} содержится в D_n, что сектор V_{n+1} содержится в секторе V_n. Существует образующая T, содержащаяся во всех секторах V_n, и мы утверждаем, что на нашей поверхности нет кратчайшей, касающейся этой образующей. Если бы такая кратчайшая существовала, то она пересекала бы кратчайшие OB_n и имела бы с ними общие точки помимо O (по крайней мере при больших n). А это невозможно потому, что если две кратчайшие на выпуклой поверхности имеют две общие точки, то эти точки должны быть их общими концами. То же рассуждение применимо к предыдущему примеру. Строгое его обоснование для нас в данный момент несущественно: нас интересует больше наглядная сторона вопроса.

Между прочим, здесь выясняется связь между существованием особых направлений, в которых из точки O не исходит никакая кратчайшая, с одной стороны, и существованием точек, сколь угодно близких к O и соединимых с O двумя кратчайшими. Эту связь можно проследить и в обратном направлении.

Действительно, если из O в направлении T не исходит никакая кратчайшая, то при движении точки X вокруг O кратчайшая OX должна перескакивать через направление T. В момент скачка имеются две кратчайшие OX, ограничивающие двуугольник, содержащий направление T.

С выясненными только что особенностями кратчайших связаны особенности других фигур на выпуклых поверхностях и, в частности, особенности окружности и круга. Прежде всего на выпуклой поверхности могут быть сколь угодно малые круги, не гомеоморфные плоскому кругу. Это явление имеет место на всяком конусе с полным углом, меньшим π. На черт. 11 изображён такой конус, разрезанный по образующей и развёрнутый на плоскость; на нём нарисованы окружности с центром в точке A. С ростом радиуса окружность касается сама себя в точке B, потом распадается на две замкнутые кривые, одна из которых сжимается в вершину конуса и исчезает. Чем ближе точка A к вершине, тем при меньших радиусах появляются эти особенности. В § 6 гл. IX, посвящённом окружности, будет показано, что на выпуклой поверхности могут быть окружности, гомеоморфные любому замкнутому множеству плоской окружности, содержащему хотя бы одну целую дугу. Эти замечания показывают, что нельзя считать тривиальной следующую теорему:



Черт. 11.

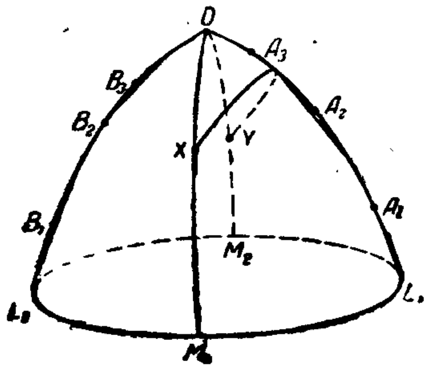
Для каждой точки A на выпуклой поверхности существует такое $r>0$, что всякий круг с центром в точке A и радиусом, меньшим r, гомеоморфен плоскому кругу.

Если из точки A в точку B проходят две кратчайшие, то окружность с центром в точке A, проходящая через B, имеет два радиуса AB. В § 6 гл. IX мы докажем теорему: Пусть B — точка на окружности с центром A и X_n — последовательность точек этой окружности, сходящаяся к B так, что радиусы AX_n сходятся к радиусу AB. Тогда угол между AB и кратчайшими BX_n стремится к прямому. Грубо говоря, это значит, что окружность перпендикулярна к радиусу. Однако в точку B может итти несколько радиусов, и тогда разные дуги окружности, идущие из точки B, перпендикулярны к разным радиусам. Точка B будет угловой точкой окружности. Это явление можно видеть на нашем примере окружности на конусе: на черт. 11 точки C и D — угловые точки окружности. Так как сколь угодно близко к точке A могут существовать точки B, соединимые с A двумя кратчайшими, то даже сколь угодно малые окружности с данным центром могут иметь такие угловые точки.

Отметим ещё одну особенность треугольников на выпуклых поверхностях. На плоскости всякий треугольник, а на регулярной поверхности всякий достаточно малый треугольник — выпуклый, т. е. кратчайшая, соединяющая любые две его точки, содержится в нём. На нерегулярных же выпуклых поверхностях могут существовать сколь угодно малые невыпуклые треугольники. (Для «больших» треугольников это тривиально, потому что если, например, на сфере взять три точки A, B, C, не лежащие на одном большом круге, и соединить их кратчайшими, то сфера разобьётся на два треугольника, из которых один заведомо не будет выпуклым.)

Для построения соответствующего примера будем исходить из веретенообразной поверхности вращения F_0 (черт. 12). Проведём из её полюса O два меридиана OL_1, OL_2, делящих её на два равных сектора. Построим на OL_1 и OL_2 последовательности точек A_1, A_2, ... и B_1, B_2, ... так, что расстояния OA_n и OB_n равны $1/2^n$. Взяв в точках A_{2n} и B_{2n+1} касательные плоскости, сдвинем их несколько внутрь поверхности F_0 и отсечём от F_0 полученные таким образом горбушки, заменив их кусками плоскости. Получится выпуклая поверхность F.

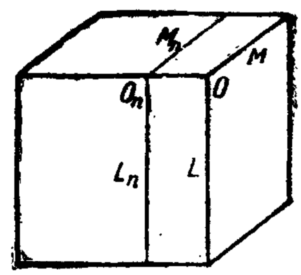
Проведём теперь ещё два меридиана OM_1 и OM_2, делящих углы между OL_1 и OL_2 пополам. Они разобьют поверхность F на два сектора U_1 и U_2; U_1 содержит меридиан OL_1, а U_2 — меридиан OL_2. Пусть A и B — две точки на M_1 и M_2, равноудалённые от полюса O. Я утверждаю, что треугольник OAB всегда будет невыпуклым, как бы точки A и B ни были близко к O. Действительно, возьмём на OA и OB по точке X и Y, равноудалённой от O. Кратчайшая XY не может проходить через полюс O, а проходит в одном из секторов U_1, U_2. Если точки X и Y двигать к полюсу O, то кратчайшая XY будет время от времени перескакивать из сектора U_1 в сектор U_2, и обратно. Действительно, допустим, например, что кратчайшая XY неизменно остаётся в секторе U_1. Тогда, при непрерывном движении точек X и Y она должна пройти через точку A_{2n+1}. Это, однако, невозможно, потому что у точки A_{2n+1} горбушка не срезана, а у точки B_{2n+1} срезана, так что путь от X к Y через A_{2n+1} будет длиннее. Следовательно, треугольник OAB будет невыпуклым, независимо от того, в каком из секторов U_1 и U_2 он содержится.



Черт. 12.

То же явление можно получить на гладкой поверхности. Для этого нужно исходить из гладкой поверхности вращения F_0, через полюс которой не может проходить никакая кратчайшая, а при срезании горбушек края срезов следует загладить.

Указанная особенность треугольников показывает, что нельзя считать, например, тривиальной теорему о том, что всякую замкнутую выпуклую поверхность можно разбить на сколь угодно малые выпуклые треугольники. Доказательство этой теоремы, предлагаемое в § 6 гл. II действительно оказывается довольно сложным.



Черт. 13.

Отметим ещё некоторые особенности угла между кратчайшими. В § 7 уже было показано, что от данной кратчайшей OA не всегда можно отложить угол, равный данному, потому что в соответствующем направлении из точки O может не исходить никакая кратчайшая. Далее, если взять точку X, отличную от A, и непрерывно её перемещать, то угол между кратчайшими OA и OX может изменяться не непрерывно, поскольку самая кратчайшая OX может изменяться не непрерывно. Однако мы докажем (§ 4 гл. IV), что если кратчайшие OX сходятся к некоторой кратчайшей OB, то угол между OX и OA сходится к углу между OB и OA. Вместе с тем, оказывается, что если точки O_n сходятся к O и кратчайшие L_n, M_n, исходящие из O_n, сходятся к кратчайшим L и M, исходящим из O, то углы между L_n и M_n могут не сходиться к углу между L и M. Это явление можно видеть на любом многограннике, например, на кубе (черт. 13). Пусть O — вершина куба, а O_n — точки на его ребре, исходящем из вершины O. Пусть L и M — два других ребра куба, сходящихся в вершине O, а L_n и M_n — отрезки на гранях, параллельные рёбрам L и M, проведённые из точек O_n. Угол между рёбрами L и M равен, очевидно, $\frac{\pi}{2}$, а угол между отрезками L_n и M_n равен π (угол, измеренный на кубе!). Поэтому угол между L_n и M_n заведомо не будет сходиться к углу между L и M. Если же рассматривать последовательность пар кратчайших L_1 и M_1, L и M, L_2 и M_2, L и M и т. д., то углы между ними будут π, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{\pi}{2}$, ... и, следовательно, вовсе не будут стремиться к какому бы то ни было пределу. Условия, при которых сходимость углов, тем не менее, имеет место, будут выяснены в § 4 гл. IV.

§ 11. Теоремы из внутренней геометрии выпуклых поверхностей.

Всё, о чём говорилось выше, относится к основаниям внутренней геометрии выпуклых поверхностей. Теперь мы хотим указать в общих чертах на некоторые отдельные результаты, которые могут быть в ней получены, и выяснить характерные черты этих результатов. Если следовать тому плану, по какому строится элементарная планиметрия, то следует начать с учения о треугольниках. Приведём несколько относящихся сюда теорем.

1. Углы треугольника на выпуклой поверхности не меньше, чем соответствующие углы треугольника на плоскости, имеющего стороны той же длины (теорема 3 § 4 гл. III).

2. Если кривизна внутренней области треугольника, т. е. сумма его углов минус π, равна нулю, то треугольник изометричен плоскому (теорема 3 § 6 гл. V).

3. Если a, b, c — стороны треугольника, ω — кривизна его внутренней области, γ — угол, противолежащий стороне c, и $\pi \geqslant \gamma \geqslant \omega$, то

$$a^2+b^2-2ab\cos\gamma \geqslant c^2 \geqslant a^2+b^2-2ab\cos(\gamma-\omega). \qquad (1)$$

Если же $\gamma < \omega$ (или $> \pi$), то правое (левое) неравенство заменяется тривиальным:

$$c \geqslant |a-b| \qquad (c \leqslant a+b).$$

Эта теорема есть прямое следствие первой. Неравенства (1) оказываются точными в том смысле, что при данных a, b, c, γ, ω найдётся треугольник, и даже треугольник на выпуклом многограннике, для которого c будет сколь угодно близко к левой или к правой части формулы (1).

4. Если σ — площадь треугольника T на выпуклой поверхности, а σ_0 — площадь плоского треугольника T_0 со сторонами той же длины, то $0 \leqslant \sigma - \sigma_0 \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\omega d^2$, где ω — кривизна внутренней области треугольника T, а d — его диаметр. При этом $\sigma = \sigma_0$ тогда и только тогда, когда треугольник T изометричен T_0. (См. § 1 гл. X.)

Список такого рода теорем можно было бы ещё увеличить. Однако общий их характер уже ясен. Можно продолжать сравнение треугольника на выпуклой поверхности с треугольником на плоскости, причём отличие первого от второго будет оцениваться через кривизну внутренней области. Так, например, каждой формуле тригонометрии, связывающей стороны и углы плоского треугольника, можно сопоставить соответствующие неравенства, дающие оценку отклонения треугольника на выпуклой поверхности от такой формулы в зависимости от кривизны его внутренней области. Дело в том, что мы изучаем внутреннюю геометрию не какой-нибудь данной, а произвольной выпуклой поверхности, и уже по одному этому теоремы должны носить преимущественно качественный характер и простые количественные соотношения должны иметь, главным образом, вид неравенств. Точные же соотношения неизбежно должны оказываться по большей части довольно сложными.

Укажем ещё две теоремы в том же духе:

1) В § 10 мы уже упомянули тот факт, что для всякой точки O на выпуклой поверхности F существует такое $r_0 > 0$, что всякая окружность на F с центром в O и радиусом, меньшим r_0, является простой замкнутой кривой. Пусть $r < r_0$, l — длина окружности радиуса r с центром в O, θ — полный угол вокруг точки O, ω — кривизна внутренности соответствующего круга с исключённым центром O. Отношение $\frac{l}{r}$ не возрастает с ростом r и удовлетворяет неравенствам $\theta \geqslant \frac{l}{r} \geqslant \theta - \omega$, причём $l = \theta r$ только тогда, когда круг изометричен кругу на конусе с полным углом θ. (Доказательство даётся в § 6 гл. IX.)

2) Из всех выпуклых поверхностей, ограниченных простой замкнутой кривой данной длины и имеющих данную кривизну, меньшую 2π, наибольшую площадь имеет прямой круговой конус. Эта теорема обобщает известное максимальное свойство круга. (Доказательство даётся в § 3 гл. X.)

Интересные общие задачи внутренней геометрии возникают в теории кривых на выпуклых поверхностях, которой посвящена гл. IX. Примером может служить исследование кривых, ограничивающих выпуклые области, или исследование свойств, геодезических «в целом» на полных поверхностях. Сюда относится, например, такая теорема: если на полной выпуклой поверхности имеется хотя бы одна кривая, бесконечно продолжающаяся в обе стороны и такая, что каждый её отрезок оказывается кратчайшей, то поверхность изометрична плоскости или цилиндру. Эта теорема для случая регулярных поверхностей была доказана С. Э. Кон-Фоссеном в ряду целого ряда прекрасных результатов, относящихся к свойствам геодезических «в целом» на бесконечных полных поверхностях [1]). Представляется заслуживающей внимания, повидимому, не очень трудная задача: перенести результаты Кон-Фоссена на общие полные выпуклые поверхности в той мере, в какой это возможно.

Особый круг теорем внутренней геометрии получается, если рассматривать те выпуклые поверхности, на которых отношение кривизны и площади произвольной области подчинено тем или иным ограничениям (см. гл. XI). На сфере радиуса R это отношение для всех областей равно $\frac{1}{R^2}$. Оказывается, что если на поверхности F это отношение заключено между $\frac{1}{R_1^2}$ и $\frac{1}{R_2^2}$, то внутренние свойства поверхности F оказываются в некоторых отношениях промежуточными между свойствами сфер радиусов R_1 и R_2. В качестве примеров можно привести следующие теоремы, в которых мы предполагаем, что $R_1 \geqslant R_2$ и сферы радиусов R_1 и R_2 обозначаем соответственно S_1 и S_2.

1. Пусть T — треугольник на поверхности F и T_1, T_2 — треугольники на сферах S_1 и S_2, имеющие стороны той же длины. Если α, α_1, α_2 — соответственные углы этих треугольников, то $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$. Если σ, σ_1, σ_2 — их площади, то $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$.

2. Пусть l, l_1, l_2 — длины окружностей одного и того же радиуса на поверхности F и сферах S_1, S_2, а σ, σ_1, σ_2 — площади кругов одного радиуса. Имеют место неравенства $l_1 \geqslant l \geqslant l_2$ и $\sigma_1 \geqslant \sigma \geqslant \sigma_2$.

3. Верхняя граница l длин, на которых геодезическая линия на поверхности F будет кратчайшей в сравнении со сколь угодно близкими к ней кривыми, подчиняется оценкам Боннэ [2]): $\pi R_1 \geqslant l \geqslant \pi R_2$. Здесь πR_1 и πR_2 — длины больших полуокружностей сфер S_1 и S_2, т. е. наибольшие длины кратчайших на них.

Наконец естественно упомянуть и такую теорему. Если отношение кривизны к площади для всех областей поверхности F равно $\frac{1}{R^2}$, то каждая точка на F имеет окрестность, изометричную части сферы радиуса R. Если же F есть к тому же замкнутая выпуклая поверхность, то она сама оказывается сферой радиуса R.

Предел отношения кривизны к площади области, получающейся при стягивании области в какую-нибудь точку X, если он существует, есть гауссова

---

[1]) S. Cohn-Vossen, Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfachzusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken. Матем. сборн. (нов. серия), т. 1 (1936), стр. 139—163. Кон-Фоссен берёт вопрос с чисто внутренней точки зрения, рассматривая плоскость с заданным на ней линейным элементом положительной кривизны. Однако в виду нашей теоремы о реализуемости заданной таким образом метрики нет никакой разницы, говорим ли мы об абстрактной метрике или о полной выпуклой поверхности.

[2]) Для регулярных поверхностей эти оценки были найдены Боннэ в 1855 г. и их можно найти во всяком большом курсе дифференциальной геометрии, например, в «Дифференциальной геометрии» В. Бляшке (§§ 98—100).

кривизна в точке X. На регулярных поверхностях этот предел всегда существует. Вместе с тем, его существование оказывается также достаточным для того, чтобы выпуклая поверхность с точки зрения её внутренней метрики была настолько регулярной, чтобы к ней можно было прилагать основной аппарат гауссовой внутренней геометрии. Именно, имеет место следующая теорема:

Пусть на выпуклой поверхности F отношение кривизны треугольника к его площади всегда стремится к определённому пределу $K(X)$, когда треугольник сжимается к точке X. (Треугольник при этом не обязан содержать эту точку X; предел $K(X)$, конечно, может зависеть от точки X, но он оказывается непрерывной функцией её.) Тогда в окрестности всякой точки O на поверхности F можно ввести геодезические полярные координаты r, φ; метрика поверхности в такой окрестности может быть задана линейным элементом $ds^2 = dr^2 + G\,d\varphi^2$, причём коэффициент G является непрерывной функцией r и φ и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial G}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}$; кроме того, имеет место формула Гаусса для кривизны

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}.$$

Хотя коэффициент G может и не иметь производной $\frac{\partial G}{\partial \varphi}$, но тем не менее можно так преобразовать обычную формулу для геодезической кривизны и дифференциальное уравнение геодезических линий, что они будут применимы в нашей окрестности, где введены координаты r, φ.

Изменив формулировку, эту теорему можно превратить в теорему, дающую определение гауссовой внутренней метрики, заданной линейным элементом, в терминах, не содержащих никакого упоминания о координатах и линейном элементе и притом без предположения о положительности кривизны. Это последнее обстоятельство проистекает из следующего чрезвычайно важного факта. Оказывается, что понятия и методы, о которых мы говорили в применении к выпуклым поверхностям в эвклидовом пространстве, могут быть перенесены почти без изменений на выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского, и для этих поверхностей могут быть получены результаты, совершенно аналогичные тем, которые были формулированы в этой главе для выпуклых поверхностей эвклидова пространства. Например, для этих поверхностей имеет место теорема, совершенно аналогичная теореме А § 9, с той лишь разницей, что в условии 3 этой теоремы следует потребовать, чтобы сумма нижних углов между сторонами треугольника была не меньше суммы углов треугольника со сторонами той же длины в соответствующем пространстве Лобачевского. Отсюда, например, следует, что всякая поверхность, гомеоморфная сфере и имеющая всюду гауссову кривизну, бóльшую некоторого K, может быть погружена в виде выпуклой поверхности в пространство Лобачевского, имеющее кривизну, равную или меньшую K. Таким образом, внутренняя геометрия выпуклых поверхностей пространства Лобачевского охватывает внутреннюю геометрию всех поверхностей, кривизна которых ограничена снизу. Это обобщение нашей теории мы рассмотрим подробнее в последней, XII главе; там же мы, в частности, точно сформулируем общую теорему, которая даёт определение гауссовой внутренней метрики без понятия о координатах и о линейном элементе. Здесь же мы ограничимся только сделанными общими указаниями.

ГЛАВА II.

ОБЩИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ О ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКЕ.

§ 1. Общие теоремы о спрямляемых кривых.

Общие теоремы о спрямляемых, т. е. имеющих конечную длину кривых в произвольном метрическом пространстве, которые будут здесь доказаны, дословно повторяют известные теоремы о кривых в эвклидовом пространстве. Тем не менее полезно провести их доказательство, чтобы действительно убедиться в том, что в этих теоремах не используется ничего, кроме трёх основных свойств всякой метрики [1]) и определения длины.

Прежде всего уточним понятие кривой. Это следует сделать по двум причинам. Во-первых, определение кривой как множества точек, являющегося непрерывным образом прямолинейного отрезка, не годится, потому что при определении длины мы пользуемся некоторым данным параметрическим представлением кривой. Например, прямолинейный отрезок, проходимый дважды: сперва в одном, а потом в другом направлении, имеет длину в два раза бо́льшую, чем тот же отрезок, проходимый один раз. Оказывается полезным считать отрезок, проходимый дважды, за кривую, отличную от отрезка, проходимого один раз. Но, с другой стороны, определять непрерывную кривую как множество точек $X(t)$ с данной определённой параметризацией тоже неудобно, потому что тогда один и тот же прямолинейный отрезок, проходимый с разными скоростями, т. е. так, что одинаковым значениям параметра соответствуют разные точки, будет считаться за две разные кривые, тогда как естественно считать его за одну и ту же кривую. Эти соображения заставляют принять следующее определение того, какие кривые будут считаться одинаковыми, а какие различными.

Пусть R — метрическое пространство с метрикой ρ. Пусть каждому значению параметра t на отрезке $[0,1]$ поставлена в соответствие одна точка $X(t)$ из пространства R так, что при всяком $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(X(t_1) X(t_2)) < \varepsilon$, как только $|t_1 - t_2| < \delta$. Мы получаем непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в пространство R и как результат этого отображения — множество L точек $X(t)$. Допустим, что мы имеем ещё отображение отрезка $[a,b]$ в пространство R: параметр s меняется на отрезке $[a,b]$ и каждому s ставится в соответствие точка $Y(s)$, причём это отображение также непрерывно. Мы считаем, что оба отображения $X(t)$ и $Y(s)$ определяют в R одну и ту же кривую, если выполнено следующее условие: параметр s можно представить как монотонную функцию параметра t: $s = f(t)$ так, что при всяком t $X(t) = Y(f(t))$. Тогда, обратно, параметр t оказывается монотонной функцией параметра s: $t = f^{-1}(s)$ и при всяком s мы будем иметь $Y(s) = X(f^{-1}(s))$. Следовательно, данное определение симметрично; очевидно, что оно также удовлетворяет тре-

---

[1]) Т. е. 1) $\rho(XY) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = Y$, 2) $\rho(XY) = \rho(YX)$, 3) $\rho(XY) + \rho(YZ) \geqslant \rho(XZ)$.

бованиям рефлексивности и транзитивности. Из данного определения следует, что точки $X(t)$ и $Y(s)$ образуют одно и то же множество [1]).

Важно иметь в виду следующее: монотонная функция $s=f(t)$ может на некотором отрезке $[t_1, t_2]$ иметь постоянное значение s_0. При этом точка $X(t)$ остаётся неподвижной и совпадает с $Y(s_0)$, пока t пробегает отрезок $[t_1, t_2]$. Тогда обратная функция $t=f^{-1}(s)$ при $s=s_1$ принимает все значения в промежутке $[t_1, t_2]$. Таким образом, ни одна из функций $f(t)$ и $f^{-1}(s)$ не предполагается однозначной; они предполагаются лишь монотонными, т. е. при $t_1<t_2$ или всегда $f(t_1)\leqslant f(t_2)$, или всегда $f(t_1)\geqslant f(t_2)$, независимо от того, какие значения $f(t_1)$ и $f(t_2)$ мы берём (а таких значений может быть целый отрезок).

Удобно пользоваться кинематическим представлением: когда параметр t растёт от 0 до 1, точка $X(t)$ движется, описывая непрерывно кривую L. Монотонное преобразование параметра сводится к тому, что мы опять пробегаем те же положения точки $X(t)$ либо в той же, либо в противоположной последовательности. Скорость движения может быть произвольной, допускаются даже остановки (параметр меняется, а точка неподвижна). Но поворот нигде не допускается.

Пусть L — кривая в метрическом пространстве с метрикой $\rho(XY)$ и пусть на кривой L мы имеем какой-нибудь параметр $t (0\leqslant t\leqslant 1)$. Тогда кривую L можно обозначить $X(t) (0\leqslant t\leqslant 1)$, считая, что каждому t соответствует точка $X(t)$. Однако ту же самую кривую можно, как было сейчас выяснено, параметризовать бесконечным числом других способов.

Длиной кривой $X(t)$ мы называем точную верхнюю границу сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X(t_{i-1})\, X(t_i)), \tag{1}$$

где $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=1$.

Длина кривой не зависит от выбора параметра на кривой. Действительно, пусть та же кривая представлена как $Y(s)$ $(a\leqslant s\leqslant b)$. Тогда вместо суммы (1) мы будем иметь

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(Y(s_{i-1})\, Y(s_i)),$$

где $s_i=f(t_i)$. По условию, $f(t)$ должна быть монотонной функцией, и раз $t_0<t_1<\ldots<t_n$, то $s_0\leqslant s_1\leqslant\ldots\leqslant s_n$ или, наоборот, $s_0\geqslant s_1\geqslant\ldots\geqslant s_n$. Поэтому, если обобщить несколько сумм (1), допуская в них равные значения параметра, то становится очевидным, что эти суммы будут одни и те же при разных выборах параметров. Следовательно, точная верхняя граница этих сумм, т. е. длина кривой не зависит от выбора параметра [2]).

Вместе с тем очевидно, что, допуская немонотонные преобразования параметра, мы ввели бы другие суммы и могли бы получить уже другое значение длины. Следовательно, длина кривой не зависит от параметризации только в силу наложенного нами условия о монотонности допустимых преобразований параметра.

В дальнейшем речь будет итти о кривых в данном метрическом пространстве R с метрикой ρ, имеющих конечную длину. О таких кривых можно доказать следующие основные предложения:

---

[1]) Предполагается, что функция $f(t)$ отображает весь промежуток изменения t на весь промежуток изменения s.

[2]) Если $t_{i-1}=t_i$, то $X(t_{i-1})=X(t_i)$ и потому $\rho(X(t_{i-1})X(t_i))=0$, т. е. соответствующее слагаемое не играет роли. Поэтому всегда можно считать $t_{i-1}<t_i$. При переходе к другому параметру s одному значению t могут соответствовать, однако, разные значения s. Но им соответствует та же самая точка кривой и потому опять-таки $\rho(Y(s_{i-1})\,Y(s_i))=0$.

Теорема 1. *Если кривая конечной длины разбита на конечное число дуг, то каждая из этих дуг имеет конечную длину и сумма их длин равна длине всей кривой.*

Теорема 2. *Длина $s(t)$ дуги кривой между $X(0)$ и $X(t)$ есть монотонная не убывающая непрерывная функция t.*

Теорема 3. *На кривой можно ввести в качестве параметра длину её дуги, отсчитываемую от точки $X(0)$.*

Говорят, что последовательность кривых L_n сходится к кривой L, если на кривых L_n и L можно так выбрать параметр $t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при $n > N$ для всех t будет $\rho(X_n(t)\,X(t)) < \varepsilon$, где $X_n(t)$ $X(t)$ — точки на кривых L_n и L.

Теорема 4. *Из всякой бесконечной совокупности кривых, лежащих в компактной области и имеющих длины, не превосходящие некоторой данной, можно выбрать сходящуюся последовательность.*

Компактной областью мы называем здесь любое множество, обладающее тем свойством, что всякая бесконечная последовательность его точек имеет в нём точку сгущения.

Теорема 5. *Если кривые L_n сходятся к кривой L, то длина L не больше нижнего предела длин кривых L_n.*

Дадим доказательства всех этих теорем.

Доказательство теоремы 1. Пусть кривая L с концами A и B разбита на две части L_1 и L_2 точкой C. Длина L есть точная верхняя граница сумм вида (1) при произвольном выборе точек $X(t_i)$. При определении же длин её дуг L_1 и L_2 одной из точек деления должна быть точка C, так как она является концом этих дуг. Следовательно, произвол в выборе точек деления в первом случае больше, чем во втором. Поэтому точная верхняя граница сумм (1) в первом случае не может быть меньше, чем во втором случае, и тем самым

$$s(L) \geqslant s(L_1) + s(L_2), \tag{2}$$

где s обозначает длину кривой.

Зададим теперь любое $\varepsilon > 0$ и пусть $X(t_i) = X_i$ — такие точки деления кривой L, при которых сумма (1) отличается от длины $s(L)$ меньше, чем на ε, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X_{i-1}X_i) > s(L) - \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть точка C лежит между точками X_{k-1} и X_k (т. е. значение t, соответствующее C, лежит между t_{k-1} и t_k). В силу неравенства треугольника,

$$\rho(X_{k-1}X_k) \leqslant \rho(X_{k-1}C) + \rho_k(CX_k) \tag{4}$$

и потому

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X_{i-1}X_i) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{k-1} \rho(X_{i-1}X_i) + \rho(X_{k-1}C)\right] + \left[\sum_{i=k+1}^{n} \rho(X_{i-1}X_i) + \rho(X_kC)\right]. \tag{5}$$

Но из определения длины ясно, что суммы, взятые здесь в квадратные скобки, соответственно не больше, чем длина дуги L_1 и длина дуги L_2, так что

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X_{i-1}X_i) \leqslant + s(L_1) + s(L_2). \tag{6}$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (3), мы получаем, что

$$s(L) - \varepsilon \leqslant s(L_1) + s(L_2), \tag{7}$$

и так как ε произвольно, то отсюда следует, что

$$s(L) \leqslant s(L_1) + s(L_2). \tag{8}$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (2), заключаем, что

$$s(L) = s(L_1) + s(L_2). \tag{9}$$

Теорема доказана для разбиения кривой на две дуги. А отсюда легко получить тот же результат при разбиении на любое конечное число дуг.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 ясно, что длина $s(t)$ дуги между точками $X(0)$ и $X(t)$ есть монотонная не убывающая функция t. Поэтому для доказательства непрерывности $s(t)$ достаточно доказать, что при всяком t и $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$s(t + \Delta t) - s(t) < \varepsilon, \tag{10}$$

лишь только $0 < \Delta t < \delta$. (Этим будет доказана непрерывность $s(t)$ справа, т. е., что при $t_i > t$ и $t_i \to t$ $s(t_i) \to s(t)$, но, меняя ролями концы кривой и вводя вместо t параметр $1 - t$, мы точно так же получим непрерывность $s(t)$ слева.)

Допустим, что при некотором $t = T$ указанное свойство не имеет места. Это значит, что существует такое $\varepsilon > 0$, что при сколь угодно малых $\Delta t > 0$ выполняется неравенство

$$s(T + \Delta t) - s(T) \geqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Вследствие монотонности $s(t)$ это неравенство будет выполняться тогда для всех $\Delta t > 0$. Возьмём точки деления $X(t_i) = X_i$ так, чтобы длина кривой $s(L) = s(1)$ отличалась от суммы (1) меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, т. е.

$$s(1) < \sum_{i=1}^{n} \rho(X_{i-1}X_i) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Так как при вставлении новых точек деления сумма расстояний может только возрастать (в силу неравенства треугольника), то, вставив, если нужно, две точки деления, можно будет считать, что имеются две соседние точки деления

$$X_k = X(T), \quad X_{k+1} = X(T + \Delta t),$$

причём Δt выбрано так, что

$$\rho(X_k X_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Это возможно в силу непрерывной зависимости точек $X(t)$ от t.

Кривая разбита на три дуги, соответствующие интервалам $[0, T]$, $[T, T + \Delta t]$, $[T + \Delta t, 1]$. Длины их, вследствие теоремы 1, равны соответственно

$$s(T), \quad s(T + \Delta t) - s(T), \quad s(1) - s(T + \Delta t),$$

и сумма их равна длине $s(1)$ всей кривой. При этом по определению длины

$$s(T) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \rho(X_{i-1}X_i),$$

$$s(1) - s(T + \Delta t) \geqslant \sum_{i=k+2}^{n} \rho(X_{i-1}X_i).$$

Поэтому из неравенства (12) следует, что

$$s(1) < s(T) + \left[s(1) - s(T + \Delta t)\right] + \rho(X_k X_{k+1}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$s(T+\Delta t)-s(T)<\rho(X_kX_{k+1})+\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда, в силу неравенства (13),

$$s(T+\Delta t)-s(T)<\varepsilon.$$

Это неравенство, однако, противоречит неравенству (11), так что неравенство 11 невозможно, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Так как длина $s(t)$ дуги кривой $X(t)$ есть непрерывная функция t, то она принимает все значения от нуля до длины S всей кривой и каждому значению длины дуги s отвечает одна точка: конец дуги такой длины. Поэтому каждому числу s (значению длины дуги) в промежутке $[0, S]$ отвечает одна точка $Y(s)$ на нашей кривой. Вместе с тем из определения длины дуги очевидно, что

$$\rho(Y(s+\Delta s)\,Y(s))\leqslant|\Delta s|,$$

т. е. как только $|\Delta s|$ достаточно мало, так и расстояние между точками $Y(s+\Delta s)$ и $Y(s)$ тоже мало. Это значит, что точка $Y(s)$ непрерывно зависит от s и тем самым $Y(s)$ представляет непрерывную кривую, когда за параметр принята длина дуги. Это будет та же непрерывная кривая $X(t)$, так как $s(t)$ есть монотонная функция, и, следовательно, такое преобразование параметра допустимо.

Доказательство теоремы 4. Пусть в компактной области G имеется последовательность кривых L_n, длины которых меньше S. Вводим на каждой кривой параметр t, равный длине дуги, делённой на длину всей кривой. Тогда каждая кривая L_n представляется как $X_n(t)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. Берём все рациональные значения t и нумеруем их в произвольном порядке: $t_1, t_2, \ldots$ Выбираем из кривых L_n последовательность $L_{11}, L_{12}, \ldots$ так, что точки их, соответствующие значению t_1, сходятся к некоторой точке $X(t_1)$; это возможно вследствие компактности области G. Далее из этой последовательности выбираем последовательность кривых $L_{21}, L_{22}, \ldots$ так, что точки их, соответствующие t_2, сходятся к некоторой точке $X(t_2)$. Так поступаем и далее до бесконечности, после чего берём «диагональную» последовательность $L_{11}, L_{22}, \ldots$, у которой уже для всякого t_i $X_{nn}(t_i)\to X(t_i)$ при $n\to\infty$.

Пусть теперь t — любое значение параметра между нулём и единицей и пусть ε — данное сколь угодно малое положительное число. Возьмём рациональное t_i так, что при всех n

$$\rho(X_{nn}(t_i)\,X_{nn}(t))<\varepsilon. \tag{14}$$

Это возможно. Действительно, если $s_{nn}(t, t_i)$ есть длина дуги кривой L_{nn} между точками $X_{nn}(t)$ и $X_{nn}(t_i)$, то в силу определения длины и выбора параметра t

$$\rho(X_{nn}(t_i)\,X_{nn}(t))\leqslant s_{nn}(t, t_i)=|t-t_i|\,s(L_{nn})<|t-t_i|\,S,$$

где $s(L_{nn})$ — длина кривой L_{nn} (а по условию все $s(L_{nn})<S$). Поэтому стоит лишь взять t_i так, что $|t-t_i|\,S<\varepsilon$, как неравенство (14) будет выполнено.

Далее, возьмём N столь большое, что при $k, m>N$

$$\rho(X_{kk}(t_i)\,X_{mm}(t_i))<\varepsilon. \tag{15}$$

Это возможно, так как точки $X_{nn}(t_i)$ сходятся. Тогда, в силу неравенства треугольника, из (14) и (15) следует, что как только k и $m>N$, так

$$\rho(X_{kk}(t)\,X_{mm}(t))<3\varepsilon.$$

Следовательно, точки $X_{nn}(t)$ образуют фундаментальную последовательность и, в силу компактности рассматриваемой области сходятся к некоторой точке $X(t)$.

Точки $X(t)\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ образуют непрерывную кривую. Действительно, зададим, $\varepsilon > 0$; тогда, вследствие выбора параметра t, при любых t' и t'' таких, что $|t' - t''| < \frac{\varepsilon}{S}$, и при всяком n будет

$$\rho(X_{nn}(t')\,X_{nn}(t'')) < |t' - t''|\,S < \varepsilon.$$

А так как $X_{nn}(t')$ и $X_{nn}(t'')$ сходятся к $X(t')$ и $X(t'')$, то в пределе получим, что

$$\rho(X(t')\,X(t'')) \leqslant |t' - t''|\,S < \varepsilon. \tag{15a}$$

Это означает, что $X(t)$ непрерывно зависит от t и представляет, следовательно непрерывную кривую.

Остаётся показать, что кривые L_{nn} сходятся к этой кривой. Мы показали пока, что $X_{nn}(t) \to X(t)$ при всяком t, но нужно показать, что при всяком $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что как только $n > N$, так при всех t $\rho(X(t)\,X_{nn}(t)) < \varepsilon$. Для доказательства возьмём значения параметра $t_1, t_2, \ldots, t_k$ так, чтобы для всякого t нашлось такое t_i, что $|t - t_i| < \frac{\varepsilon}{3S}$. Так как при всех t_i $X_{nn}(t_i) \to X(t_i)$, то найдётся такое N, что при $n > N$ для всякого i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ будет

$$\rho(X(t_i)\,X_{nn}(t_i)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Пусть теперь t — произвольное значение параметра и t_i таково, что

$$|t - t_i| < \frac{\varepsilon}{3S}. \tag{17}$$

Вследствие неравенства треугольника

$$\rho(X(t)\,X_{nn}(t)) \leqslant \rho(X(t)\,X(t_i)) + \rho(X(t_i)\,X_{nn}(t_i)) + \rho(X_{nn}(t_i)\,X_{nn}(t)).$$

В силу (15 а) и (17)

$$\rho(X(t)\,X(t_i)) < |t - t_i|\,S < \frac{\varepsilon}{3}$$

и точно так же

$$\rho(X_{nn}(t)\,X_{nn}(t_i)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, принимая ещё во внимание (16), имеем $\rho(X(t)\,X_{nn}(t)) < \varepsilon\ (n > N)$, т. е. кривые $X_{nn}(t)$ сходятся к $X(t)$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5. Пусть кривые L_n сходятся к L и пусть $s(L_n)$, $s(L)$ — длины этих кривых, причём

$$S = \varliminf_{n \to \infty} s(L_n) < \infty,$$

т. е. нижний предел длин кривых L_n конечен. Пусть $L_{nn}\ (n = 1, 2, \ldots)$ — такая подпоследовательность последовательности L_n, что

$$\lim_{n \to \infty} s(L_{nn}) = S.$$

Очевидно, кривые L_{nn} также сходятся к L и по определению сходимости на них можно так выбрать параметр t, что $X_{nn}(t) \to X(t)$. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ и пусть ε — произвольное положительное число. Тогда найдётся такое N, что при всяком $n > N$ для всех взятых t_i будет

$$\rho(X_{nn}(t_i)\,X(t_i)) < \frac{\varepsilon}{2m},$$

а тогда в силу неравенства треугольника

$$\rho(X(t_{i-1})\,X(t_i)) \leqslant \rho(X_{nn}(t_{i-1})\,X_{nn}(t_i)) + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2m},$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(X(t_{i-1})X(t_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \rho(X_{nn}(t_{i-1})X_{nn}(t_i)) + \varepsilon.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(X_{nn}(t_{i-1})X_{nn}(t_i)) \leqslant S(L_{nn}),$$

а $s(L_{nn}) < S + \varepsilon$, как только n достаточно велико. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(X(t_{i-1})X(t_i)) < S + 2\varepsilon,$$

а так как ε произвольно, то

$$\sum_{i=1}^{m} \rho(X(t_{i-1})X(t_i)) \leqslant S.$$

Длина кривой L есть точная верхняя граница сумм, стоящих в этом неравенстве слева, поэтому и она не больше S, что и требовалось доказать.

§ 2. Общие теоремы о кратчайших.

Доказываемые свойства кратчайших нужны нам в разных пунктах дальнейшего изложения и здесь они собраны вместе, чтобы потом их можно было считать известными. Речь будет итти о кратчайших в многообразии с любой внутренней метрикой $\rho(XY)$. По определению, кратчайшая есть кривая, имеющая наименьшую длину из всех кривых, соединяющих две данные точки.

Кратчайшую, соединяющую точки X и Y (A и B и т. п.), мы будем обозначать XY (AB и т. п.). Конечно, в произвольном многообразии не всякие две точки можно соединить кратчайшей, и вместе с тем может случиться, что две данные точки X и Y можно соединить несколькими кратчайшими. В таком случае XY будет обозначать любую из этих кратчайших, если только заранее не оговорено противное.

Из определения кратчайших с очевидностью вытекают следующие их свойства:

1. Всякий отрезок кратчайшей есть кратчайшая, так как, заменяя такой отрезок более короткой кривой, мы сократили бы кратчайшую, что невозможно.

2. Кривая, соединяющая две данные точки, будет кратчайшей тогда и только тогда, когда её длина равна расстоянию между этими точками. Это есть прямое следствие того, что во внутренней метрике расстояние есть точная нижняя граница длин кривых.

3. Для того чтобы кратчайшие XY и YZ образовывали вместе кратчайшую XZ, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(XY) + \rho(YZ) = \rho(XZ)$. Это замечание вытекает из того, что длины кратчайших XY и YZ равны $\rho(XY)$ и $\rho(YZ)$, а кривая $XY + YZ$ будет кратчайшей тогда и только тогда, когда её длина равна $\rho(XZ)$.

4. Кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку. Действительно, если s — длина дуги кратчайшей, отсчитываемая от одного из её концов, то, согласно теореме 3 предыдущего параграфа, кратчайшую можно задать как $X(s)$, т. е. её точки непрерывно зависят от s, когда s пробегает все значения от 0 до s, где s — длина всей кратчайшей. Следовательно, мы имеем непрерывное отображение отрезка $[0, s]$ на кратчайшую. Это отображение взаимно однозначно, так как если бы двум значениям s', s'' соответствовала одна и та же точка, то, выбрасывая дугу, соотвествующую интервалу (s', s''), мы сократили

бы кратчайшую, что невозможно. Наконец, в силу указанных выше свойств кратчайшей, для любых двух её точек $X(s')$ и $X(s'')$ $\rho(X(s')X(s''))=|s'-s''|$. Отсюда очевидно, что отображение отрезка $[0, s]$ на кратчайшую взаимно непрерывно.

Теорема 1. *Если последовательность кратчайших сходится, то её предел есть кратчайшая.*

Доказательство. Пусть кратчайшие X_nY_n сходятся к кривой L; точки X_n и Y_n сходятся к концам X и Y этой кривой L (это следует из определения сходимости кривых, данного в предыдущем параграфе). В таком случае

$$\rho(XY)=\lim_{n\to\infty}\rho(X_nY_n).$$

С другой стороны, если $s(L)$ есть длина кривой L, то

$$s(L)\geqslant\rho(XY).$$

Вместе с тем длины кратчайших X_nY_n равны расстояниям $\rho(X_nY_n)$, а по теореме 5 предыдущего параграфа длина предельной кривой не может быть больше предела их длин, т. е.

$$s(L)\leqslant\lim_{n\to\infty}\rho(X_nY_n).$$

Сравнивая полученные формулы, мы видим, что длина кривой L равна расстоянию между её концами и, следовательно, L — кратчайшая.

Теорема 2. *Если в данной компактной области две точки можно соединить кривой конечной длины, то существует кратчайшая в этой области кривая, соединяющая эти две точки.*

Доказательство. Пусть A и B — две точки в компактной области G и пусть s — длина соединяющей их кривой. Пусть, наконец, s_0 — точная нижняя граница длин всех кривых, соединяющих в G точки A и B. Очевидно, $s_0\leqslant s$ и в G существует последовательность кривых L_n, соединяющих A и B, длины которых $s(L_n)$ стремятся к s_0. (В крайнем случае, кривые L_n могут все совпадать.) В силу теоремы 4 § 1, из кривых L_n можно выбрать последовательность, сходящуюся в некоторой кривой L. В силу теоремы 5 § 1, длина кривой L будет не больше нижнего предела длин $s(L_n)$ и тем самым $s(L)\leqslant s_0$; а так как s_0 есть нижняя граница длин всех кривых, соединяющих A и B, то $s(L)=s_0$ и тем самым кривая L — кратчайшая в области G.

Так как замкнутая выпуклая поверхность гомеоморфна сфере, то она компактна. Любые две её точки X и Y можно соединить кривой конечной длины, например, выпуклой кривой, получающейся в сечении поверхности плоскостью, проходящей через точки X и Y. Поэтому, из теоремы 2 следует, что на замкнутой выпуклой поверхности любые две точки можно соединить кратчайшей.

Из теоремы 2 легко вытекает даже более сильное утверждение:

Теорема 3. *Во всяком многообразии с полной внутренней метрикой любые две точки можно соединить кратчайшей.*

Доказательство. Пусть A и B — две точки в многообразии с полной внутренней метрикой $\rho(XY)$. По определению внутренней метрики существует последовательность кривых L_n, соединяющих точки A и B и имеющих длины, сходящиеся к расстоянию $\rho(AB)$. Очевидно, можно считать, что длины всех кривых L_n не больше некоторого s_0. Тогда ясно, что все эти кривые лежат в круге радиуса s_0 с центром в точке A (или B). Но по определению полной метрики всякое ограниченное бесконечное множество в нашем многообразии имеет точки сгущения, откуда ясно, что всякое ограниченное и замкнутое множество компактно. Следовательно, компактным будет также указанный круг. Применяя к нему теорему 2, мы видим, что в нём существует кратчайшая кривая, соединяющая точки A и B. Длина её не больше нижнего предела длин кривых L_n, т. е. не больше $\rho(AB)$. Но кривая, соединяющая точки A и B, не может иметь длину, меньшую, чем $\rho(AB)$. Следовательно, длина нашей кривой равна $\rho(AB)$ и она тем самым является кратчайшей не только во взятом круге, но и во всём многообразии. Этим теорема доказана.

Далее из теоремы 2 вытекает следующая важная теорема.

Теорема 4. *В многообразии с внутренней метрикой в любой окрестности U содержится окрестность V такая, что любые две её точки можно соединить кратчайшей, проходящей целиком в U.*

Доказательство. Пусть O — данная точка в многообразии с внутренней метрикой $\rho(XY)$ и пусть U — заданная её окрестность. У точки O есть окрестность, гомеоморфная кругу, поэтому мы можем взять окрестность U' точки O, содержащуюся в U, гомеоморфную кругу[1]) и такую, что замыкание $\overline{U'}$ этой окрестности, гомеоморфное кругу вместе с его границей, также содержится в U.

Пусть r_0 — точная нижняя граница расстояний от точки O до точек, лежащих вне $\overline{U'}$. Из определения окрестности ясно, что $r_0 > 0$. Возьмём геодезический круг V с центром в точке O и радиусом

$$r = \frac{r_0 - \varepsilon}{2}, \tag{1}$$

где ε — любое число между нулём и r_0. Если точки X и Y лежат в круге V, то $\rho(OX)$, $\rho(OY) \leqslant r$ и в силу неравенства треугольника и равенства (1),

$$\rho(XY) \leqslant \rho(OX) + \rho(OY) \leqslant 2r = r_0 - \varepsilon. \tag{2}$$

По определению внутренней метрики существует кривая L, соединяющая точки X и Y, с длиной $s(L)$, отличающейся от расстояния между этими точками меньше чем на ε:

$$s(L) < \rho(XY) + \varepsilon. \tag{3}$$

Если точка Z лежит на кривой L, то согласно самому определению длины

$$s(L) \geqslant \rho(XZ) + \rho(ZY). \tag{4}$$

Сравнивая неравенства (4), (3), (2), мы получаем, что

$$\rho(XZ) + \rho(ZY) < r_0. \tag{5}$$

Если бы точка Z лежала вне $\overline{U'}$, то, по определению числа r_0, мы имели бы

$$\rho(OZ) \geqslant r_0, \tag{6}$$

и так как $\rho(OX) \leqslant r = \frac{r_0 - \varepsilon}{2}$, то из (6) и из неравенства треугольника следовало бы, что

$$\rho(XZ) \geqslant \rho(OZ) - \rho(OX) \geqslant r_0 - r = \frac{r_0 + \varepsilon}{2}, \tag{7}$$

и по той же причине

$$\rho(YZ) \geqslant \frac{r_0 + \varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Складывая неравенства (7) и (8), мы получили бы, что

$$\rho(XZ) + \rho(YZ) \geqslant r_0 + \varepsilon,$$

что противоречит неравенству (5). Следовательно, у кривой L, длина которой удовлетворяет неравенству (3), никакая точка не может лежать вне $\overline{U'}$.

---

[1]) Пересечение двух окрестностей есть снова окрестность. Поэтому пересечение U с окрестностью, гомеоморфной кругу, будет окрестностью; вместе с тем оно будет, очевидно, содержать окрестность, гомеоморфную кругу.

Так как метрика — внутренняя, то существует последовательность кривых L_n, соединяющих X и Y и имеющих длины, сходящиеся к $\rho(XY)$; можно считать, что все они удовлетворяют неравенству (3). В таком случае мы показали, что эти кривые будут лежать в $\overline{U}'$. Так как множество $\overline{U}'$ гомеоморфно замкнутому кругу, то оно компактно и потому из кривых L_n можно выбрать сходящуюся последовательность (в силу теоремы 4 § 1). Предельная кривая L будет соединять точки X и Y и будет иметь длину, не бо́льшую предела длин кривых L_n (в силу теоремы 5 § 1), т. е. в силу выбора кривых L_n, её длина будет не больше, чем $\rho(XY)$. Но так как расстояние есть точная нижняя граница длин кривых, то длина кривой L должна быть равна $\rho(XY)$, т. е. кривая L — кратчайшая. Она лежит в $\overline{U}'$ и тем более в исходной окрестности U. Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 4, между прочим, следует, что если мы имеем непрерывную кривую $X(t)$, то, беря на ней точки $X(t_i)$ достаточно густо, мы сможем соединить их кратчайшими и получим тогда ломаную, составленную из кратчайших, — «геодезическую ломаную», вписанную в кривую $X(t)$. Длина этой ломаной будет равна $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(X(t_{i-1})X(t_i))$, так как длина каждой кратчайшей равна расстоянию. Поэтому можно сказать, что длина кривой есть точная верхняя граница длин вписанных геодезических ломаных. Можно, конечно, обычным путём доказать, что она есть предел длин этих ломаных при условии, что наибольший диаметр дуг между точками $X(t_{i-1})$ и $X(t_i)$ стремится к нулю.

Теорема 5. *Пусть из многообразия R_0 с внутренней метрикой $\rho_0(XY)$ выделено многообразие R (т. е. любая область из R_0). Тогда в R однозначно индуцируется внутренняя метрика $\rho(XY)$, совпадающая с метрикой $\rho_0(XY)$ в достаточно малой окрестности любой точки, принадлежащей R.*

Прежде всего следует определить, что значит, что в R «индуцируется» метрика. Смысл этого термина следующий. Пусть X и Y — любые две точки из R. Берём все кривые, соединяющие X и Y и расположенные в R. Определяем длины этих кривых, пользуясь данной в R_0 метрикой ρ_0. Далее берём точную нижнюю границу длин этих кривых, и она-то и принимается за расстояние $\rho(XY)$ в R между точками X и Y.

Данное определение аналогично определению внутренней метрики на поверхности. Если вспомнить это определение, то видно, что внутренняя метрика поверхности есть та внутренняя метрика, которая индуцируется на поверхности метрикой окружающего пространства.

Докажем теорему 5. Пусть A и B — две точки из R. Так как R, по условию, есть многообразие, то в нём существует непрерывная кривая L, соединяющая точки A и B. По теореме 4 каждую точку кривой L можно окружить окрестностью, любые две точки которой можно соединить кратчайшей. Так как R есть открытое множество в R_0, то у каждой его точки есть окрестность, полностью ему принадлежащая. Поэтому мы можем взять окрестности точек кривой L лежащими в R и ещё столь малыми, что кратчайшие, соединяющие точки одной окрестности, не выходят за пределы R. Это возможно в силу теоремы 4. Из совокупности всех построенных окрестностей мы можем выбрать конечное число окрестностей, покрывающих всю кривую L. Соединяя кратчайшими точки кривой L, лежащие в одной окрестности[1]), мы получим тогда новую кривую, соединяющую точки A и B. Так как эта кривая составлена из конечного числа кратчайших, то она имеет длину. Следовательно, точки A и B можно соединить в R кривой конечной длины и потому существует точная нижняя

[1]) Пусть X_k, X_{k+1} — центры последовательных окрестностей U_k, U_{k+1} на кривой L. Пусть Y_k — общая точка этих окрестностей. Мы соединяем кратчайшими X_k с Y_k и Y_k с X_{k+1}.

граница длин таких кривых. Её мы принимаем за расстояние $\rho(AB)$ в R между точками A и B.

Из определения длины легко заключить, что эта метрика обладает всеми тремя основными свойствами. То, что она является внутренней, доказывается посредством рассуждения, проведённого в § 6 гл. I. Именно, так же, как там, мы доказываем, что длины кривых в R, определённые посредством метрики ρ_0 и метрики ρ, равны. Поэтому расстояние $\rho(XY)$ в R оказывается точной нижней границей длин кривых также при определении длины посредством метрики ρ в R вместо исходной метрики ρ_0.

Для любых двух точек A и B из R

$$\rho(AB) \geqslant \rho_0(AB).$$

Действительно, $\rho(AB)$ есть точная нижняя граница длин кривых, лежащих в R, а $\rho_0(AB)$ — такая же граница длин кривых, лежащих во всём R_0. Вторых кривых больше, а потому точная нижняя граница их длин не превосходит точной нижней границы длин только тех кривых, которые проходят в R.

Пусть теперь O — любая точка из R. По теореме 4 во всякой её окрестности U можно взять такую окрестность V, две точки которой можно соединить кратчайшей, лежащей в U. Окрестность U мы берём так, чтобы она лежала целиком в R, а кратчайшую мы берём в исходной метрике ρ_0. Длина кратчайшей AB, соединяющей точки A и B, равна $\rho_0(AB)$. А так как длины кривых в метриках ρ и ρ_0 совпадают, то длина $s(AB)$ кратчайшей AB в метрике ρ будет та же самая, т. е.

$$S(AB) = \rho_0(AB).$$

Расстояние $\rho(AB)$ есть точная нижняя граница длин кривых, соединяющих A с B, и потому

$$\rho(AB) \leqslant s(AB) = \rho_0(AB).$$

Но так как всегда

$$\rho(AB) \geqslant \rho_0(AB),$$

то $\rho(AB) = \rho_0(AB)$, т. е. метрики ρ и ρ_0 в малой окрестности точки O совпадают. Ясно, что в R может быть только одна внутренняя метрика, обладающая этим свойством, потому что длина кривой определяется через расстояния между её точками, сколь угодно близкими друг к другу. Тем самым теорема полностью доказана.

На полной выпуклой поверхности существует внутренняя метрика, так как любые две точки этой поверхности можно соединить кривой конечной длины: именно, выпуклой кривой, получающейся в сечении этой поверхности плоскостью. Теперь из теоремы 5 следует, что всякая выпуклая поверхность также имеет внутреннюю метрику и что в малой окрестности любой точки эта метрика одна и та же на полной поверхности и на данной области, содержащей эту точку. Таким образом, мы приходим к тем же выводам, какие были получены в гл. I иным путём.

Теорема 6. *Если в замкнутой области G многообразия с внутренней метрикой, граница которой состоит из конечного числа кратчайших, имеется кратчайшая в этой области кривая*[1], *то эта кривая будет или геодезической или геодезической ломаной с вершинами в вершинах области G, т. е. она будет состоять из конечного числа геодезических, имеющих последовательно общие концы в некоторых вершинах области G. Не исключено, конечно, что она вовсе не проходит через вершины области.*

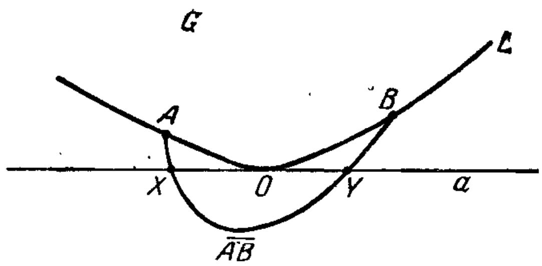
---

[1] Т. е. кривая, лежащая в G и являющаяся самой короткой из всех кривых, лежащих в G и соединяющих две данные точки.

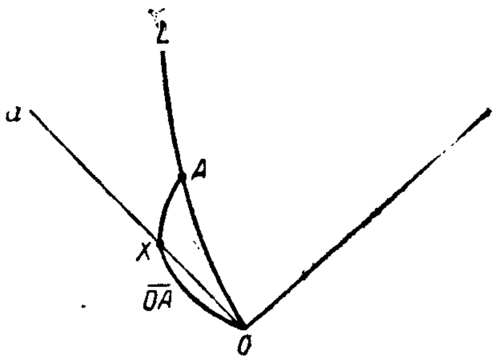
Доказательство. Пусть L — линия, кратчайшая в области G, граница которой состоит из конечного числа кратчайших. Эти кратчайшие мы назовём сторонами G, а точки их соединения — вершинами G.

Пусть O — точка на L, лежащая внутри G. Тогда у точки O есть окрестность U, лежащая в G. По теореме 4 мы можем взять окрестность V точки O, содержащуюся в U, так, что любые две её точки можно соединить кратчайшей, лежащей в U и тем самым в G. Если бы отрезок кривой L, лежащий в V, не был бы кратчайшей, то мы могли бы, по свойству окрестности V, заменить его кратчайшей, лежащей в G. Тем самым мы сократили бы линию L, что невозможно, так как она — кратчайшая в G. Следовательно, всякая точка кривой L, лежащая внутри области G, содержится в отрезке кривой L, являющемся кратчайшей линией.

Пусть теперь O — точка на кривой L, лежащая внутри стороны a области G (черт. 14). Возьмём около точки O столь малую окрестность U, чтобы она не пересекала никаких других сторон области G. В этой окрестности мы берём



Черт. 14.



Черт. 15.

опять окрестность V так, чтобы любые две её точки можно было соединить кратчайшей, лежащей в U. Возьмём точки A и B на кривой L, лежащие в окрестности V, так, чтобы дуга AB кривой L содержала точку O. Если дуга AB кривой L не есть кратчайшая, то заменим её кратчайшей $\overline{AB}$. Она будет проходить в U, но может и не проходить в G и тогда она будет пересекать сторону a. Пусть, например, X и Y — две последовательные точки пересечения кратчайшей $\overline{AB}$ со стороной a. Так как $\overline{AB}$ и a — обе кратчайшие, то их отрезки $\overline{XY}$ и XY — также кратчайшие. Поэтому они имеют одинаковую длину, и, заменяя отрезок $\overline{XY}$ линии $\overline{AB}$ отрезком XY стороны a, мы получим линию той же длины. Произведя все такие замены, мы получим кратчайшую, соединяющую точки A и B и проходящую в области G (внутри её или на границе). Так как, по условию, линию L нельзя сократить, т. е. заменить более короткой и также лежащей в G, то, значит, на отрезке AB она должна иметь ту же длину, что эта кратчайшая. Следовательно, всякая точка кривой L, лежащая внутри стороны области G, содержится в отрезке этой кривой, являющемся кратчайшей линией.

Пусть теперь точка O кривой L является вершиной области G (черт. 15). Мы берём окрестность U точки O, не пересекающую никаких сторон области G, кроме тех, которые сходятся в точке O. В этой окрестности мы опять берём окрестность V, любые две точки которой можно соединить кратчайшей, лежащей в U. Пусть A — точка на L, лежащая в окрестности V. Если отрезок OA линии L не есть кратчайшая, то мы опять проводим кратчайшую $\overline{OA}$. Если $\overline{OA}$ проходит в G, то мы заменяем отрезок OA линии L кратчайшей $\overline{OA}$. Если же кратчайшая $\overline{OA}$ не проходит в области G, то она пересекает её стороны и притом, очевидно, только те, которые сходятся в O. Пусть, например,

X — точка пересечения линии $\overline{OA}$ со стороной a. Так как a — кратчайшая и подходит к точке O, то отрезок $\overline{OX}$ линии $\overline{OA}$ можно заменить отрезком OX стороны a. Так как линию L нельзя сократить, то её отрезок между O и X не может быть короче отрезка OX стороны a. Следовательно, на отрезке OX L — кратчайшая.

Отсюда следует, что если точка O кривой L есть вершина области G, то каждая ветвь кривой L, исходящая из O, является на достаточно малом отрезке кратчайшей линией.

Из всего доказанного следует, что если линия L вовсе не проходит через вершины, то каждая её точка содержится в дуге, являющейся кратчайшей, т. е. L — геодезическая. Если же L проходит через вершины, то между двумя последовательно лежащими на ней вершинами она геодезическая, а так как вершин конечное число, то тем самым L — геодезическая ломаная, что и требовалось доказать.

§ 3. Условие неналегания кратчайших.

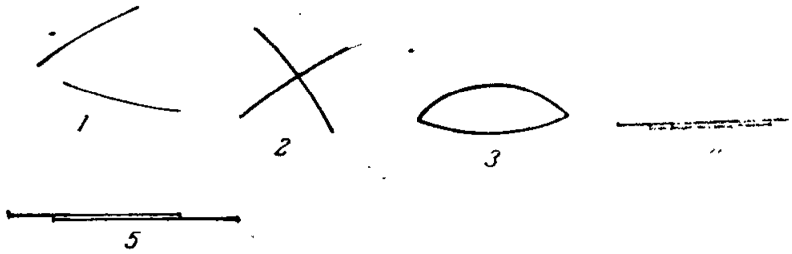
Введём следующее требование, которое мы называем условием неналегания кратчайших: *Если две кратчайшие AB и AC, соединяющие точку A с точками B и c, совпадают на некотором отрезке AD, то одна из них содержится в другой.* Говоря менее точно: две существенно различные кратчайшие, исходящие из одной точки, не могут налегать ни на каком отрезке; эта формулировка объясняет смысл названия данного условия.

Рассмотрим для иллюстрации конус K с полным углом при вершине, бо́льшим 2π. Проведём на нём из его вершины O три кратчайшие, т. е. три отрезка, образующих OA, OB, OC так, чтобы углы, которые образует OA с OB и OC, были равны π. В таком случае линии $AO+OB$, $AO+OC$ будут, как легко видеть, кратчайшими, соединяющими точку A с точками B и C. На отрезке AO они совпадают, а дальше расходятся. Следовательно, на конусе, у которого полный угол при вершине больше 2π, условие неналегания кратчайших не выполняется. Легко убедиться в том, что, напротив, на конусе с полным углом при вершине, не большем 2π, это условие выполняется. Отсюда следует, что оно выполняется во всякой многогранной метрике положительной кривизны. Впрочем, это утверждение мы докажем в § 2 гл. III; здесь же оно приведено лишь для иллюстрации. Точно так же в § 4 гл. III будет доказано, что условие неналегания кратчайших выполняется на всякой выпуклой поверхноси. Таким образом фактически нас будут интересовать только многообразия с внутренней метрикой, удовлетворяющей этому условию. Заметим ещё, что оно заведомо выполняется на всякой регулярной поверхности, потому что там кратчайшие определяются дифференциальными уравнениями, допускающими единственные решения при данных начальных условиях. Следовательно, условие неналегания кратчайших имеет довольно общее значение; вместе с тем содержание его очень просто. Поэтому и представляется естественным особо его формулировать и выяснить те следствия, которые из него можно извлечь. Мы будем пользоваться этими следствиями на протяжении всей книги. Дальше предполагается, что речь идёт о кратчайших в многообразии, в котором наше условие выполняется.

Теорема. *Для взаимного расположения двух кратчайших имеются только следующие возможности* (черт. 11): 1) *Они не имеют общих точек.* 2) *Они имеют только одну общую точку.* 3) *Они имеют только две общие точки и тогда эти точки суть их общие концы.* 4) *Одна из кратчайших содержится в другой.* 5) *Кратчайшие совпадают на некотором отрезке, один конец которого является концом одной из них, а другой конец — концом другой, и этот отрезок содержит все их общие точки* (черт. 16).

Доказательство. Очевидно, нужно доказать, что если две кратчайшие AB и CD имеют две общие точки, из которых хотя бы одна не есть их общий конец, то имеет место одна из двух последних возможностей. Поэтому, допустим, что кратчайшие AB и CD имеют общие точки X и Y, причём X не является концом кратчайшей AB. Для определённости будем считать, что точка X принадлежит отрезку AY кратчайшей AB и отрезку $\overline{CY}$ кратчайшей CD (черт. 17). Отрезки кратчайшей CD мы будем отмечать чертой наверху.

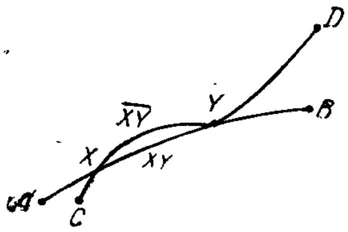
Отрезок $\overline{XY}$ кратчайшей CD равен по длине отрезку XY кратчайшей AB, потому что оба эти отрезка являются кратчайшими между точками X и Y.



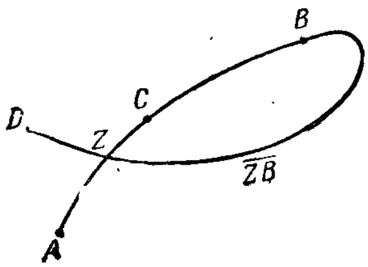
Черт. 16.

Поэтому линия $AX + \overline{XY}$ — кратчайшая между точками A и Y. Таким образом, между этими точками есть две кратчайшие AY и $AX + \overline{XY}$. Они совпадают на отрезке AX и так как к тому же они имеют общие концы, то, по условию неналегания кратчайших, они должны совпадать полностью. Следовательно, на отрезке XY наши кратчайшие AB и CD совпадают.

Рассмотрим теперь отрезки AY и $\overline{CY}$ наших кратчайших AB и CD. По условию они содержат точку X и, следовательно, совпадают на отрезке XY. В таком случае по условию неналегания один из них содержится в другом. Совершенно по той же причине один из отрезков BX и $\overline{DX}$ кратчайших AB и CD содержится в другом. Следовательно, возможны два случая: 1) $\overline{CY}$



Черт. 17.



Черт. 18.

содержится в AY и $\overline{DX}$ содержится в BX, и тогда, очевидно, CD содержится в AB; или, наоборот, AY и BX содержатся в $\overline{CY}$ и $\overline{DX}$ и тогда AB содержится в CD. 2) $\overline{CY}$ содержится в AY и BX содержится в $\overline{DX}$, и тогда AB и CD совпадают на отрезке CB, или, наоборот, AY содержится в $\overline{CY}$, а $\overline{DX}$ — в BX, и тогда AB и CD совпадают на отрезке AD.

Остаётся доказать, что если, например, AB и CD совпадают на отрезке BC, то этот отрезок содержит все их общие точки. Допустим, однако, что они имеют ещё какую-то общую точку Z, не принадлежащую отрезку BC (черт. 18). Тогда мы получим две кратчайшие AB и $AZ + \overline{ZB}$, совпадающие на отрезке AZ. Так как концы у них общие, то по условию неналегания они должны совпадать. Это приводит к тому, что кратчайшая CD должна была бы налегать сама на себя на отрезке $\overline{CB}$, а это, конечно, невозможно. Следовательно, отрезок CB содержит все общие точки кратчайших AB и CD. Теорема полностью доказана.

Эта теорема показывает, что при соблюдении условия неналегания две кратчайшие в смысле их взаимного расположения ведут себя подобно дугам больших кругов на сфере.

Отметим некоторые очевидные следствия этой теоремы:

1. Если из двух точек X и Y кратчайшей L хотя бы одна — внутренняя, то отрезок XY этой кратчайшей есть единственная кратчайшая между точками X и Y.

2. Если три точки A, B, C не лежат на одной кратчайшей, то кратчайшие AB, AC, BC не имеют общих точек, кроме концов. Поэтому в области, гомеоморфной кругу, они ограничивают область, также гомеоморфную кругу, т. е. обыкновенный треугольник.

3. Конечное число кратчайших можно разбить на конечное число отрезков не имеющих общих точек, кроме концов. Для двух кратчайших это утверждение непосредственно следует из теоремы. А для любого числа их оно доказывается с помощью той же теоремы очевидным рассуждением по индукции. Это заключение особенно важно при рассмотрении пересечений многоугольников; из него следует, что два или вообще конечное число многоугольников образуют в своём пересечении опять-таки только конечное число многоугольников.

4. *Пусть C — внутренняя точка кратчайшей AB и пусть точки A_n, C_n сходятся соответственно к A и C. Тогда кратчайшие A_nC_n (если они существуют) могут сходиться только к отрезку AC кратчайшей AB.* Действительно, предел AC кратчайших A_nC_n (если он существует) есть кратчайшая и если бы он не совпадал с AC, то мы имели бы две разные кратчайшие, соединяющие точки A и C, а это противоречило бы первому из указанных следствий теоремы.

Заметим, что нетрудно доказать гораздо более сильное предложение: *Пусть C — внутренняя точка кратчайшей AB и пусть точки A_n, C_n сходятся соответственно к A и C. Тогда, по крайней мере при достаточно больших n, кратчайшие A_nC_n существуют и сходятся к отрезку AC кратчайшей AB.* (Без условия неналегания в многообразии с неполной метрикой не обеспечены ни существование, ни сходимость кратчайших A_nC_n.) Эту теорему мы оставим, однако, без доказательства, потому что в дальнейшем можно обойтись без неё.

Полученные здесь результаты значительно упрощают рассуждения, связанные с кратчайшими, в тех многообразиях, где выполняется условие неналегания. Ввиду простоты этих результатов мы будем ими часто пользоваться без специальных ссылок. В следующих параграфах мы выведем более глубокие следствия условий неналегания кратчайших, которые понадобятся нам впервые только в гл. V и в особенности в главах VII и IX. Поэтому читатель, желающий скорее перейти к конкретному изучению выпуклых поверхностей, может пока пропустить три оставшихся параграфа данной главы.

§ 4. Выпуклая окрестность.

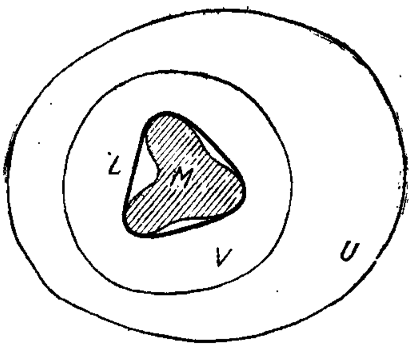
Множество точек в многообразии с внутренней метрикой мы называем выпуклым, если любые две его точки можно соединить содержащейся в нём кратчайшей. Пусть G — открытое связное множество в многообразии R_0 с внутренней метрикой ρ_0. По теореме 5 § 2 метрика ρ_0 индуцирует в G новую внутреннюю метрику ρ : $\rho(XY)$ есть точная нижняя граница длин кривых, лежащих в G и соединяющих точки X и Y, причём длина измеряется в метрике ρ_0. Тогда для всяких X и Y из G $\rho(XY) \geqslant \rho_0(XY)$. Если G выпукло, то точки X и Y можно соединить в G линией, кратчайшей в смысле метрики ρ_0; длина этой линии равна $\rho_0(XY)$. Но $\rho(XY)$, по определению, не больше длины линии, соединяющей в G точки X и Y, и тем самым $\rho(XY) \leqslant \rho_0(XY)$. Следовательно, $\rho(XY) = \rho_0(XY)$, т. е. метрика, индуцируемая в выпуклом множестве, совпадает с исходной; вырезая выпуклое множество из многообразия, мы не меняем расстояний между точками этого множества.

В этом параграфе мы докажем следующую теорему: *Если в многообразии с внутренней метрикой выполняется условие неналегания кратчайших, то каждая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся выпуклым многоугольником, гомеоморфным кругу.*

Значение этой теоремы ясно из только что выясненного свойства выпуклых множеств. Ограничиваясь выпуклой окрестностью U точки O, мы не изменим метрики в этой окрестности, если вовсе исключим из рассмотрения остальную часть многообразия. Кроме того, в U каждые две точки можно соединить кратчайшей. Поэтому при всех рассуждениях «в малом» оказывается особенно удобным пользоваться выпуклой окрестностью.

Доказательство указанной теоремы основано в первую очередь на следующей общей лемме. Будем говорить, что замкнутая кривая L охватывает некоторую область M в области U, если её нельзя стянуть в точку, оставаясь в области U и не пересекая области M [1]).

Лемма 1. *Пусть в многообразии с внутренней метрикой имеются две области U и V, гомеоморфные кругу, причём V содержится в U и обладает тем свойством, что любые две её точки можно соединить кратчайшей, проходящей в области U. Пусть в V имеются связная область M и замкнутая кривая L, охватывающая M, и кратчайшая из всех кривых, лежащих в U и охватывающих M. Тогда замкнутая область, ограниченная кривой L, выпукла и гомеоморфна кругу. Если, к тому же, область M является геодезическим многоугольником, то L есть геодезическая ломаная и, следовательно, ограниченная ею область есть многоугольник. Вершины ломаной L могут лежать только в вершинах многоугольника M. (В частности, L может и вовсе не иметь вершин, будучи замкнутой геодезической.)* (Черт. 19.)



Черт. 19.

Доказательство. Допустим, что кривая L, удовлетворяющая условиям леммы, имеет двойную точку A. Тогда кривую L можно разложить на две замкнутые кривые L_1 и L_2. Если ни L_1, ни L_2 не охватывают область M, то их можно стянуть в точку A, не пересекая M и оставляя A на месте [2]) и тем самым стянуть всю кривую в точку A. Но так как L охватывает M, то это невозможно, и потому одна из кривых L_1 или L_2 охватывает M. Но в таком случае другую кривую можно исключить, причём получится кривая, более короткая, чем L [3]), а это невозможно, так как по условию L — кратчайшая из всех кривых, охватывающих M. Следовательно, L не имеет двойных точек и тем самым ограничивает область, гомеоморфную кругу.

---

[1]) Замкнутая кривая есть непрерывный образ окружности. Две замкнутые кривые $X(t)$ и $Y(s)$ считаются одинаковыми, если существует такое монотонное отображение окружности t на окружность $s: s = s(t)$, что $X(t) = Y(s(t))$. Следовательно, понятие замкнутой кривой отлично от понятия кривой с совпадающими концами тем, что на последней фиксирована точка, являющаяся её совпадающими концами. Говорят, что замкнутая кривая $X_0(t)$ деформируется в замкнутую кривую $X_1(t)$ в области U, если задана функция $X(t, s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, где 1) $X(t, s) \in U$ при всех t и s, 2) $X(t, s)$ образуют замкнутую кривую при всяком s, 3) $X(t, s)$ непрерывно зависит от t и s, 4) $X(t, 0) = X_0(t)$ и $X(t, 1) = X_1(t)$. Если $X_1(t)$ сводится к одной точке, то говорят, что кривая $X_0(t)$ стягивается в точку.

[2]) Легко доказать то известное свойство, что если кривую можно стянуть в точку, то её можно стянуть в любую её собственную точку, оставляя эту точку на месте.

[3]) Исключение составит случай, когда та из кривых L_1, L_2, которая не охватывает M, вырождается в точку. Это, однако, можно исключить, приняв за параметр на L длину дуги, что возможно, поскольку L по условию имеет длину.

Пусть теперь A и B — две точки в области, ограниченной кривой L. Кратчайшая AB по условию существует, так как L лежит в V, а V гомеоморфна кругу, так что и вся область, ограниченная L, лежит в V. Если кратчайшая AB не проходит в области, ограниченной L, то она выходит из неё и далее входит в неё обратно, пересекая L в точках C и D так, что отрезок CD лежит вне L. Тогда, заменяя одну из дуг $\overset{\frown}{CD}$ кривой L отрезком CD кратчайшей AB, мы получим опять кривую, охватывающую M [1]). При этом мы не должны получить кривую, более короткую, чем L. Поэтому дуга $\overset{\frown}{CD}$ сама должна быть кратчайшей. Применяя то же рассуждение ко всем отрезкам кратчайшей AB, лежащим вне области, ограниченной кривой L, мы придём к тому, что точки A и B можно соединить кратчайшей, лежащей в указанной области или на её границе. Этим выпуклость рассматриваемой области с границей доказана.

Остаётся доказать, что если область M есть геодезический многоугольник, то кривая L является геодезической ломаной. В § 2 было доказано (теорема 6), что линия, являющаяся кратчайшей в геодезическом многоугольнике, представляет геодезическую ломаную с вершинами в вершинах многоугольника. Применим эту теорему к области N, внешней по отношению к M. Возьмём на L две точки A и B, делящие L на две части одинаковой длины. Если бы оба отрезка AB кривой L не были кратчайшими в N, то, заменяя один из них линией более короткой, мы получили бы кривую, также охватывающую M, но более короткую, чем L. Однако L — самая короткая из кривых, охватывающих M. Поэтому её отрезки AB — кратчайшие в N, и, в силу указанной леммы, они являются геодезическими ломаными. Следовательно, L также является геодезической ломаной. Вершины её, как следует из упомянутой теоремы 6 § 2, могут лежать только в вершинах многоугольника M.

Основываясь на доказанной лемме, нетрудно получить результат, по существу более общий, чем теорема, высказанная в начале параграфа; сама эта теорема окажется затем следствием этого результата в силу одной леммы, которая будет доказана ниже:

Теорема 1. *Пусть в многообразии R с внутренней метрикой ρ точку O можно окружить сколь угодно малым многоугольником со сколь угодно малым периметром* [2]). *Тогда точку O можно окружить таким же, т. е. тоже сколь угодно малым и имеющим сколь угодно малый периметр выпуклым многоугольником.*

Доказательство. Возьмём около точки O окрестность U, гомеоморфную замкнутому кругу, и в ней окрестность V, тоже гомеоморфную кругу и такую, что любые две её точки можно соединить кратчайшей, лежащей в U (см. теорему 4 § 2). Пусть l — точная нижняя граница длин кривых, проходящих в U, имеющих хотя бы одну точку вне или на границе окрестности V и охватывающих точку O, т. е. таких, которые нельзя стянуть в точку, не пере-

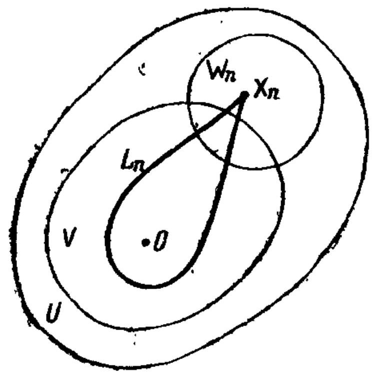
---

[1]) Отрезок CD и каждая из дуг $\overset{\frown}{CD}$ образуют замкнутые кривые без кратных точек. Поэтому они ограничивают области, гомеоморфные кругу. Одна из этих областей содержит всю область, ограниченную кривой L. Кратчайшая AB может пересекать L во многих точках, и мы берём в качестве C и D любую пару точек, соседних на L, в которых AB выходит из области, ограниченной L.

[2]) То, что многоугольник P окружает O, означает, что он является окрестностью O. В многообразии с внутренней метрикой всякую точку можно окружить сколь угодно малым многоугольником. Достаточно вписать многоугольник в какую-нибудь замкнутую кривую, ограничивающую малую окрестность точки O. Возможность во всякую кривую вписать ломаную доказана в § 2. Но из того, что многоугольник P мал, вовсе ещё не следует, что мал его периметр. Рассмотрим, например, метрику, определённую в круге радиуса 1 посредством линейного элемента $ds^2 = dr^2 + d\varphi^2$. Центр такого круга нельзя окружить многоугольником с периметром, меньшим 2π. Такая метрика получается при отождествлении всех точек основания цилиндра.

секая точку O и оставаясь в U. (В частности, такая кривая может проходить через O.) Эта нижняя граница существует и положительна.

Действительно, на границе V существует точка A, ближайшая к O. Кратчайшая AO существует в силу выбора окрестности V и, очевидно, лежит в U. Если считать эту кратчайшую дважды покрытой, то она превращается в замкнутую кривую, охватывающую точку O и имеющую на границе V точку A. Следовательно, рассматриваемые нами кривые существуют, и точная нижняя граница l их длин не больше удвоенной длины кратчайшей AO. Допустим, однако, что $l=0$. Это значит, что существует такая последовательность точек X_1, $X_2, \ldots$, лежащих в U вне или на границе V, что через каждую точку X_n проходит кривая L_n, охватывающая точку O и имеющая длину l_n, причём $l_n \to 0$, когда $n \to \infty$ (черт. 20). Можно, очевидно, считать, что точки X_n сходятся к некоторой точке X. У каждой точки X_n есть окрестность W_n, гомеоморфная кругу и не содержащая точку O. Пусть r_n — «радиус» такой окрестности, т. е. точная нижняя граница расстояния от X_n до точек, лежащих вне W_n. Из самого определения окрестности ясно, что $r_n > 0$. Если кривая, проходящая через точку X_n, имеет длину $< r_n$, то как ясно из определения r_n, эта кривая лежит в окрестности W_n. А так как W_n гомеоморфна кругу и не содержит точки O, то такую кривую можно стянуть в точку X_n, не пересекая точку O, т. е. такая кривая длины $< r_n$ не может охватывать O. Следовательно, кривые L_n необходимо должны иметь длины $\geqslant r_n$, т. е. $l_n \geqslant r_n$.



Черт. 20.

Пусть теперь r — «радиус» окрестности W точки X, предельной для точек X_n, причём W не содержит O и гомеоморфна кругу. Пусть m столь велико, что при $n > m$ расстояние от X_n до X меньше $\frac{r}{2}$. Тогда у точек X_n при $n > m$ можно взять окрестность W_n «радиуса», равного $r_n = \frac{r}{2}$. Тем самым мы получим такие окрестности W_n, что r_n не стремятся к нулю. Но $l_n \geqslant r_n$ и значит l_n тоже не стремятся к нулю. Следовательно, наше предположение, что $l=0$, неверно, т. е. $l > 0$.

Возьмём теперь геодезический многоугольник P, содержащий внутри себя точку O, лежащий в окрестности V и имеющий периметр, меньший l. По условию теоремы такой многоугольник существует. Рассмотрим все кривые, лежащие в U, охватывающие этот многоугольник и имеющие длину $< l$. Граница самого многоугольника P является, очевидно, такой кривой и, следовательно, такие кривые существуют. Так как окрестность U гомеоморфна замкнутому кругу, то она компактна и потому, в силу теоремы 4 § 1, из всех рассматриваемых кривых можно выбрать сходящуюся последовательность. В силу теоремы 5 § 1 это можно сделать так, чтобы длина предельной кривой L была равна точной нижней границе длин всех рассматриваемых кривых. Кривая L, следовательно, будет кратчайшей из всех кривых, охватывающих многоугольник P, и её длина будет меньше l. (То, что предельная кривая также охватывает P, доказывается просто.)

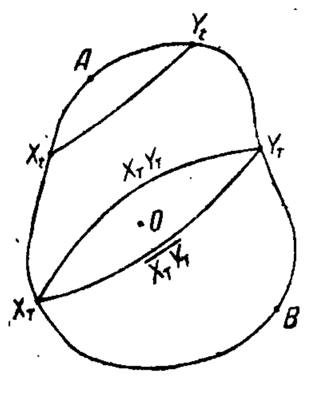
Так как многоугольник P содержит точку O, то кривая L также охватывает точку O. Число l есть точная нижняя граница длин кривых, имеющих точки вне V и охватывающих O. Так как длина L меньше l, то кривая L не имеет точек вне V, т. е. она целиком лежит в V. Мы имеем, следовательно, окрестность U, гомеоморфную кругу, и в ней другую окрестность V, тоже гомеоморфную кругу и такую, что любые две её точки можно соединить кратчайшей, проходящей в U. Далее мы имеем в V геодезический многоугольник P

и охватывающую его кривую L, проходящую в V, кратчайшую из всех охватывающих его кривых, проходящих в U. Следовательно, мы находимся в условиях леммы 1 и, применяя эту лемму, видим, что кривая L ограничивает выпуклый геодезический многоугольник. Так как точка O лежит внутри него, то он является её окрестностью. Теорема доказана.

Докажем теперь лемму, которая в соединении с теоремой 1 сразу приводит к теореме, высказанной в начале параграфа.

Лемма 2. *Если в многообразии R с внутренней метрикой выполняется условие неналегания кратчайших, то каждая точка такого многообразия имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся треугольником.*

Доказательство. Пусть O — данная точка многообразия R. У точки O есть окрестность U, гомеоморфная кругу. Поэтому O можно окружить простой замкнутой кривой L так, чтобы она ограничивала вокруг O сколь угодно малую окрестность. Возьмём на кривой L две точки A и B. Кривая L разобьётся на две дуги AB. Каждую из этих дуг мы представим в параметрическом виде $X_t = X(t)$, $Y_t = Y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; когда t растёт от 0 до 1, точки X_t и Y_t пробегают каждая свою дугу AB от точки A до точки B (черт. 21). Если кривая L проходит достаточно близко к точке O то при всяком t существует кратчайшая X_tY_t, проходящая в окрестности U. Рассмотрим отдельно две возможности, которые представляются для этих кратчайших:



Черт. 21.

1. Существует кратчайшая X_tY_t, проходящая через точку O.

2. Такой кратчайшей не существует [1]).

Предположим сначала, что имеет место вторая возможность. Пусть M_t — замкнутая кривая, образованная кратчайшей X_tY_t и дугами AX_t, AY_t кривой L. Когда t мало, точки X_t, Y_t лежат достаточно близко к точке A и кривую M_t можно стянуть в точку, не пересекая O. Пусть T — точная верхняя граница тех t, при которых это возможно. Если t близко к 1, то точки X_t, Y_t лежат вблизи точки B и тогда лиинию M_t нельзя стянуть в точку, не пересекая O (и оставаясь, конечно, в пределах окрестности U). Следовательно, $T > 0$ и < 1, а потому точки X_T и Y_T различны.

Возьмём последовательность значений $t_n < T$ и сходящихся к T, так что кривые M_{t_n} можно стянуть в точку, не пересекая O. Из кратчайших $X_{tn}Y_{t_n}$ можно выбрать сходящуюся последовательность и предел её будет некоторой кратчайшей X_TY_T. Соответственно мы будем иметь кривую M_T, составленную из этой кратчайшей и дуг AX_T, AY_T кривой L. Так как все кривые M_{tn} можно стянуть в точку A, не пересекая O, то предельную кривую M_T нельзя было бы стянуть в точку, не пересекая O только в том случае, если бы сама эта кривая проходила через точку O. Это, однако, невозможно, потому что, по предположению, кратчайшая X_TY_T не может проходить через точку O. Следовательно, кривую M_T можно стянуть в точку, не пересекая O.

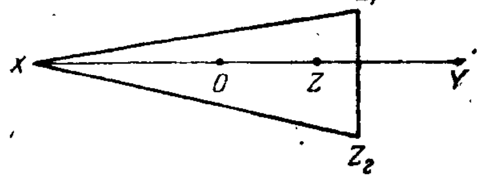
Возьмём, с другой стороны, последовательность значений $t_n' > T$ и сходящихся к T. Выберем из кратчайших $X_{t_n'}Y_{t_n'}$ сходящуюся последовательность; предел её будет некоторой кратчайшей $\overline{X_TY_T}$, соединяющей точки X_T, Y_T. Соответственно мы будем иметь кривую $\overline{M_T}$, составленную из этой кратчайшей и дуг AX_T, AY_T кривой L. По определению числа T ни одну кривую $M_{t_n'}$ нельзя

[1]) Вторая возможность имеет место, например, в том случае, если точка O есть вершина выпуклого конуса.

стянуть в точку, не пересекая O. Поэтому предельную кривую $\overline{M_T}$ также нельзя стянуть в точку, не пересекая O.

Кривые M_T и $\overline{M_T}$ составлены из одних и тех же дуг кривой L и кратчайших X_TY_T и $\overline{X_TY_T}$. Так как M_T можно стянуть в точку, не пересекая O, а $\overline{M_T}$ — нельзя, то эти кратчайшие различны. Они образуют двуугольник D с вершинами X_T и Y_T, и так как, по условию, ни одна из указанных кратчайших не может переходить через точку O, то двуугольник D содержит точку O внутри. Действительно, иначе мы могли бы деформировать кратчайшую $\overline{X_TY_T}$ в X_TY_T, не пересекая O; тем самым кривая $\overline{M_T}$ была бы деформирована в M_T и её можно было бы стянуть в точку A, не пересекая O, что, как показано, невозможно.

Итак, мы получили двуугольник D, содержащий точку O внутри. Взяв на одной из его сторон любую точку Z, мы превращаем его в треугольник X_TY_TZ. Следовательно, треугольник, содержащий внутри себя точку O, существует.



Черт. 22.

Остаётся разобрать тот случай, когда среди кратчайших X_tY_t имеются проходящие через точку O. Пусть XY — одна из таких кратчайших (черт. 22). Возьмём на ней точку Z, лежащую между O и Y. Кратчайшая XY гомеоморфна прямолинейному отрезку, а потому она делит все не лежащие на ней точки, близкие к точке Z, на два класса: точки одного класса лежат с одной стороны от кратчайшей XY, а другие — с другой[1]). Пусть Z_1 и Z_2 — две точки, близкие к точке Z и лежащие по разные стороны от кратчайшей XY. Так как в нашем многообразии выполняется условие неналегания кратчайших, то кратчайшие XZ_1 и XZ_2 при Z_1 и Z_2, сходящихся к Z, будут сходиться к отрезку XZ кратчайшей XY. Следовательно, при Z_1, и Z_2, достаточно близких к Z, эти кратчайшие будут проходить по разные стороны от кратчайшей XY и вместе с кратчайшей Z_1Z_2 ограничат треугольник, содержащий внутри точку O. Лемма доказана.

Теперь мы легко докажем теорему, формулированную в начале параграфа:

Теорема 2. *Если в многообразии с внутренней метрикой выполняется условие неналегания кратчайших, то каждая точка такого многообразия имеет сколь угодно малую окрестность, являющуюся выпуклым геодезическим треугольником.*

Доказательство. Пусть O — данная точка многообразия, удовлетворяющего условиям теоремы. По лемме 2 точку O можно заключить внутрь сколь угодно малого треугольника ABC. По «неравенству треугольника» длина каждой стороны этого треугольника не больше суммы расстояний её концов от точки O; например, $\rho(AB) \leqslant \rho(AO) + \rho(BO)$. Следовательно, если треугольник ABC достаточно мал, то и периметр его тоже достаточно мал. А тогда, в силу теоремы 1, существует заключающий его достаточно малый выпуклый многоугольник. Вершины этого многоугольника P могут лежать только в вершинах треугольника ABC, как это следует из леммы 1, поэтому многоугольник P не может иметь более трёх вершин. Если нужно, какие угодно точки на его границе можно принять за вершины и превратить его, таким образом, в геодезический треугольник. Конечно, а приори стороны такого треугольника могут и не быть кратчайшими; поэтому, согласно принятой нами терминологии, мы называем его «геодезическим» треугольником. Каждую геодезическую можно разбить на конечное число кратчайших; считая каждую такую кратчайшую за сторону, мы превратим геодезический треугольник в многоугольник, стороны которого кратчайшие.

---

[1]) Кратчайшую XY вместе с некоторой её окрестностью можно гомеоморфно отобразить на плоскость так, чтобы она перешла в прямолинейный отрезок. Тогда понятия «с одной и с другой стороны от кратчайшей XY» приобретают ясный смысл для точек, лежащих достаточно близко к внутренним точкам этой кратчайшей.

§ 5. Общие свойства выпуклых областей.

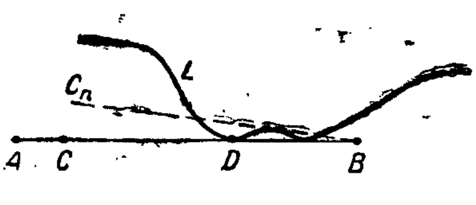
Пусть R — какое-нибудь многообразие с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию неналегания кратчайших. Под выпуклой областью мы будем понимать здесь множество точек многообразия R, обладающее следующими свойствами: 1) оно выпукло, 2) компактно, 3) имеет внутренние точки, 4) граница его состоит не более чем из конечного числа простых замкнутых кривых.

Выпуклым многоугольником мы будем называть выпуклую область, граница которой состоит не более чем из конечного числа кратчайших; в частности, эта выпуклая область может вовсе не иметь границы, и тогда она простирается на всё многообразие, которое тем самым оказывается компактным. Обратно, всякое компактное многообразие есть выпуклый «многоугольник», так как, в силу теоремы 1 § 2, любые две его точки можно соединить кратчайшей.

Свойства выпуклых областей, которые мы здесь докажем, совершенно аналогичны известным свойствам выпуклых областей на плоскости. Однако полезно иметь в виду, что не только в абстрактном многообразии с внутренней метрикой, но и на выпуклой поверхности любые выпуклые множества не обладают, вообще говоря, такими хорошими свойствами. Например, пересечение двух выпуклых множеств может не быть выпуклым. Так, кратчайшая есть, очевидно, выпуклое множество, но пересечение двух разных кратчайших, соединяющих две данные точки, состоит из этих двух точек и, следовательно, не выпукло. В § 10 гл. I было показано, что на выпуклой поверхности могут быть точки, через которые не проходит ни одна кратчайшая. Поэтому, выбрасывая из выпуклого множества такие точки, мы снова получаем выпуклое множество. Там же, в § 10 гл. I, было отмечено, что на замкнутой выпуклой поверхности множество таких точек может быть всюду плотным, и, выбрасывая их, мы получаем выпуклое множество, очень мало похожее на выпуклые множества на плоскости.

Теорема 1. *Если точки A и B принадлежат выпуклой области G, причём точка A лежит внутри G, то всякая кратчайшая AB проходит целиком внутри области G (исключая, конечно, точку B, если она лежит на границе области).*

Доказательство. Пусть точка A лежит внутри выпуклой области G, а точка B — внутри или на границе G. Допустим, что точки A и B можно соединить кратчайшей AB, проходящей отчасти вне G. Возьмём внутри этой кратчайшей точку C, столь близкую к A, что она также лежит внутри G. Тогда, вследствие условия неналегания кратчайших, отрезок CB нашей кратчайшей будет единственной кратчайшей между точками C и B. Но он не лежит целиком в G, в то время как точки C и B принадлежат G, т. е. мы получаем противоречие с выпуклостью области G. Следовательно, всякая кратчайшая AB проходит в G.



Черт. 23.

Допустим теперь, что внутри кратчайшей AB есть точка D, лежащая на границе области G. D лежит на одной из конечного числа кривых, из которых, по предположению, составлена граница G; пусть это будет кривая L. Так как кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку, то для наглядности мы отобразим её вместе с некоторой окрестностью в плоскость так, чтобы она перешла в прямолинейный отрезок (черт. 23). Кривая L также отобразится в плоскость, по крайней мере, в некоторой окрестности точки D.

Возьмём точку C внутри кратчайшей AB между точками A и D так, чтобы она лежала внутри области G. Тогда отрезок CB нашей кратчайшей будет единственной кратчайшей между точками C и B и если последовательность точек C_n сходится к C, то кратчайшие C_nB сходятся к CB. (Следствие 4 теоремы § 3.) Если точки C_n не лежат на AB, но расположены к C ближе, чем

A, то кратчайшие C_nB не могут пересекать AB. Действительно, если бы C_nB и AB пересекались, то они имели бы общие внутренние точки. Отсюда, на основании следствий, выведенных в § 3 из условия неналегания кратчайших, мы заключаем, что они должны были бы налегать друг на друга, что исключено, если C_n не лежит на AB и вместе с тем лежит ближе к C, чем точка A. Следовательно, как только точка C_n достаточно близка к C, кратчайшая C_nB проходит вблизи AB и не пересекает AB, т. е. проходит по одну сторону от AB. Поэтому, если взять такую точку C_n по ту же сторону от AB, по какую лежит кривая L, то C_nB пересечёт L. Это, однако, невозможно, так как L разбивает окрестность кратчайшей AB на две части, одна из которых не принадлежит G, а C_nB должна проходить в G, так как C_n лежит внутри G. Следовательно, на AB не может быть точек, лежащих на границе области G, кроме, может быть, точки B.

Из теоремы 1 очевидно следует, что внутренность всякой выпуклой области выпукла, и всякая кратчайшая, соединяющая её точки, проходит в ней.

Теорема 2. *Если пересечение двух выпуклых областей имеет внутренние точки, то оно выпукло.*

Доказательство. Пусть G_1 и G_2 — две выпуклые области и G — их общая часть. Пусть точка A лежит внутри G, а точка B — внутри или на границе G. Точка A лежит внутри как G_1, так и G_2 и, следовательно, по теореме 1, всякая кратчайшая AB проходит внутри как G_1, так и G_2, т. е. проходит внутри G. Отсюда следует, что любая точка B из G есть предел внутренних точек, а именно, точек, лежащих на кратчайшей AB.

Пусть теперь A и B — любые две точки из G. Пусть точки A_n и B_n, лежащие внутри G, сходятся соответственно к A и B. Кратчайшие A_nB_n, как это следует из только что доказанного, будут проходить в G. Так как G_1 и G_2 компактны, то G тоже компактно и, следовательно, в G существует предел кратчайших A_nB_n. (Точнее, из этих кратчайших можно выбрать последовательность, сходящуюся к кривой, лежащей в G.) Этот предел, по теореме 1 § 2, будет кратчайшей, соединяющей точки A и B.

Теорема 3. *Если пересечение двух выпуклых многоугольников имеет внутренние точки, то оно есть выпуклый многоугольник.*

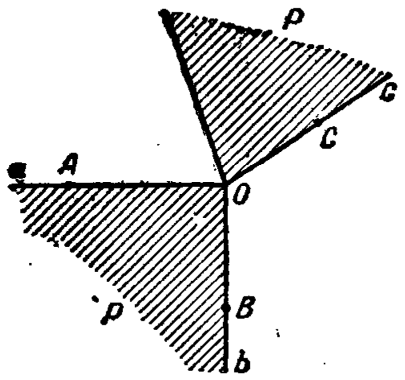
Доказательство. Выпуклый многоугольник характеризуется следующими свойствами: 1) он выпуклый, 2) имеет внутренние точки, 3) компактен, 4) граница его состоит не более, чем из конечного числа кратчайших. Если пересечение P двух выпуклых многоугольников P_1 и P_2 имеет внутренние точки, то тем самым оно обладает вторым свойством. Выпуклость его следует тогда из теоремы 2. Компактность очевидна. Наконец, граница P слагается из части границы P_1, лежащей в P_2, и части границы P_2, лежащей в P_1. Границы P_1 и P_2 состоят из конечного числа кратчайших. Вследствие условия неналегания кратчайших, две кратчайшие или налегают одна на другую, или имеют не более двух общих точек. Поэтому число отрезков кратчайших, ограничивающих P_1 (или P_2) и лежащих в P_2 (или в P_1), конечно. Следовательно, P обладает также четвёртым свойством.

Теорема 4. *Если кратчайшая, проходящая в выпуклой области, разбивает её, то каждая из частей области будет выпуклой,* причём это верно вне зависимости от условия неналегания кратчайших.

Доказательство. Пусть H — одна из частей, на которые область G разбивается кратчайшей L. К H мы присоединяем также самое L. Пусть A и B — две точки из H и AB — соединяющая их кратчайшая, лежащая в G. Тогда, если AB имеет точки вне H, то она должна переходить из H в $G - H$ (т. е. в дополнение H) и должна обратно возвращаться в H. Но так как H и $G - H$ разделены кратчайшей L, то AB должна пересекать L по крайней мере дважды. Пусть X и Y — две наиболее удалённые друг от друга точки, общие у AB с L. Так как L — кратчайшая, то, заменяя отрезок XY линии AB таким же отрезком линии L, мы снова получим кратчайшую, соединяющую точки A и B. И так как линию L мы присоединили к H, то полученная кратчайшая будет проходить в H. Следовательно, H выпукло.

Теорема 4а. *Если кратчайшая, проходящая в выпуклом многоугольнике, разбивает его, то каждая часть многоугольника есть выпуклый многоугольник.*

Доказательство, очевидно, следует из теоремы 4 и соображений, применённых в доказательстве теоремы 3.



Черт. 24.

Теорема 5. *Граница выпуклого многоугольника (и всякой выпуклой области) не имеет кратных точек.*

Доказательство. Если в вершине O многоугольника P сходится более двух его сторон, то к O подходят по крайней мере два угла многоугольника P. Пусть стороны a, b, c сходятся в O, причём a и b принадлежат одному углу, а c — другому (черт. 24). Возьмём на сторонах a, b, c по точке A, B, C. Если эти точки достаточно близки к O, то кратчайшие AC и BC, переходя из одного угла в другой, неизбежно проходят через точку O. Следовательно, они имеют не только общий конец C, но и общую внутреннюю точку O и на основании теоремы 1 § 2 они налегают друг на друга. Но так как точки A и O, B и O лежат соответственно на кратчайших a и b, то по той же причине AC идёт вдоль a, а BC идёт вдоль b. Следовательно, стороны a и b должны налегать друг на друга, и так как это невозможно, то теорема доказана.

§ 6. Триангуляция.

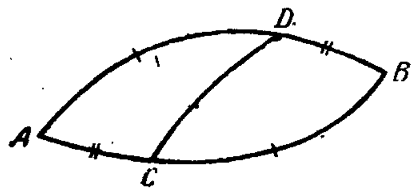
В этом параграфе мы докажем, что всякий многоугольник в многообразии с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию неналегания кратчайших, можно разбить на сколь угодно малые треугольники. «Разбить многоугольник P на сколь угодно малые треугольники» — значит представить многоугольник P как сумму конечного числа таких треугольников, не имеющих попарно общих внутренних точек, диаметры которых меньше произвольно заданного положительного числа. Напомним, что многоугольником мы называем такое компактное множество, содержащее внутренние точки, граница которого состоит из не более чем конечного числа кратчайших, называемых сторонами многоугольника; в частности, «многоугольник» может вовсе не иметь границы, и тогда он простирается на всё многообразие, которое в этом случае оказывается компактным. Следовательно, в указанной теореме заключается также возможность разбить всякое такое многообразие на сколь угодно малые треугольники.

Эта теорема имеет совершенно фундаментальное значение для нашей теории, потому что на ней основан метод приближения к данной метрике многогранными метриками, описанный в общих чертах в § 5 гл. I. На этой же теореме основано также определение площади, которое было дано в § 7 гл. I. К сожалению, мы не имеем достаточно простого доказательства этой важной теоремы, хотя она и кажется довольно очевидной. В нашем доказательстве мы будем опираться на результаты §§ 3—5 и на ряд лемм, которые будут сейчас последовательно доказаны. В дальнейшем мы без особых оговорок будем иметь в виду, что все наши рассуждения относятся к некоторому данному многообразию с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию неналегания кратчайших.

Лемма 1. *Выпуклый многоугольник, гомеоморфный кругу, можно разбить на выпуклые треугольники, у каждого из которых сумма любых двух сторон строго больше третьей.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вершины данного выпуклого многоугольника Q, гомеоморфного кругу, перенумерованные в порядке их расположения на его границе. Если две соседние стороны, например, A_1A_2 и A_2A_3 образуют вместе одну кратчайшую, то мы исключим вершину A_2, объединив эти стороны в одну. Поэтому можно заранее предположить, что никакие две соседние стороны нашего многоугольника не образуют вместе одну кратчайшую.

Многоугольник Q имеет, конечно, не менее двух вершин. Если Q имеет ровно три вершины, то он уже является треугольником. Если Q имеет только две вершины, то, приняв за вершину ещё одну произвольную точку на его границе, мы превратим его в треугольник. Если же Q имеет более трёх вершин, то его вершины A_1 и A_3, разделённые вершиной A_2, не будут соседними. Так как многоугольник Q выпуклый, то в нём можно провести кратчайшую A_1A_3. По теореме 1 предыдущего параграфа эта кратчайшая либо проходит внутри Q, либо лежит на его границе. Последнее, однако, исключено, потому что, по условию выбора вершин A_i, отрезок границы многоугольника Q между двумя не соседними вершинами не является кратчайшей. Следовательно, A_1A_3 проходит внутри Q и по теореме 4а § 5 разбивает его на два выпуклых многоугольника, из которых один есть треугольник $A_1A_2A_3$. Если другой многоугольник ещё имеет более трёх вершин, то мы проделываем с ним ту же операцию и т. д.



Черт. 25.

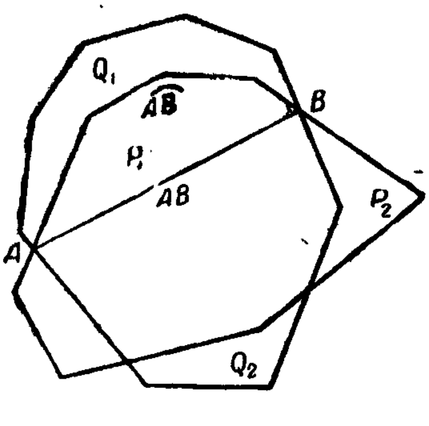
Таким образом, мы разобьём многоугольник Q на выпуклые треугольники, ограниченные кратчайшими. Однако в полученном разбиении могут быть вообще говоря, такие треугольники, у которых сумма двух каких-нибудь сторон равна третьей (ни одна сторона не может быть больше суммы других, так как она кратчайшая). В частности, если многоугольник Q имеет только две вершины A_1 и A_2, то, принимая за вершину какую-то точку A_3 на его стороне, мы получаем треугольник, у которого сумма сторон A_1A_3, A_2A_3 равна стороне A_1A_2. Пусть ABC — какой-нибудь треугольник, у которого сумма двух сторон равна третьей: $AC+CB=AB$ (черт. 25). Так как AB — кратчайшая, то, следовательно, $AC+CB$ — тоже кратчайшая. Возьмём на стороне AB точку D так, чтобы $AD=BC$ и, следовательно, $AC=BD$, и проведём в треугольнике ABC кратчайшую CD. Возможны два случая: 1) либо $CD<AD+AC=BD+BC$, 2) либо $CD=AD+AC=BD+BC$.

В первом случае кратчайшая CD не может проходить целиком по границе треугольника ABC и, следовательно, согласно теореме 1 § 5, будет проходить целиком внутри него. Тогда она разбивает этот треугольник на два: ACD и BCD. У обоих этих треугольников сумма любых двух сторон больше третьей. Действительно: 1) $CD<AD+AC$ по предположению; 2) если бы, скажем, было $AC=AD+CD$, то $AD+CD$ было бы кратчайшей, исходящей из точки A и имеющей с кратчайшей AB общую точку D; но так как D лежит внутри AB, то в силу условия неналегания кратчайших это невозможно; следовательно, $AC<AD+CD$. Точно так же получается, что $AD<AC+CD$ и что аналогичные неравенства имеют место для треугольника BCD.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $CD=AD+AC=BD+BC$. Так как CD — кратчайшая, то $DB+BC$ — тоже кратчайшая. Возьмём на стороне AB точку E между точками D и B. Так как AB — кратчайшая, то AE — тоже кратчайшая. Далее, так как $DB+BC$ — кратчайшая, то $EC=EB+BC$ — тоже кратчайшая. Наконец, AC — кратчайшая по условию. Поэтому, приняв точку E за вершину вместо точки B, мы получаем треугольник AEC с кратчайшими сторонами, совпадающий с треугольником ABC. У этого треугольника сумма любых двух сторон меньше третьей. Например, по выбору точки E, $EC<DB+BC$, но $DB+BC=AC+AD<AC+AE$ и, следовательно, $EC<AC+AE$.

Столь же просто доказывается, что $AC < CE + AE$ и $AE < AC + CE$. Следовательно, во втором случае достаточно вершину заменить другой. Таким образом, лемма доказана.

Когда многоугольник разбит на выпуклые треугольники, то каждый из этих треугольников можно разбить на более мелкие, соединяя, например, друг с другом середины сторон каждого треугольника. Можно доказать, что таким путём мы действительно придём к разбиению на сколь угодно малые треугольники. Но в лемме 1 возможность разбиения на выпуклые треугольники установлена только для выпуклых многоугольников, гомеоморфных кругу. А это недостаточно для наших целей: нам будет, например, особенно важно разбиение многоугольника, гомеоморфного сфере. Поэтому задача состоит в том, чтобы путём покрытия данного многоугольника малыми выпуклыми многоугольниками без общих внутренних точек обеспечить возможность применения леммы 1. Решение этой задачи подготавливается тремя леммами о выпуклых многоугольниках, которые мы докажем. В этих леммах речь идёт о выпуклых многоугольниках, расположенных в некоторой данной области, гомеоморфной кругу.



Черт. 26.

Лемма 2. *Фигуру, составленную из двух выпуклых гомеоморфных кругу многоугольников P и Q, можно разбить на конечное число выпуклых многоугольников, также гомеоморфных кругу, не имеющих попарно общих внутренних точек и таких, что один из них содержится в P, а все остальные — в Q.* Исключение представляет тривиальный случай, когда сам P содержится в Q.

Доказательство. Пусть P и Q — два гомеоморфных кругу выпуклых многоугольника. Если они не имеют общих внутренних точек, или один из них содержится в другом, то утверждение леммы очевидно. Допустим поэтому, что P и Q имеют общие внутренние точки и ни один из них не содержится в другом. Тогда часть границы каждого из них оказывается внутри другого. (Это следует из того, что P и Q, по сделанному выше предположению, расположены в области, гомеоморфной кругу [1].)

Пусть граница многоугольника P пересекает границу многоугольника Q в точках A и B и на отрезке $\widehat{AB}$ между ними проходит внутри Q (черт. 26). Точки A и B принадлежат одновременно P и Q, а так как, согласно теореме 2 предыдущего параграфа, пересечение P и Q выпукло, то существует кратчайшая AB, проходящая как в P, так и в Q. Проведём эту кратчайшую AB. Докажем следующее: *Кратчайшая AB отсекает от фигуры $P+Q$, составленной из P и Q, многоугольник Q_1, содержащийся в Q. Оставшаяся фигура либо будет многоугольником, содержащимся в P, либо будет состоять из двух многоугольников P_2 и Q_2, содержащихся соответственно в P и в Q. При этом число отрезков границы P_2, проходящих внутри Q_2, будет меньше, чем число отрезков границы P внутри Q (именно, отрезок AB исключается). Все упомянутые многоугольники подразумеваются выпуклыми и гомеоморфными кругу.*

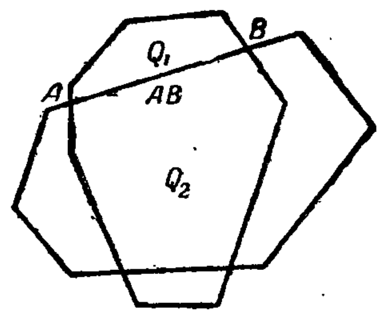
Если взглянуть на чертёж, то это утверждение становится совершенно очевидным. Прежде чем дать его доказательство, покажем, как из него следует наша лемма.

Если фигура, оставшаяся после отсечения многоугольника Q_1, есть многоугольник, содержащийся в P, то лемма доказана. Если же после отсечения Q_1

[1] Если бы, например, P и Q покрывали сферу, то вся граница P могла бы содержаться в Q и обратно.

остаются два многоугольника P_2 и Q_2, то к ним можно применить то же самое утверждение, т. е. отрезать от P_2+Q_2 многоугольник, содержащийся в Q_2, а следовательно в Q, и придти к фигуре P_3+Q_3. При этом число отрезков границы многоугольника P_2, содержащихся в Q_3, ещё уменьшится. Число отрезков границы P, содержащихся внутри Q, конечно, потому что P и Q ограничены конечным числом кратчайших, а неналегающие кратчайшие могут иметь лишь конечное число общих точек. Поэтому, применяя наше рассуждение дальше, мы, после конечного числа шагов, придём к тому, что у нас останется только многоугольник, содержащийся в P. Этим лемма будет доказана.

Итак, нам нужно доказать высказанное выше утверждение о кратчайшей AB. Согласно теореме 1 предыдущего параграфа, кратчайшая, соединяющая две точки выпуклого многоугольника, либо не имеет с его границей общих точек, кроме концов, либо целиком лежит на его границе. Поэтому либо кратчайшая AB проходит внутри Q, и тогда она разбивает Q на две части, поскольку Q гомеоморфен кругу, либо кратчайшая AB идёт по границе Q. В последнем случае мы тоже скажем, что она «разбивает Q», только одна из частей вырождается в линию. Так как кратчайшая AB проходит также в P, то для многоугольника P верно то же самое. Согласно теореме 4 предыдущего параграфа, части, на которые кратчайшая AB разбивает P и Q, будут выпуклые.



Черт. 27.

Для кратчайшей AB имеются две возможности: 1) она имеет с отрезком $\overset{\frown}{AB}$ границы P общие точки, кроме A и B; 2) она не имеет с ним общих точек, кроме A и B.

Рассмотрим первый случай, когда AB и $\overset{\frown}{AB}$ имеют общие точки кроме A и B. Это значит, что кратчайшая AB имеет с границей многоугольника P общие точки, кроме концов, и потому она лежит на его границе (черт. 27). Тогда, очевидно, кратчайшая AB и есть отрезок $\overset{\frown}{AB}$ границы P. Следовательно, AB проходит внутри Q и разбивает его на два выпуклых многоугольника Q_1 и Q_2. Вместе с тем, AB лежит на границе P и потому вблизи AB в одном из многоугольников Q_1 и Q_2 имеются внутренние точки многоугольника P, а в другом их нет.

Пусть именно в Q_1 нет внутренних точек P вблизи AB. Тогда в Q_1 вообще нет внутренних точек P. Действительно иначе получалось бы, что пересечение P с Q состоит из двух несвязанных частей: одна лежит в Q_1, другая в Q_2. А это противоречит тому, что пересечение P с Q есть выпуклый многоугольник.

Отрежем теперь многоугольник Q_1. У нас останутся многоугольники P и Q_2. Отрезок $\overset{\frown}{AB}$ границы P уже не проходит внутри Q_2. Следовательно, внутри оставшегося многоугольника Q_2 содержится меньше отрезков границы многоугольника P, чем их было в исходном многоугольнике Q.

Рассмотрим теперь второй случай, когда кратчайшая AB и отрезок $\overset{\frown}{AB}$ границы многоугольника P не имеют общих точек помимо A и B (черт. 26). В этом случае линии AB и $\overset{\frown}{AB}$ образуют замкнутую кривую, ограничивающую одну из двух частей, на которые AB разбивает многоугольник P. Эту часть многоугольника P обозначим P_1, другую — P_2.

Так как AB и $\overset{\frown}{AB}$ содержатся в Q, то и вся ограниченная ими часть P_1 многоугольника P содержится в Q [1]).

[1]) Мы рассматриваем область, гомеоморфную открытому кругу. В этой области замкнутая кривая $\overset{\frown}{AB}+AB$ ограничивает одну компактную область. Она-то и есть P_1, и так как Q гомеоморфен кругу, то из того, что $Q \supset \overset{\frown}{AB}+AB$, следует, что $Q \supset P_1$.

Кратчайшая AB разбивает также многоугольник Q на две части. Так как P_1 содержится в Q, то одна из этих частей содержит P_1 целиком. Эту часть мы обозначим Q_1, а другую — Q_2. Q_1 есть выпуклый многоугольник, так как он отсечён от Q кратчайшей AB и содержит внутренние точки (потому что $AB \neq \overset{\frown}{AB}$ и, следовательно, P_1 имеет внутренние точки).

Отрежем от фигуры $P+Q$, образованной многоугольниками P и Q, многоугольник Q_1. У нас останутся P_2 и Q_2, поскольку P_1 содержится в Q_1. Если P не сводится к P_1 и не содержится тем самым в Q, то P_2 есть многоугольник. Что же касается Q_2, то он может вырождаться в отрезок. В таком случае наше построение закончено: фигура $P+Q$ разбита на выпуклые многоугольники Q_1 и P_2 без общих внутренних точек. Если же Q_2 не сводится к отрезку, то у нас останется фигура, составленная из двух выпуклых многоугольников P_2 и Q_2. При этом число отрезков границы P_2, содержащихся внутри Q_2, меньше, чем было число отрезков границы P внутри Q, потому что отрезок $\overset{\frown}{AB}$ исключён, а новых не появилось.

Итак, в обоих случаях расположения кратчайшей AB мы доказали, что она отсекает от фигуры $P+Q$ выпуклый многоугольник Q_1, содержащийся в Q так, что оставшаяся фигура P_2+Q_2 состоит опять из двух выпуклых многоугольников, гомеоморфных кругу, но число отрезков границы P_2, проходящих внутри Q_2, меньше чем число отрезков границы P внутри Q. Число отрезков границы P, содержащихся внутри Q, конечно, потому что P и Q ограничены конечным числом кратчайших, а неналегающие кратчайшие могут иметь лишь конечное число общих точек. Поэтому, применяя наше построение дальше, отрезая от Q с каждым шагом новые многоугольники, мы после конечного числа шагов придём к тому, что у нас останется только многоугольник, содержащийся в P. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть имеются две системы, гомеоморфные кругу выпуклых многоугольников $P_1, \ldots, P_n$ и $Q_1, \ldots, Q_m$, причём многоугольники, входящие в одну систему, не имеют друг с другом общих внутренних точек. Тогда фигуру, составленную из всех этих многоугольников, можно разбить на конечное число многоугольников, тоже выпуклых и гомеоморфных кругу и не имеющих общих внутренних точек.*

Доказательство будем вести индукцией по n и m. Если $n=m=1$, то данная лемма сводится к предыдущей. Допустим, что лемма верна для одного многоугольника P и m многоугольников $Q_1, \ldots, Q_m$, и докажем, что она верна также для $m+1$ многоугольников $Q_1, \ldots, Q_{m+1}$.

Согласно лемме 2, фигуру $P+Q_{m+1}$ можно разбить на не имеющие общих внутренних точек многоугольники, из которых только один P' содержится в P, а остальные в Q_{m+1}. Так как Q_{m+1} не имеет с $Q_1, \ldots, Q_m$ общих точек, то при этом построении многоугольники $Q_1, \ldots, Q_m$ остаются без изменения. По предположению индукции фигуру, составленную из этих многоугольников и единственного многоугольника P', можно разбить на многоугольники без общих внутренних точек. Следовательно, вся фигура $P+(Q_1+\ldots+Q_{m+1})$ допускает такое разбиение. Этим лемма доказана для $n=1$ и любого m.

Допустим теперь, что она верна для данного n и любого m, и докажем, что тогда она верна для $n+1$ и любого m. Пусть мы имеем многоугольники $P_1, \ldots, P_{n+1}$ и $Q_1, \ldots, Q_m$, удовлетворяющие условиям леммы. По доказанному, фигуру $P_{n+1}+(Q_1+\ldots+Q_m)$ можно разбить на многоугольники без общих внутренних точек. После этой операции у нас останется n многоугольников $P_1, \ldots, P_n$ и какое-то число других многоугольников, не имеющих общих внутренних точек. По предположению индукции, фигуру, составленную из всех этих многоугольников, можно разбить требуемым образом, после чего вся фигура $(P_1+\ldots+P_{n+1})+(Q_1+\ldots+Q_m)$ окажется разбитой, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Фигуру, составленную из конечного числа гомеоморфны кругу выпуклых многоугольников, можно разбить на конечное число таких же многоугольников, не имеющих общих внутренних точек.*

Доказательство. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — многоугольники, образующие рассматриваемую фигуру. Возьмём все пары этих многоугольников, имеющих друг с другом общие точки, и перенумеруем эти пары произвольным образом. Возьмём первую такую пару и, воспользовавшись леммой 2, разобьём её на конечное число выпуклых многоугольников, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Потом возьмём вторую такую пару и с ней сделаем то же самое и т. д.

Пусть мы дошли до некоторой пары (P_k, P_l). Может оказаться, что один или оба многоугольника этой пары уже встречались в предыдущих парах. Тогда они будут разбиты на многоугольники $P_{k1}, P_{k2}, \ldots, P_{km_k}, P_{l1}, P_{l2}, \ldots, P_{lm_l}$, причём многоугольники P_{ki}, как и многоугольники P_{lj}, не имеют друг с другом общих внутренних точек. Применяя лемму 3, мы можем поэтому и все эти многоугольники разбить на такие, которые не будут иметь общих внутренних точек.

Таким образом, переходя к ближайшей по порядку паре (P_k, P_l), мы каждый раз учитываем все уже произведённые операции: вместо самих многоугольников P_k, P_l мы берём те, которые получились из них в результате предыдущих разбиений. При этом каждый раз мы пользуемся леммой 3. Перебрав все пары многоугольников $P_1, \ldots, P_n$, мы получим требуемое разбиение всей составленной из них фигуры.

Теперь легко доказать теорему о разбиении на треугольники:

Теорема. *Всякий многоугольник можно разбить на сколь угодно малые треугольники, у каждого из которых сумма любых двух сторон будет больше третьей. Если мнгоугольник выпуклый, то эти треугольники могут быть взяты выпуклыми.*

Доказательство. Пусть P — многоугольник, который нужно разбить на треугольники диаметров, меньших данного ε. В силу теоремы, доказанной в § 4, каждую точку многоугольника P можно окружить гемеоморфным кругу выпуклым многоугольником с диаметром, меньшим ε. Кроме того, мы можем взять эти многоугольники столь малыми, чтобы ни один из них не содержал более одной вершины многоугольника P. В силу леммы Бореля из этих многоугольников можно выбрать конечное число так, что они будут покрывать P.

Фигуру, образованную выбранными многоугольниками, согласно лемме 4[1], можно разбить на гомеоморфные кругу выпуклые многоугольники, не имеющие друг с другом общих точек. Эти многоугольники $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, очевидно, покрывают P, диаметры их меньше ε и ни один из них не содержит более одной вершины многоугольника P. Те из них, которые не имеют с P общих внутренних точек, мы, конечно, отбрасываем.

Многоугольники $Q_1, \ldots, Q_n$ могут быть трёх типов: 1) те, внутри которых нет точек границы P; 2) те, внутри которых имеются только отрезки сторон P, но нет вершин P; 3) те, внутри которых есть одна вершина P. Рассмотрим многоугольники каждого типа в отдельности.

Многоугольники первого типа заключены в P, и мы разбиваем их на выпуклые треугольники согласно лемме 1.

Общая часть всякого многоугольника Q_i второго типа и многоугольника P состоит из выпуклых многоугольников, гомеоморфных кругу и не имеющих общих внутренних точек. Действительно, по условию, Q_i не содержит вершин P, а потому какая-либо сторона многоугольника P, войдя в Q_i, также выходит из него. Тем самым она разбивает Q_i на два выпуклых многоугольника, гомео-

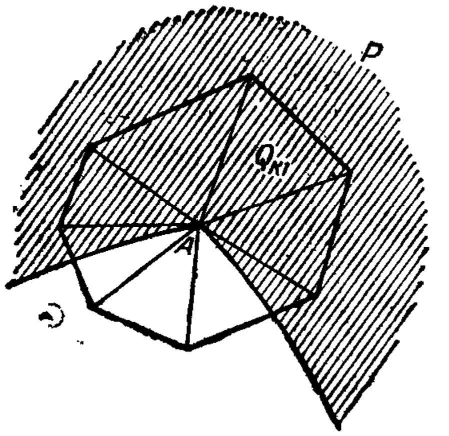
[1]) Хотя может быть и не гомеморфен кругу, лемма 4 применима, если ε достаточно мало; тогда пары пересекающихся малых многоугольников заключены в окрестностях, гомеоморфных кругу.

морфных кругу. Если Q_i пересекает несколько сторон P, то, повторяя это рассуждение последовательно для них всех, мы убедимся в том, что они разбивают Q_i на гомеоморфные кругу выпуклые многоугольники. Часть из этих многоугольников $Q_{i1}, \ldots, Q_{im}$ и будет представлять пересечение Q_i с P.

Каждый из многоугольников $Q_{i1}, \ldots, Q_{im}$ мы также разбиваем на выпуклые треугольники согласно лемме 1.

Остаются теперь многоугольники третьего типа. Пусть Q_k — один из них. Если какая-либо сторона многоугольника P, войдя в Q_k, также выходит из него, то она разбивает Q_k на два выпуклых многоугольника, гомеоморфных кругу. Поэтому все такие стороны многоугольника P (если они имеются) разобьют Q_k на многоугольники, гомеоморфные кругу. Те из этих многоугольников, которые не имеют с P общих внутренних точек, мы исключаем, а остальные обозначим $Q_{k1}, \ldots, Q_{kl}$.

Многоугольник Q_k содержит внутри одну какую-нибудь вершину A многоугольника P. Пусть она содержится внутри Q_{k1}. Остальные многоугольники $Q_{k1}, \ldots, Q_{kl}$, следовательно, уже не имеют внутри частей границы P. Поэтому они содержатся в P. Каждый из них мы разбиваем на выпуклые треугольники согласно лемме 1.



Черт. 28.

Если многоугольник P — выпуклый, то его общая часть с многоугольником Q_{k1} будет выпуклым многоугольником, очевидно, гомеоморфным кругу, поскольку внутри Q_{k1} нет уже других частей границы многоугольника P, кроме отрезков двух сторон, сходящихся в вершине A. Поэтому часть многоугольника Q_{k1}, содержащуюся в P, можно разбить на выпуклые треугольники.

Следовательно, если многоугольник P — выпуклый, то, произведя ту же операцию со всеми многоугольниками третьего типа, мы придём к разбиению P сплошь на выпуклые треугольники.

Если же многоугольник P — не выпуклый, то с многоугольником Q_{k1} приходится поступать несколько иначе. Многоугольник Q_{k1} содержит внутри себя вершину A многоугольника P. Соединим её кратчайшими с вершинами многоугольника Q_{k1} (черт. 28). Эти кратчайшие пройдут внутри многоугольника Q_{k1}, потому что он выпуклый и точка A лежит внутри него. К этим кратчайшим мы присоединим ещё стороны многоугольника P, сходящиеся в A. В результате многоугольник Q_{k1} разобьётся на треугольники с общей вершиной A и мы возьмём те из этих треугольников, которые заключены в P. Если у некоторых из них сумма длин двух сторон равна длине третьей, то, применяя способ, использованный в доказательстве леммы 1, мы разделим их на такие, для которых это уже не имеет места. Поступая так же со всеми многоугольниками третьего типа, мы придём к такому разбиению многоугольника P на треугольники, которое обладает нужными свойствами, и теорема доказана.

Если многоугольник P — не выпуклый, то треугольники, на которые он разбивается, могут не быть выпуклыми. Для многоугольника на выпуклой поверхности можно доказать, что его всегда можно разбить на выпуклые треугольники, даже если он сам невыпуклый. Верно ли то же самое в любом многообразии с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию неналегания кратчайших, — мне неизвестно.

ГЛАВА III.

ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

§ 1. Сходимость метрик сходящихся выпуклых поверхностей.

Основным средством изучения внутренней метрики выпуклых поверхностей нам служит метод приближения выпуклыми многогранниками. Этот метод основан, во-первых, на той известной теореме, что для всякой замкнутой выпуклой поверхности существует сходящаяся к ней последовательность замкнутых выпуклых многогранников. Вторым основным пунктом этого метода является теорема о сходимости метрик сходящихся выпуклых поверхностей. Из этих двух теорем вытекает возможность предельного перехода от метрики выпуклых многогранников к метрике любой выпуклой поверхности. Поэтому мы начинаем исследование характерных свойств внутренней метрики выпуклых поверхностей с теоремы о сходимости метрик:

Теорема 1. *Если последовательность замкнутых выпуклых поверхностей F_n сходится к замкнутой выпуклой поверхности F и две последовательности точек X_n и Y_n на F_n сходятся соответственно к точкам X и Y на F, то расстояния между точками X_n и Y_n, измеренные на поверхностях F_n, сходятся к расстоянию между точками X и Y, измеренному на F, т. е.* $\rho_F(XY) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n)$.

К замкнутым выпуклым поверхностям мы относим также дважды покрытые выпуклые области на плоскости, а на такой «поверхности» каждая точка, не лежащая на краю, считается за две. Поэтому, если поверхность F вырождается в дважды покрытую плоскую область, то понятие о сходимости точек следует уточнить. У плоской области G, в которую вырождается поверхность F, мы различаем две стороны и одни точки поверхности F считаем лежащими с одной стороны, другие — с другой. Пусть точка X лежит внутри области G. Рассмотрим все направленные прямые p, перпендикулярные к плоскости, в которой лежит область G; направим их в полупространство, к которому обращена сторона области G, на которой лежит точка X. Эти прямые пересекают поверхности F_n. Точки X_n на поверхностях F_n считаются сходящимися к X, если 1) они сходятся к X как точки в пространстве и 2) если при достаточно большом n точка X_n лежит на поверхности F_n так, что проходящая через неё прямая p направлена в ней от поверхности F_n, т. е. направлена в полупространство, в которое идёт внешняя нормаль к какой-нибудь опорной плоскости поверхности F_n в точке X_n. Если это условие не выполняется хотя бы только при некоторых сколь угодно больших n, то последовательность точек X_n не считается сходящейся к точке X. Если точка X лежит на краю области G, то её можно считать лежащей с любой стороны и дополнительное условие оказывается лишним. Только при данном определении сходимости теорема 1 оказывается верной также в том случае, когда предельная поверхность F вырождается в дважды покрытую плоскую область.

Для доказательства теоремы нужны две леммы.

Пусть F — какая-либо замкнутая выпуклая поверхность и A — точка, не лежащая внутри тела H, органиченного F. На F существует точка A', ближайшая к A. Она, как легко убедиться, обладает тем свойством, что через неё проходит опорная плоскость к F, перпендикулярная к отрезку AA' (если только A сама не лежит на F, и тогда $A' = A$). Отсюда, кстати, видно, что точка A' — единственная. Эту точку мы назовём проекцией точки A на поверхность F.

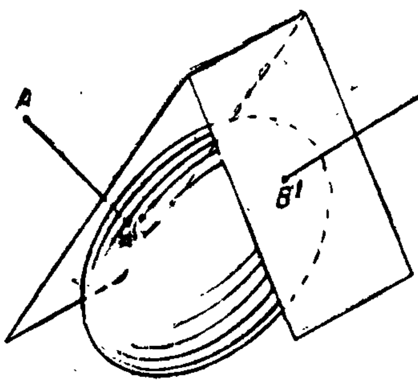
Будем говорить, что кривая L лежит вне поверхности F, если она не имеет точек внутри тела H. Если кривая L лежит вне F, то её проекцией L' на F мы называем геометрическое место проекций всех точек кривой L.

Буземанн и Феллер доказали следующую важную лемму[1]):

Лемма 1. *Если кривая L, лежащая вне замкнутой выпуклой поверхности F, имеет конечную длину, то её проекция на F есть кривая, длина которой не больше длины L.*

Доказательство основано на следующем замечании:

Пусть на полуплоскостях, образующих выпуклый двугранный угол V, лежит по точке A' и B'. Пусть точки A и B лежат вне угла V на перпендикулярах, восставленных в точках A и B. Тогда расстояние между A и B не меньше, чем расстояние между A' и B'. Это утверждение мы предоставляем доказать читателю. (См. черт. 29, где угол V составлен из опорных плоскостей к поверхности F в проекциях A' и B' точек A и B.)



Черт. 29.

Пусть теперь точки A и B лежат вне F (или на F) и пусть A' и B' — их проекции на F. Опорные плоскости в точках A' и B', перпендикулярные к отрезкам AA' и BB', образуют двугранный угол, и точки A и B лежат вне этого угла. Поэтому, применяя предыдущее замечание, мы приходим к выводу, что расстояние между A' и B' не больше расстояния между A и B, т. е. *расстояние между проекциями точек на выпуклую поверхность всегда не больше расстояния между самими точками.*

Пусть кривая $X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ лежит вне F и пусть $X'(t)$ — проекции точек $X(t)$ на F; они образуют проекцию кривой $X(t)$ на F. Если ρ обозначает расстояние в пространстве, то, как мы показали, при любых t_1 и t_2

$$\rho(X'(t_1)X'(t_2)) \leqslant \rho(X(t_1)X(t_2)). \tag{1}$$

Так как точки $X(t)$ образуют непрерывную кривую, то при всяком $\varepsilon > 0$ есть такое $\delta > 0$, что $\rho(X(t_1)X(t_2)) < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$. Но тогда, вследствие (1), также $\rho(X'(t_1)X'(t_2)) < \varepsilon$, а это значит, что точки $X'(t)$ образуют непрерывную кривую.

Возьмём теперь произвольные значения t_i так, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$. Тогда в силу (1)

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X'(t_{i-1})X'(t_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(X(t_{i-1})X(t_i)). \tag{2}$$

[1]) H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math., т. 66 (1936), стр. 41 (Hilfssatz 1).

Стоящая здесь справа сумма не больше длины s кривой $X(t)$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X'(t_{i-1})X'(t_i)) \leqslant s. \tag{3}$$

Но значения t_i выбраны произвольно и это неравенство верно при любом их выборе. Поэтому точная верхняя граница сумм в неравенстве (3) также не больше s, а она, по определению, есть длина кривой $X'(t)$. Следовательно, длина кривой $X'(t)$ не больше длины кривой $X(t)$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы 1 немедленно вытекает

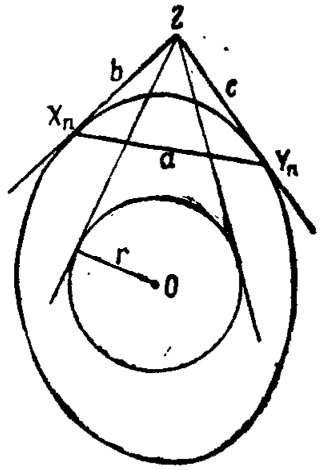
Лемма 2. *Если кривая L лежит вне замкнутой выпуклой поверхности F, то её длина не меньше расстояния на F между проекциями её концов на поверхность F. В частности, если концы A и B кривой L лежат на F, то длина кривой L не меньше длины кратчайшей AB на поверхности F.*

Действительно, по лемме 1 длина кривой L не меньше длины её проекции на F, а длина проекции, конечно, не меньше длины кратчайшей, соединяющей её концы.

Эта лемма полезна не только для доказательства теоремы, формулированной в начале параграфа, но, как показали Буземанн и Феллер, она оказывается чрезвычайно полезной при исследовании свойств кратчайших на выпуклой поверхности. В этом направлении мы используем её в § 6 гл. IV.

Лемма 3. *Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к невырождающейся поверхности F и точки X_n, Y_n, лежащие на F_n, сходятся к одной точке X на F, то расстояния между X_n и Y_n на F_n стремятся к нулю:*

$$\lim_{n \to \infty} \rho_{F_n}(X_n Y_n) = 0.$$



Черт. 30.

Доказательство. Так как поверхность F не вырождается, то поверхности F_n также не вырождаются, по крайней мере, если n достаточно велико. Ограничиваясь только достаточно большими n, мы можем взять точку O так, что вокруг неё можно описать шар некоторого радиуса $r > 0$, лежащий внутри всех поверхностей F_n и внутри F.

Выберем любое большое n и проведём через точки O, X_n, Y_n плоскость (черт. 30). Эта плоскость пересечёт поверхность F_n по выпуклой кривой. Проведём опорные прямые к этой кривой в точках X_n и Y_n, и пусть Z — точка пересечения этих прямых. Проведём из Z касательные к той окружности, которая получается в сечении нашей плоскостью сферы радиуса r с центром в O. Пусть β — угол между этими касательными. Тогда

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{OZ}. \tag{4}$$

Если D — диаметр поверхности F_n, то $OX_n < D$, и если $X_nZ = b$, $Y_nZ = c$, то, очевидно, $OZ < OX_n + X_nZ < D + b$ и тем более

$$OZ < D + b + c. \tag{5}$$

Если α — угол при Z в треугольнике X_nY_nZ, то, очевидно,

$$\alpha \geqslant \beta. \tag{6}$$

Из неравенств (4), (5) и (6) следует, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} > \frac{r}{D+b+c}. \tag{7}$$

Если длину X_nY_n обозначить a, то [1])

$$\sin\frac{a}{2} \leqslant \frac{a}{b+c}. \tag{8}$$

Поэтому из (7) следует, что

$$\frac{a}{b+c} > \frac{r}{D+(b+c)}$$

и потому, если $r-a>0$, то

$$b+c<\frac{aD}{r-a}. \tag{9}$$

Отрезки X_nZ и Y_nZ лежат вне поверхности F_n и, следовательно, по предыдущей лемме

$$\rho_{F_n}(X_nY_n) \leqslant X_nZ + Y_nZ = b+c. \tag{10}$$

Из (9) следует поэтому, что

$$\rho_{F_n}(X_nY_n) < \frac{aD}{r-a}\,^{2)}. \tag{11}$$

Здесь есть расстояние между точками X_n и Y_n. По условию, когда $n\to\infty$, эти точки сходятся к одной точке X. Поэтому $a\to 0$, а D остаётся ограниченным, так как поверхности F_n сходятся. Поэтому из (11) следует, что

$$\rho_{F_n}(X_nY_n) \to 0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем теорему, формулированную в начале этого параграфа.

Пусть замкнутые выпуклые поверхности F_n сходятся к поверхности F и пусть точки X_n, Y_n на F_n сходятся к точкам X и Y на F. Все поверхности F_n могут быть заключены в достаточно большой шар S. На этом шаре всегда имеются точки A_n и B_n, проекции которых на F_n суть точки X_n и Y_n. Эти точки A_n и B_n получаются, если провести внешние нормали к опорным плоскостям поверхности F_n в точках X_n и Y_n до их пересечения с поверхностью шара S. Поэтому, в силу леммы 2, расстояния на F_n между точками X_n и Y_n не превосходят длины большой полуокружности шара S, т. е. все они ограничены.

В § 2 гл. II было доказано, что любые две точки на замкнутой выпуклой поверхности можно соединить кратчайшей линией. Пусть L_n — кратчайшие, соединяющие на поверхностях F_n точки X_n и Y_n. Длина каждой из них равна расстоянию на F_n между X_n и Y_n, т. е.

$$s(L_n) = \rho_{F_n}(X_nY_n). \tag{12}$$

Из только что доказанного следует, что все длины $s(L_n)$ ограничены в совокупности и потому, по теореме 4 § 1 гл. II, из кривых L_n можно выбрать

[1]) При данных a и $b+c$ угол α будет наибольший, если треугольник X_nY_nZ — равнобедренный, а тогда $a=(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}$.

[2]) Это неравенство имеет самостоятельный интерес, потому что оно даёт оценку внутреннего расстояния между точками X_n, Y_n в зависимости от их расстояния в пространстве a и от диаметра поверхности D и радиуса r содержащегося в ней шара. Эта оценка весьма грубая. Если ρ — расстояние на выпуклой поверхности, a — расстояние между теми же точками в пространстве, r — радиус шара, содержащегося в поверхности, а R — радиус шара, содержащего её, то, повидимому, имеет место следующая уже точная оценка:

$$\frac{\rho}{a} \leqslant \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2-1}+\frac{R}{2}\arcsin\frac{r}{R}<\frac{R}{r}+1.$$

Интересную задачу представляет доказать это и найти поверхность, для которой (при данных R и r) максимум отношения $\frac{\rho}{a}$ наибольший.

последовательность, сходящуюся к некоторой кривой L. Эта кривая, очевидно, лежит на F и соединяет точки X и Y. Её длина, в силу теоремы 5 § 1 гл. II, удовлетворяет неравенству

$$s(L) \leqslant \lim_{n\to\infty} s(L_n). \tag{13}$$

Вместе с тем из определения расстояния на поверхности ясно, что

$$S(L) \geqslant \rho_F(XY), \tag{14}$$

где ρ_F — расстояние на F. Из формул (12), (13) и (14) следует, что

$$\rho_F(XY) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n). \tag{15}$$

Если мы теперь докажем, что имеет место также обратное неравенство, то теорема будет доказана. Здесь мы отдельно рассмотрим два случая: 1) когда поверхность F не вырождается и 2) когда она вырождается.

Пусть поверхность F — не вырожденная. Возьмём внутри неё точку O и преобразуем поверхности F_n подобно, с центром подобия в O, так, чтобы все они оказались внутри F. Так как поверхности F_n сходятся к F, то коэффициенты подобия λ_n можно брать всё ближе к единице, когда n растёт, и $\lambda_n \to 1$ при $n \to \infty$. Поверхности и точки, получающиеся из поверхностей F_n и точек X_n, Y_n в результате указанного преобразования, мы будем обозначать λ_nF_n, λ_nX_n, λ_nY_n. Так как $\lambda_n \to 1$, а точки X_n, Y_n сходятся к X и Y, то точки λ_nX_n и λ_nY_n также сходятся к X и Y.

Пусть X_n' и Y_n' — проекции точек X и Y на поверхности λ_nF_n. По лемме 2,

$$\rho_{\lambda_nF_n}(X_n'Y_n') \leqslant \rho_F(XY). \tag{16}$$

При $n \to \infty$ точки X_n', очевидно, сходятся к X, и, вместе с тем, точки λ_nX_n также сходятся к X. Поэтому, в силу леммы 3,

$$\rho_{\lambda_nF_n}(X_n', \lambda_nX_n) \to 0, \tag{17}$$

и по тем же соображениям

$$\rho_{\lambda_nF_n}(Y_n', \lambda_nY_n) \to 0. \tag{18}$$

В силу «неравенства треугольника»

$$\rho_{\lambda_nF_n}(\lambda_nX_n, \lambda_nY_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_{\lambda_nF_n}(\lambda_nX, X_n') + \rho_{\lambda_nF_n}(X_n'Y_n' + \rho_{\lambda_nF_n}(Y_n', \lambda_nY_n). \tag{19}$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством (16) и соотношениями (17) и (18), мы получим, переходя к пределу при $n \to \infty$, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho_{\lambda_nF_n}(\lambda_nX_n, \lambda_nY_n) = \rho_F(XY). \tag{20}$$

Но при преобразовании подобия с коэффициентом λ_n все расстояния меняются в λ_n раз и потому

$$\rho_{\lambda_nF_n}(\lambda_nX_n, \lambda_nY_n) = \lambda_n\rho_{F_n}(X_nY_n); \tag{21}$$

так как $\lambda_n \to 1$, то из формулы (20) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n) \leqslant \rho_F(XY) \tag{22}$$

Сравнивая теперь эту формулу с формулой (15), мы получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n) = \rho_F(XY),$$

что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что поверхность F вырождена в дважды покрытую плоскую область. Рассмотрим два случая: 1) точки X и Y лежат на одной стороне F (причём могут лежать также на краю), 2) точки X и Y лежат на разных сторонах F.

В первом случае проведём через точки X_n и Y_n плоскость P_n, перпендикулярную той плоскости, в которой лежит F. Плоскости P_n пересекают поверхности F_n по замкнутым выпуклым кривым[1]. На этих кривых мы возьмём те отрезки L_n между точками X_n, Y_n, которые сходятся к отрезку XY. Это всегда возможно, поскольку F_n, сходятся к F и X_n, Y_n сходятся к X, Y.

Кривые L_n суть плоские выпуклые кривые, сходящиеся к отрезку $\overline{XY}$, и потому длины их сходятся к длине этого отрезка[2]). Длина кривой L_n не меньше расстояния между точками X_n и Y_n на F_n, а длина отрезка $\overline{XY}$ есть расстояние между точками X и Y на F. Поэтому

$$\rho_F(XY) \geq \lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n). \tag{23}$$

Пусть теперь точки X_n и Y_n лежат на разных сторонах F. Тогда соединяющая их кратчайшая линия на F состоит из двух прямолинейных отрезков, встречающихся в некоторой точке Z на краю F. Поэтому

$$\rho_F(XY) = \rho_F(XZ) + \rho(ZY). \tag{24}$$

Возьмём на поверхностях F_n последовательность точек Z_n, сходящихся к Z. Так как X и Z, а также Y и Z лежат уже на одной стороне F, то по доказанному

$$\rho_F(XZ) \geq \lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nZ_n), \quad \rho_F(XZ) \geq \lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(Y_nZ_n). \tag{25}$$

Вместе с тем,

$$\rho_{F_n}(X_nZ_n) + \rho_{F_n}(Z_nY_n) \geq \rho_{F_n}(X_nY_n). \tag{26}$$

Из формул (24), (25) и (26) следует, что снова

$$\rho_F(XY) \geq \lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n). \tag{23}$$

Таким образом неравенство (23) установлено в обоих предложениях о расположении точек X, Y. Соединяя это неравенство с неравенством (15), мы получаем, что

$$\rho_F(XY) = \lim_{n\to\infty} \rho_{F_n}(X_nY_n),$$

что и требовалось доказать.

Совершенно так же доказывается, что если F_n сходятся к отрезку и точки X_n, Y_n, лежащие на F_n, сходятся к X и Y, то $\rho_{F_n}(X_nY_n)$ сходятся к расстоянию между X и Y. Если отрезок вырождается в точку, то $\rho_{F_n}(X_nY_n) \to 0$.

Теорему 1 можно усилить, доказав, что сходимость метрик на сходящихся выпуклых поверхностях оказывается в некотором смысле равномерной. Именно, имеет место

---

[1]) Эта кривая вырождается в дважды покрытый отрезок, если F_n также вырождается. Если плоскость P_n — опорвая к F_n, то за L_n мы берём отрезок $\overline{X_nY_n}$.

[2]) Действительно, построим прямоугольник с вершинами в точках X_n, Y_n, содержащий кривую L_n. Если h — высота этого прямоугольника, то $s(L_n) \leq \overline{X_nY_n} + 2h$. Так как $h \to 0$ и $X_n \to X$, $Y_n \to Y$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s(L_n) \leq XY$. С другой стороны, по теореме 5 § 1 гл. II, $\overline{XY} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} S(L_n)$, так как $L_n \to XY$. Следовательно, $XY = \lim_{n\to\infty} s(L_n)$.

Теорема 2. *Для каждой замкнутой выпуклой поверхности F при всяком $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что как только отклонение*[1] *замкнутой выпуклой поверхности S от F меньше δ и расстояния каких-либо точек X и Y на F от точек A и B на S тоже меньше δ, так*

$$|\rho_F(XY)-\rho_S(AB)|<\varepsilon,$$

где ρ_F и ρ_S — расстояния на F и S.

Доказательство. Допустим противное. Тогда должна существовать такая последовательность поверхностей S_n, сходящихся к F, что на F можно взять точки X^n, Y^n, а на S — точки X_n, Y_n так, что расстояния точек X^n и Y^n от точек X_n и Y_n стремятся к нулю, но при сколь угодно больших n будет

$$|\rho_{S_n}(X_nY_n)-\rho_F(X^nY^n)|>\varepsilon>0. \tag{27}$$

Из точек X^n и Y^n можно выбрать сходящиеся последовательности и потому можно просто считать, что последовательности X_n и Y_n точек на S_n сходятся к некоторым точкам X и Y на F. Тогда вместо (27) мы получим

$$|\rho_{S_n}(X_nY_n)-\rho_F(XY)|\geqslant\varepsilon>0. \tag{28}$$

Но по теореме 1 $\rho_{S_n}(X_nY_n)\to\rho_F(XY)$. Это противоречит неравенству (28), и теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает также следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть последовательность замкнутых выпуклых поверхностей F_n сходится к поверхности F и последовательность пар точек X_n, Y_n, лежащих на F_n, сходится к паре точек X, Y, лежащих на F; тогда из всякой последовательности кратчайших X_nY_n на поверхностях F_n можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к кратчайшей XY на поверхности F.*

Доказательство. По теореме 1 при условиях нашей леммы

$$\rho_F(XY)=\lim_{n\to\infty}\rho_{F_n}(X_nY_n), \tag{29}$$

где $\rho_F(XY)$ — расстояние на F, т. е. длина кратчайшей XY, а $\rho_{F_n}(X_nY_n)$ — расстояние на F_n, т. е. длина кратчайшей X_nY_n. С другой стороны, из всякой последовательности спрямляемых кривых, лежащих в конечной области пространства и имеющих длины, ограниченные в совокупности, можно выделить сходящуюся последовательность, причём длина предельной кривой будет не больше нижнего предела длин кривых этой последовательности. Из формулы (29) ясно, что длины кратчайших X_nY_n ограничены в совокупности и предел их равен $\rho_F(XY)$. Поэтому можно взять последовательность $X_{n_i}Y_{n_i}$, сходящуюся к некоторой кривой XY с длиной, не большей $\rho_F(XY)$. Но эта кривая, очевидно, лежит на поверхности F и, значит, её длина не может быть меньше $\rho_F(XY)$. Следовательно, она равна $\rho_F(XY)$, т. е. кривая XY — кратчайшая на F.

§ 2. Условие выпуклости для многогранной метрики.

В гл. I было введено «условие выпуклости» метрики, которое состоит в следующем: *Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из одной точки O в многообразии с внутренней метрикой. Пусть X и Y — переменные точки на этих кратчайших, x и y — расстояния точек X и Y от точки O, а $z=z(x,y)$ —*

---

[1] Расстоянием $\rho(X, F)$ точки X от множества F называется точная нижняя граница расстояний точки X от точек множества F. Отклонением множества F_1 от множества F_2 называется точная верхняя граница расстояний точек из F_1 до F_2. Отклонением F_1 и F_2 друг от друга называется большее из отклонений F_1 от F_2 и F_2 от F_1. Если отклонение поверхностей F_n от F стремится к нулю, то F_n сходятся к F.

расстояние между точками X и Y. Пусть, наконец, $\gamma(x, y)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами, равными x, y, z, лежащий против стороны, равной z. Условие выпуклости требует, чтобы $\gamma(x, y)$ было невозрастающей функцией x и y на всяком таком интервале значений $0 < x \leqslant x_0$, $0 < y \leqslant y_0$, на котором существуют кратчайшие XY[1]. (Значения $x = 0$, $y = 0$ исключаются, так как $\gamma(x, 0)$ и $\gamma(0, y)$ не определены.)

Нашей целью является показать, что внутренняя метрика всякой выпуклой поверхности удовлетворяет условию выпуклости; основываясь на этом условии, можно развивать внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей, не привлекая уже никаких других свойств их внутренней метрики, если не считать общих свойств всякой внутренней метрики вообще. Мы покажем сначала, что условие выпуклости выполняется на выпуклых многогранниках, а потом, путём предельного перехода, перенесём его на любые выпуклые поверхности. Весь вывод условия выпуклости на многогранниках имеет чисто внутренне-геометрический характер. О выпуклых многогранниках нам нужно знать только, что их метрика есть многогранная метрика положительной кривизны. Поэтому вместо многогранников мы будем рассматривать произвольное многообразие R с такой метрикой.

Прежде чем доказать, что в многообразии R выполняется условие выпуклости, выведем некоторые основные свойства кратчайших в R. Кстати, эти свойства будут нужны нам и в дальнейшем.

1) По определению многогранной метрики положительной кривизны, каждая точка того многообразия, где она задана, имеет окрестность, изометричную конусу с полным углом при вершине $\leqslant 2\pi$. Поэтому кратчайшая, исходящая из любой точки O, представляет в окрестности этой точки прямолинейный отрезок на таком конусе, исходящий из его вершины. Отсюда следует также, что *между кратчайшими, исходящими из одной точки O, имеется определённый угол: угол между отрезками, к которым сводятся кратчайшие в окрестности точки O.*

2) *Кратчайшая не может проходить через точку, полный угол вокруг которой $< 2\pi$.*

Действительно, две ветви кратчайшей, исходящие из такой точки O, разбивают её окрестность на два сектора. Сумма углов этих секторов $< 2\pi$ и потому угол хотя бы одного из них $< \pi$. Разворачивая этот сектор на плоскость, мы видим, что такой угол можно срезать, проводя отрезок, соединяющий любые две точки X и Y на его сторонах. Этот отрезок XY короче суммы отрезков OX и OY кратчайшей, что противоречит самому определению кратчайшей.

3) *У кратчайшей есть окрестность, которую можно развернуть на плоскость, причём кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок.*

Если конец кратчайшей лежит в точке O, где полный угол $< 2\pi$, то его окрестность нельзя развернуть на плоскость. Но мы проведём из точки O отрезок на конусе, которому изометрична её окрестность, и разрежем эту окрестность вдоль такого отрезка[2]. Тогда эту окрестность можно будет развернуть на плоскость. Возможность развернуть на плоскость окрестности концов кратчайшей мы понимаем именно в этом смысле.

---

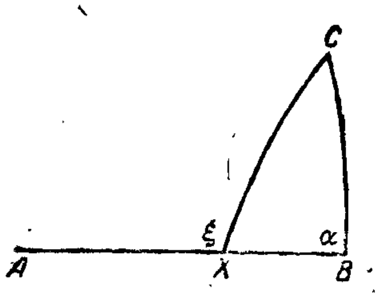
[1]) Полезно иметь в виду, что, в силу непрерывной зависимости расстояния $\rho(X, Y)$ от точек X и Y, $\gamma(x, y)$ есть непрерывная функция x и y.

[2]) Операцию разрезания какой-нибудь области многообразия по некоторой кривой мы будем применять и дальше; поэтому дадим здесь строгое её определение. Пусть L — кривая конечной длины без кратных точек в области G. Разрезание области G по кривой L состоит в замене области G другой областью G', содержащей две кривые L_1 и L_2 с общими концами, и притом так, что если отождествить на кривых L_1 и L_2 точки, равноудалённые от концов (считая по кривым L_1 и L_2), то G' превращается в область, изометричную G.

Так как мы доказали, что кратчайшая не может проходить через точку с полным углом $< 2\pi$, то вокруг каждой внутренней точки кратчайшей полный угол равен 2π. Поэтому окрестность такой точки можно развернуть на плоскость. Из определения кратчайшей очевидно, что при развёртывании окрестности её точки на плоскость сама кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок. Теперь, если нам дана кратчайшая L, то мы можем окружить каждую её точку окрестностью, которую можно развернуть на плоскость. Из этих окрестностей можно выбрать конечное число покрывающих всю кратчайшую L. Разворачивая эти окрестности на плоскость последовательно одну за другой, мы развернём всю образуемую ими окрестность кратчайшей L и, так как сама L на каждом малом участке разворачивается в прямолинейный отрезок, то и вся в целом она также перейдёт в прямолинейный отрезок.

4) *Если две кратчайшие AB и AC, исходящие из одной точки A, совпадают на некотором отрезке AD, то одна из них есть часть другой, т. е. выполняется условие неналегания кратчайших.*

Если кратчайшие AB и AC совпадают на некотором отрезке, но ни одна из них не содержится в другой, то, очевидно, есть такой отрезок AD, на котором они совпадают, а дальше на отрезках DB и DC расходятся. Но если развернуть окрестность кратчайшей AB на плоскость, то она перейдёт в прямолинейный отрезок. Вместе с тем кратчайшая AC тоже перейдёт в прямолинейный отрезок (во всяком случае та её часть, которая лежит в разворачиваемой окрестности). А два прямолинейных отрезка не могут, конечно, совпадать на каком-либо участке AD и дальше расходиться. Следовательно, это невозможно и для кратчайших AB и AC, что и требовалось доказать.



Черт. 31.

Кроме этих простых замечаний о кратчайших, нам понадобится несколько более глубокий результат:

Лемма 1. *Пусть в некоторой компактной области G многообразия с многогранной метрикой положительной кривизны заданы кратчайшая AB и такая точка C, не лежащая на AB, что каждую точку X на AB можно соединить с C кратчайшей, проходящей в области G. Кратчайшие CX могут отходить от точки X по одну или по обе стороны от AB. Относительно этих кратчайших имеют место следующие утверждения:*

1) *Если точки X сходятся к B, будучи всегда отличными от B, то углы ξ между CX и AX сходятся к определённому пределу и этот предел не больше угла α между AB и любой данной кратчайшей BC*[1]: $\lim\limits_{X\to B} \xi \leqslant \alpha$ (черт. 31).

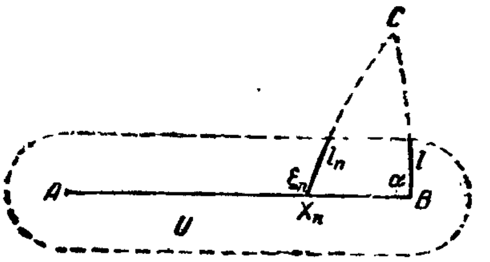
2) *Если последовательность точек X_n сходится к B и кратчайшие CX_n отходят от X_n по одну и ту же сторону от AB, то эти кратчайшие сходятся к определённой кратчайшей $\overline{BC}$, соединяющей точки B и C.* (Следовательно существуют максимум две такие кратчайшие $\overline{CB}$ и $\overline{\overline{CB}}$, которые являются пределами кратчайших CX при $X \to B$ $(X \neq B)$. Одна из кратчайших $\overline{BC}$, $\overline{\overline{BC}}$ будет пределом кратчайших CX, отходящих по одну сторону от AB, другая — пределом кратчайших CX, отходящих по другую сторону от AB. Стороны кратчайшей AB различаются очевидным образом, поскольку окрестность кратчайшей можно развернуть на плоскость, причём самая кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок.)

Доказательство. Возьмём окрестность U кратчайшей AB, развёртывающуюся на плоскость. При этом мы не будем делать различия между самой

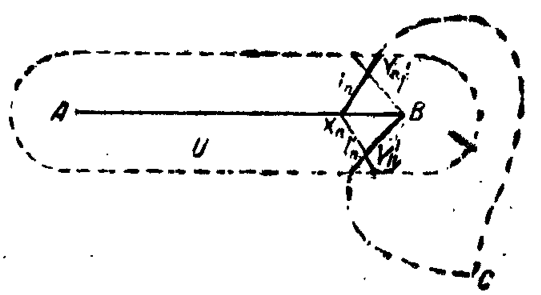
[1]) Кратчайших, соединяющих точки B и C, может быть несколько.

окрестностью U и её точками, с одной стороны, и развёрнутой окрестностью и её точками, с другой стороны. Если вокруг точки B (или A) полный угол меньше 2π, то мы разрезаем окрестность U по кратчайшей, исходящей из B и образующей с AB одинаковые углы на обе стороны. В таком случае развёрнутая на плоскость окрестность U хотя и не будет окружать точку B, но будет расположена симметрично относительно того прямолинейного отрезка, в который разворачивается кратчайшая AB.

Рассмотрим последовательность точек X_n, отличных от B и сходящихся к B, и пусть каждую точку X_n можно соединить с C кратчайшей CX_n так, что эти кратчайшие CX_n сходятся к некоторой кратчайшей $\overline{BC}$. Отрезки кратчайших CX_n и $\overline{BC}$, содержащиеся в окрестности U, переходят при развёртывании на плоскость в прямолинейные отрезки, и из сходимости кратчайших сле-



Черт. 32.



Черт. 33.

дует сходимость этих отрезков. Отсюда очевидно, что если ξ_n есть угол между CX_n и AX_n, а $\overline{\alpha}$ — угол между $\overline{BC}$ и AB, то

$$\overline{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \xi_n. \tag{1}$$

Пусть теперь BC — любая кратчайшая, соединяющая точки B и C, а α — угол, образуемый ею с AB. Докажем, что

$$\alpha \geqslant \overline{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \xi_n. \tag{2}$$

Допустим, что, напротив, $\alpha < \overline{\alpha}$. Тогда найдётся такое $\delta > 0$, что при всех достаточно больших n будет

$$\xi_n > \alpha + \delta.$$

Пусть l и l_n — отрезки кратчайших BC и CX_n, содержащиеся в окрестности U. В развёрнутой на плоскости окрестности U им соответствуют прямолинейные отрезки l и l_n, образующие с AB и AX_n углы α и ξ_n. Для этих отрезков имеются две возможности:

1) они расположены по одну сторону от AB (черт. 32);

2) они расположены по разные стороны от AB (черт. 33).

В первом случае из того, что $\xi_n > \alpha + \delta$, очевидно, следует, что как только точка X_n достаточно близка к B, так отрезки l и l_n пересекаются. Это обозначало бы, что пересекаются кратчайшие BC и CX_n. Но мы показали выше, что в многогранной метрике положительной кривизны выполняется условие неналегания кратчайших, в силу которого (по теореме § 3 гл. II) две кратчайшие, исходящие из одной точки C, не могут пересекаться. Следовательно, в первом случае расположения отрезков l и l_n предположение о том, что $\alpha < \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, приводит к противоречию. Тем самым должно быть $\alpha \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда отрезки l и l_n расположены по разные стороны от AB.

Построим отрезки l' и l_n', симметричные с отрезками l и l_n относительно AB (черт. 33). Тогда угол между AB и l' тоже равен α, а так как $\xi_n > \alpha + \delta$, то отрезки l' и l_n будут пересекаться, как только точка X_n будет достаточно близкой к B. Покажем, что это невозможно.

Если отрезки l' и l_n пересекаются в точке Y_n, то по симметрии отрезки l и l_n' пересекаются в симметричной точке Y_n'. Кратчайшие CX_n и CB разбиваются этими точками на два отрезка каждая:

$$CX_n = CY_n + Y_nX_n, \quad CB = CY_n' + Y_n'B.$$

Рассмотрим, вместе с тем, линию $CY_n + Y_nB$, образованную отрезком CY_n кратчайшей CX_n и отрезком Y_nB. Она соединяет точки C и B, а так как CB — кратчайшая, то

$$CY_n + Y_nB \geqslant CB = CY_n' + Y_n'B.$$

Так как по симметрии $Y_nB = Y_n'B$, то

$$CY_n \geqslant CY_n'.$$

Но точки Y_n и Y_n' играют совершенно одинаковую роль, а потому должно быть также $CY_n' \geqslant CY_n$ (достаточно вместо линии $CY_n + Y_nB$ рассмотреть линию $CY_n' + Y_n'X_n$ и сравнить её с кратчайшей CX_n). Следовательно, отрезки CY_n и CY_n' кратчайших CX_n и CB равны. Таким образом

$$CB = CY_n' + Y_n'B = CY_n + Y_nB,$$

т. е. линия $CY_n + Y_nB$ также есть кратчайшая, соединяющая точки B и C. Но она налегает на кратчайшую CX_n по её отрезку CY_n, что противоречит условию неналегания кратчайших. Полученное противоречие показывает, что отрезки l и l_n' не могут пересекаться. Следовательно, наше предположение о том, что $\alpha < \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, невозможно, и тем самым во втором случае также

$$\alpha \geqslant \lim_{n\to\infty} \xi_n.$$

Пусть теперь точки X (лежащие на AB и отличные от B) сходятся к B произвольным образом. Допустим, что углы ξ между кратчайшими CX и AX не сходятся к пределу. Тогда можно выбрать две последовательности точек X: X_n и X_n' так, что 1) пределы соответствующих углов ξ_n и ξ_n' существуют и $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n > \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n'$; 2) кратчайшие CX_n и CX_n' сходятся соответственно к некоторым кратчайшим $\overline{CB}$ и $\overline{\overline{CB}}$. (Второму условию можно удовлетворить потому, что в силу компактности рассматриваемой области из всякой последовательности кратчайших можно выбрать сходящуюся последовательность.) Если $\bar{\alpha}$ и $\bar{\bar{\alpha}}$ — углы, образуемые кратчайшими $\overline{CB}$ и $\overline{\overline{CB}}$ с AB, то по формуле (1)

$$\bar{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \xi_n, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \xi'_n.$$

А так как $\bar{\alpha}$ есть угол между кратчайшей $\overline{\overline{BC}}$ и AB, то по формуле (2)

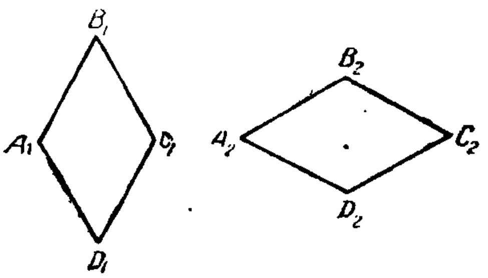
$$\bar{\bar{\alpha}} \geqslant \lim_{n\to\infty} \xi_n,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \xi'_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, в то время как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} \xi'_n < \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Полученное противоречие показывает, что углы должны сходиться к определённому пределу. Вместе с тем, по формуле (2) $\lim\limits_{X\to B} \xi$ не превосходит угла α между

AB и любой кратчайшей BC. Следовательно, первое утверждение леммы доказано. Кроме того, этим доказано также, что каждая кратчайшая BC, являющаяся пределом последовательности кратчайших CX, образует с AB один и тот же угол $\alpha = \lim\limits_{X \to B} \xi$. Но таких кратчайших BC может быть, очевидно, не более двух: одна образует угол α по одну сторону от AB, другая — по другую. Поэтому, если кратчайшие CX идут по одну сторону от AB, то они сходятся к соответствующей кратчайшей BC[1]). Этим доказано также второе утверждение нашей леммы.

Мы воспользуемся ещё следующей простой леммой из планиметрии:

Лемма 2. *Если у двух выпуклых четыреугольников на плоскости стороны соответственно равны, то либо все их углы также соответственно равны, либо в любом из них углы, бóльшие, чем соответственные углы в другом, разделяются углами, меньшими, чем соответственные углы в другом* (черт. 34).



Черт. 34.

К выпуклым четыреугольникам мы присоединяем предельные их случаи, когда некоторые из углов равны π или нулю, т. е. допускается вырождение четыреугольника в треугольник с принятой за вершину одной точкой на стороне, или даже в отрезок, который должен при этом считаться состоящим из четырёх сторон: одна пара сторон налегает на другую.

Доказательство леммы. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — два выпуклых четыреугольника на плоскости. Вершины их обозначены в циклическом порядке. Пусть их соответственные стороны равны, т. е. $A_1B_1 = A_2B_2$ и т. д.

Если, скажем, угол A_1 в первом четыреугольнике больше угла A_2 во втором, то диагональ B_1D_1 больше диагонали B_2D_2. Это следует из теоремы: если у двух треугольников две стороны одного равны двум сторонам другого, а углы, заключённые между этими сторонами, не равны, то против большего угла лежит бóльшая сторона. А если B_1D_1 больше B_2D_2, то по обратной теореме угол C_1 больше угла C_2.

Сумма углов четыреугольника всегда равна 2π. Поэтому хотя бы один из углов B_1 или D_1 в первом четыреугольнике должен быть меньше соответствующего угла во втором четыреугольнике. Но если, скажем, угол B_1 меньше угла B_2, то, применяя ту же теорему о треугольниках, получим, что тогда также угол D_1 меньше угла D_2 и лемма доказана.

Теорема. *Во всякой компактной области в многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны выполняется условие выпуклости*, т. е. если кратчайшие L и M, исходящие из одной точки O, лежат в некоторой компактной области G и каждые две их точки можно соединить кратчайшей, проходящей в G, то для этих кратчайших L, M угол $\gamma(x, y)$ оказывается невозрастающей функцией x и y.

(На самом деле ограничение компактной областью является лишним: условие выпуклости выполняется вообще в многогранной метрике положительной кривизны; но только мы не доказываем здесь этой более общей теоремы.)

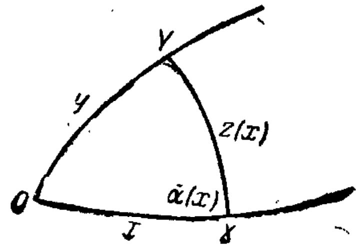
Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $\gamma(x, y)$ при любом постоянном y оказывается невозрастающей функцией x, т. е. $\gamma(x_1, y) \geqslant \gamma(x_2, y)$ при $x_1 < x_2$. Тогда, поскольку x и y играют одинаковую роль, мы можем заключить, что $\gamma(x, y_1) \geqslant \gamma(x, y_2)$ при $y_1 < y_2$ и, следовательно, при любых

[1] Не сходиться они не могут, так как по компактности области G из всякой последовательности кратчайших CX_n можно выбрать сходящуюся последовательность.

$x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ будет $\gamma(x_1, y_1) \geqslant \gamma(x_2, y_1) \geqslant \gamma(x_2, y_2)$, т. е. $\gamma(x, y)$ — невозрастающая функция x и y.

Итак, выберем произвольную точку Y внутри кратчайшей M и, закрепив её, оставим переменной только точку X. Тогда, так как y будет постоянно, мы можем для краткости опустить его в качестве аргумента и вместо $\gamma(x, y)$ писать $\gamma(x)$, а длину кратчайшей XY обозначать $z(x)$. Под кратчайшей XY мы понимаем любую кратчайшую, соединяющую точки X и Y и проходящую в данной компактной области G.

Пусть $\overline{\alpha}(x)$ — угол между кратчайшей XY и отрезком OX кратчайшей L. Так как при данном положении точки X кратчайших XY может быть несколько, то $\overline{\alpha}(x)$ будет, вообще говоря, неоднозначной функцией x, и если не будет оговорено противное, то под $\overline{\alpha}(x)$ можно понимать угол между любой из кратчайших XY и отрезком OX кратчайшей L (черт. 35). Соответствующий угол в плоском треугольнике со сторонами x, y, $z(x)$, т. е. угол между сторонами, равными x и $z(x)$, мы будем обозначать через $\alpha(x)$. Это $\alpha(x)$ будет однозначной и непрерывной функцией x, потому что расстояние $z(x) = XY$ есть однозначная и непрерывная функция x[1]).



Черт. 35.

После этих предварительных замечаний обратимся собственно к доказательству теоремы. Мы будем доказывать одновременно два утверждения:

(A) $\gamma(x)$ *есть невозрастающая функция* x,

(B) *При всех* x $\alpha(x) \leqslant \overline{\alpha}(x)$, т. е. $\alpha(x)$ не больше любого из значений $\overline{\alpha}(x)$.

Это второе утверждение будет нужно при доказательстве первого.

Сначала докажем оба утверждения для достаточно малых x.

Если точка X достаточно близка к O, то кратчайшие OX, OY, XY ограничивают треугольник, который можно развернуть на плоскость. Действительно, так как имеет место условие неналегания кратчайших, то отрезок OY кратчайшей M есть единственная кратчайшая, соединяющая точки O и Y, и когда точка X стремится к O, кратчайшая XY должна сходиться к OY. Вместе с тем окрестность кратчайшей M можно развернуть на плоскость, а тогда и весь треугольник OXY развернётся на плоскость, На плоскости это будет треугольник со сторонами $x, y, z(x)$, и его угол, лежащий против стороны z, есть $\gamma(x)$, а угол, лежащий против стороны y, есть $\alpha(x)$. Пока треугольник OXY можно развернуть на плоскость, $\gamma(x)$, очевидно, остаётся постоянным ($\gamma(x)$ равно углу при O в треугольнике OXY), а $\alpha(x)$ равно углу $\overline{\alpha}(x)$ между OX и XY. Следовательно, при достаточно малых x

$$\gamma(x) = \text{const.}, \quad \alpha(x) = \overline{\alpha}(x),$$

т. е. оба утверждения (A) и (B) верны при малых x. Допустим, что x_0 — наибольшее число, для которого утверждения (A) и (B) верны на интервале $0 < x < x_0$, и докажем, что x_0 должно равняться длине a кратчайшей L, т. е. докажем, что оба утверждения верны на всём протяжении кратчайшей L.

Для доказательства допустим противное, т. е. допустим, что $x_0 < a$, так что соответствующая точка X_0 лежит внутри кратчайшей L. Так как $\gamma(x)$ есть непрерывная функция x, то она будет невозрастающей также на всём замкнутом справа интервале $0 < x \leqslant x_0$.

[1]) Не исключено, что кратчайшая XY налегает на L и M. Тогда $\gamma(x) = \pi$, $\alpha(x) = \overline{\alpha}(x) = 0$. Точно так же могло бы быть даже, что L и M налегают друг на друга. (В этом случае, однако, очевидно, что $\gamma(x)$ всегда равно нулю, и тем самым теорема верна.) Не исключая этих особенностей, мы не будем, однако, на них останавливаться. Наши рассуждения хотя и будут излагаться так, как если бы эти случаи не имели места, тем не менее будут иметь силу и в этих особых случаях.

Неравенство (В) верно также при $x = x_0$. Действительно, так как $\alpha(x)$ есть непрерывная функция x, то

$$\alpha(x_0) = \lim_{x \to x_0} \alpha(x). \tag{3}$$

С другой стороны, по лемме 1, когда точки X сходятся к X_0 слева, то углы $\bar{\alpha}(x)$ сходятся к пределу, который не больше любого из значений $\bar{\alpha}(x_0)$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} \bar{\alpha}(x) \leqslant \bar{\alpha}(x_0). \tag{4}$$

А так как, по предположению, $\alpha(x) \leqslant \bar{\alpha}(x)$ при $x < x_0$, то из (3) и (4) следует, что

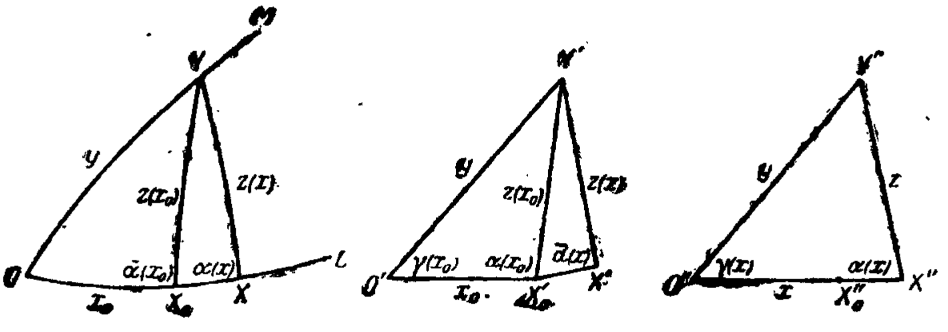
$$\alpha(x_0) \leqslant \bar{\alpha}(x_0).$$

Итак, на всём замкнутом справа интервале $0 < x \leqslant x_0$ $\gamma(x)$ есть невозрастающая функция, а углы $\alpha(x)$ и $\bar{\alpha}(x)$ удовлетворяют неравенству (В): $\alpha(x) \leqslant \bar{\alpha}(x)$.

Докажем теперь, что если x достаточно близко к x_0 и больше x_0, то точно так же

$$\gamma(x_0) \geqslant \gamma(x) \quad \text{и} \quad \alpha(x) \leqslant \bar{\alpha}(x).$$

Для доказательства рассмотрим точки X, лежащие на L справа от X_0. Согласно лемме 1, существует максимум две кратчайшие X_0Y, являющиеся пределами кратчайших XY при X, сходящихся к X_0 справа. Кратчайшие XY, идущие с од-



Черт. 36.

ной стороны от кратчайшей L, заведомо сходятся к соответствующей кратчайшей X_0Y. Поэтому, если точка X расположена достаточно близко к X_0 справа, то кратчайшая XY достаточно близка к соответствующей кратчайшей X_0Y. А так как окрестность этой кратчайшей X_0Y можно развернуть на плоскость, то кратчайшие X_0Y, XY ограничивают треугольник X_0XY, который можно развернуть на плоскость. Угол при вершине X_0 в этом треугольнике равен $\pi - \bar{\alpha}(x_0)$.

Построим на плоскости треугольник $O'X_0'Y'$ со сторонами, равными x_0 y, $z(x_0)$:

$$O'X_0' = OX_0 = x_0, \quad O'Y' = OY = y, \quad X_0'Y' = X_0Y' = z(x_0).$$

К этому треугольнику приложим по стороне $X_0'Y'$, развёрнутой на плоскость, треугольник X_0XY так, чтобы его вершина X_0 совпала с X_0', а вершина Y — с Y_0'. Получим четыреугольник $O'X_0'X'Y'$ (черт. 36).

Докажем, что все углы этого четыреугольника не превосходят π. Для углов при вершинах O' и X' это очевидно. Угол при вершине X_0' состоит из углов треугольников $O'X_0'Y'$ и $X'X_0'Y'$. Эти углы равны соответственно $\alpha(x_0)$ и $\pi - \alpha(x_0)$. А так как] $\alpha(x_0) \leqslant \bar{\alpha}(x_0)$, то сумма этих углов не большее π. (Не исключается, что она равна π, и тогда наш четыреугольник имеет один угол, равный π.) Наконец, так как $O'X_0'+X_0'X'=OX$, а $O'Y'+Y'X'=OY+YX$ и OX — кратчайшая, то

$$O'X_0'+X_0'X'\leqslant O'Y'+Y'X'.$$

Поэтому угол при вершине Y' тоже не больше π, так как иначе имело бы место обратное неравенство.

Следовательно, все углы четыреугольника $O'X'_0X'Y'$ не больше π и четыреугольник — выпуклый.

Рассмотрим теперь ещё треугольник $O''X''Y''$ со сторонами

$$O''X''=x,\quad O''Y''=y,\quad X''Y''=z(x).$$

Так как $x=OX=O'X_0'+X_0'X'$, то на стороне $O''X''$ этого треугольника можно взять точку X_0'' такую, что

$$O''X_0''=O'X_0',\qquad X_0''X''=X_0'X'.$$

Тогда наш треугольник превратится в четыреугольник $O''X_0''X''Y''$ со сторонами, равными сторонам четыреугольника $O'X_0'X'Y'$. Угол при вершине X_0'' в четыреугольнике $O''X_0''X''Y''$ равен π, а угол при вершине X_0' в четыреугольнике $O'X_0'X'Y'$ не больше π. Поэтому, в силу леммы 2, для углов при вершинах O и O'', X' и X'' имеют место неравенства:

$$\angle O'\geqslant\angle O'',\qquad \angle X'\geqslant\angle X''.$$

Но угол $\angle O'$ есть угол в треугольнике со сторонами x_0, y, $z(x_0)$, т. е. $\gamma(x_0)$, а угол $\angle O''$ есть угол в треугольнике со сторонами x, y, $z(x)$, т. е. $\gamma(x)$. Следовательно,

$$\gamma(x_0)\geqslant\gamma(x). \tag{5}$$

Угол $\angle X'$ есть угол в треугольнике $X_0'X'Y'$, т. е. в развёрнутом на плоскость треугольнике X_0XY, и поэтому он равен $\bar\alpha(x)$. Угол же $\angle X''$ есть угол в треугольнике $O''X''Y''$ со сторонами x, y, $z(x)$, т. е. угол $\alpha(x)$. Следовательно,

$$\bar\alpha(x)\geqslant\alpha(x). \tag{6}$$

Возьмём теперь какое-нибудь $x_1>x_0$ так, что при всех $x<x_1$ верно (6). Покажем, что $\gamma(x)$ есть невозрастающая функция на всём интервале от 0 до x_1. Так как это предполагается верным на интервале от 0 до x_0, то достаточно доказать, что $\gamma(x)$ не возрастает на отрезке от x_0 до x_1. Для этого возьмём в этом отрезке два значения $x'<x''$. В силу неравенства (6) $\bar\alpha(x')\geqslant\alpha(x')$. Поэтому, подставляя в проведённом выше рассуждении x' на место x_0 и x'' на место x, мы получим неравенство, совершенно аналогичное неравенству (5):

$$\gamma(x')\geqslant\gamma(x'').$$

Следовательно, на интервале $(0, x_1)$, большем интервала $(0, x_0)$, функция $\gamma(x)$ не возрастает и, по неравенству (6), $\bar\alpha(x)\geqslant\alpha(x)$. Таким образом, x_0 не может быть верхней границей тех интервалов, на которых верны оба утверждения. Следовательно, они верны на протяжении всей кратчайшей L, и теорема доказана.

Так как замкнутый выпуклый многогранник компактен, имеет многогранную метрику положительной кривизны и всякие две его точки можно соединить кратчайшей, то, применяя к нему доказанную теорему, мы можем сказать, что *на всяком замкнутом выпуклом многограннике условие выпуклости выпол-*

няется в целом. «В целом» в отличие от «в малом» означает, что для применения условия выпуклости нет надобности ограничиваться малыми отрезками кратчайших L и M, поскольку каждые две точки на L и M соединимы кратчайшей.

§ 3. Условие выпуклости для метрики выпуклой поверхности.

Теперь мы докажем, что *метрика всякой замкнутой выпуклой поверхности удовлетворяет условию выпуклости в целом.* Для этого докажем сначала несколько более слабое утверждение.

Лемма 1. *Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность и P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$ — сходящаяся к F последовательность замкнутых выпуклых многогранников. Пусть кратчайшие L и M на F, исходящие из точки O, являются пределами кратчайших L_n и M_n, исходящих из точек O_n на многогранниках P_n, причём, конечно, точки O_n сходятся к O. Тогда для кратчайших L и M выполняется условие выпуклости, т. е. угол $\gamma(x, y)$, определённый для них так, как это делается в условии выпуклости, является невозрастающей функцией x и y.*

(Эта лемма слабее требуемого результата в том отношении, что в ней кратчайшие L и M — не любые, а такие, которые являются пределами кратчайших на многогранниках P_n.)

Доказательство. Пусть X и Y — две точки внутри кратчайших L и M, и $\rho_F(OX) = x$, $\rho_F(OY) = y$, $\rho_F(XY) = z(x, y)$. Так как кратчайшие L_n и M_n на многогранниках P_n сходятся к L и M, то на них, во всяком случае, начиная с достаточно большого n, имеются точки X_n, Y_n такие, что

$$\rho_{P_n}(O_nX_n) = x, \quad \rho_{P_n}(O_nY_n) = y.$$

Эти точки сходятся соответственно к точкам X и Y [1]), а потому в силу теоремы о сходимости метрик

$$\lim_{n \to \infty} \rho_{P_n}(X_nY_n) = \rho_F(XY)$$

или

$$\lim_{n \to \infty} z_n(x, y) = z(x, y).$$

Поэтому угол $\gamma_n(x, y)$ в плоском треугольнике со сторонами x, y, $z_n(x, y)$ сходятся к углу $\gamma(x, y)$ в треугольнике со сторонами x, y, $z(x, y)$. Иными словами, функции $\gamma_n(x, y)$ сходятся к $\gamma(x, y)$. А так как на многогранниках условие выпуклости выполняется, то функции $\gamma_n(x, y)$ не возрастающие. Значит их предел $\gamma(x, y)$ тоже есть невозрастающая функция, что и требовалось доказать.

Мы видим, что на такие кратчайшие L и M, которые являются пределами кратчайших на многогранниках, условие выпуклости переносится просто. Вся трудность состоит в том, чтобы доказать, что для каждых двух кратчайших L и M, исходящих из одной точки O на поверхности F, можно указать сходящуюся к ним последовательность пар кратчайших, исходящих из точек O_n на многогранниках P_n.

Для этого докажем сначала ещё три леммы о кратчайших, удовлетворяющих условиям леммы 1.

Лемма 2. *Между кратчайшими L и M, удовлетворяющими условиям леммы 1, существует определённый угол, который равен нулю лишь в том случае, когда они налегают друг на друга, т. е. когда одна есть часть другой либо обе совпадают.*

---

[1]) Пределы точек X_n и Y_n лежат на L и M в силу сходимости L_n и M_n к L и M. Из теоремы о сходимости метрик вытекает, что расстояния этих пределов от точки O равны x и y. Следовательно, они и суть точки X и Y.

Доказательство. По определению угла между кратчайшими L и M, данному в § 7 гл. I, этот угол есть предел угла $\gamma(x, y)$ при $x, y \to 0$. А так как по лемме 1 $\gamma(x, y)$ есть невозрастающая функция x и y, то этот предел существует. Следовательно, угол между кратчайшими L и M существует.

Допустим, что кратчайшие L и M не налегают друг на друга. Тогда на них можно указать различные точки X_1 и Y_1, равноудалённые от O, т. е. такие, что $\rho_F(OX_1) = x_1 = \rho_F(OY_1) = y_1$. Так как точки X_1 и Y_1 различны, то $\rho_F(X_1Y_1) = z(x_1, y_1) \neq 0$, поэтому и соответствующий угол $\gamma(x_1, y_1)$ не равен нулю. А так как с уменьшением x и y угол $\gamma(x, y)$ не убывает, то $\lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y) \geqslant \gamma(x_1, y_1) > 0$. А это и значит, что угол между кратчайшими L и M не равен нулю. Лемма доказана.

Лемма 3. *В условиях леммы 1 угол α между кратчайшими L и M не больше нижнего предела углов α_n между кратчайшими L_n и M_n:*

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \alpha_n.$$

Доказательство. По определению угла, $\alpha = \lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y)$, где $\gamma(x, y)$ имеет то же значение, что и раньше. Поэтому, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы при достаточно малых x и y будем иметь

$$\alpha < \gamma(x, y) + \varepsilon. \tag{1}$$

Вместе с тем, доказывая лемму 1, мы убедились, что углы $\gamma_n(x, y)$, определённые для кратчайших L_n и M_n, сходятся к $\gamma(x, y)$. Поэтому при достаточно больших n и данных x и y

$$\gamma(x, y) < \gamma_n(x, y) + \varepsilon. \tag{2}$$

Но каждое $\gamma_n(x, y)$ есть неубывающая функция x и y, а потому

$$\gamma_n(x, y) \leqslant \lim_{x, y \to 0} \gamma_n(x, y) = \alpha_n. \tag{3}$$

Сравнивая неравенства (1), (2), (3), мы получаем, что при достаточно больших n

$$\alpha < \alpha_n + 2\varepsilon.$$

Так как ε можно взять произвольно малым, то отсюда следует, что

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \alpha_n,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть на выпуклой поверхности F из точки O исходят три кратчайшие L, M, N, являющиеся пределами кратчайших L_n, M_n, N_n, исходящих из точек O_n на выпуклых многогранниках P_n, которые сходятся к F. Тогда сумма углов между кратчайшими L, M, N не может быть больше 2π.*

Доказательство. Сумма углов α_n, β_n, γ_n между L_n и M_n, M_n и N_n, N_n и L_n не может быть больше 2π, потому что полный угол вокруг точки на выпуклом многограннике всегда $\leqslant 2\pi$[1]). Следовательно,

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \leqslant 2\pi. \tag{4}$$

---

[1]) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ может не равняться полному углу вокруг точки O_n, потому что, например, кратчайшая N_n может проходить в угле между L_n и M_n. В этом случае $\alpha_n = \beta_n + \gamma_n$, а $\alpha_n \leqslant \pi$, так что $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n \leqslant 2\pi$.

Но по предыдущей лемме

$$\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n \geqslant \alpha, \quad \varliminf_{n\to\infty} \beta_n \geqslant \beta, \quad \varliminf_{n\to\infty} \gamma_n \geqslant \gamma,$$

где α, β, γ обозначают углы между кратчайшими L и M, M и N, N и L. Поэтому, переходя в неравенстве (4) к пределу, мы получим, что

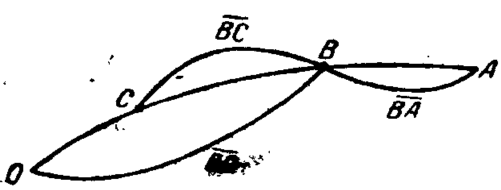
$$\alpha+\beta+\gamma \leqslant 2\pi,$$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем последнюю лемму, которая позволит сразу перенести условие выпуклости с многогранников на любые выпуклые поверхности.

Лемма 5. *Пусть последовательность замкнутых выпуклых многогранников P_n сходится к замкнутой выпуклой поверхности F. Пусть OA — кратчайшая на F, соединяющая точки O и A, и пусть точка B лежит внутри кратчайшей OA. Тогда, если последовательности точек O_n и B_n, лежащих на многогранниках P_n, сходятся к точкам O и B, то кратчайшие O_nB_n на этих многогранниках сходятся к отрезку OB кратчайшей OA.*

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению леммы, что кратчайшие O_nB_n не сходятся к отрезку OB кратчайшей OA. Тогда из них можно выбрать последовательность $O_{n_i}B_{n_i}$, не содержащую никакой последовательности, сходящейся к OB. Вместе с тем, согласно теореме 3 § 1, из последовательности кратчайших $O_{n_i}B_{n_i}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой кратчайшей на F, соединяющей точки O и B. Эта кратчайшая будет, следовательно, отлична от OB и мы обозначим её $\overline{OB}$. Исключив те кратчайшие, которые не вошли в выбранную нами подпоследовательность, сходящуюся к $\overline{OB}$, мы можем просто считать, что кратчайшие O_nB_n на многогранниках P_n сходятся к $\overline{OB}$.



Черт. 37.

Пусть C — какая-либо точка на OB, не принадлежащая $\overline{OB}$, и пусть $\overline{CB}$ — кратчайшая на поверхности F, соединяющая точки C и B, являющаяся пределом некоторой последовательности, выбранной из кратчайших C_nB_n на многогранниках P_n. (Точки B_n суть концы тех кратчайших, пределом которых является $\overline{OB}$, точки же C_n — какие угодно, сходящиеся к C.) Опять исключив те кратчайшие, которые не вошли в выбранную последовательность, мы можем считать, что кратчайшие C_nB_n на многогранниках P_n сходятся к $\overline{CB}$.

Наконец, пусть $\overline{BA}$ — кратчайшая на F, соединяющая точки B и A и являющаяся пределом некоторой последовательности, выбранной из кратчайших B_nA_n на многогранниках P_n. (Точки B_n — те же, что и раньше, точки же A_n — любые, сходящиеся к A.) Опять произведя исключение лишних кратчайших, можно считать, что кратчайшие B_nA_n на многогранниках P_n сходятся к $\overline{BA}$.

Итак, мы пришли к следующему положению (черт. 37).

Из точки B на поверхности F исходят три кратчайшие $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BO}$, являющиеся пределами кратчайших, исходящих из точек B_n на многогранниках P_n. В силу леммы 4, сумма углов между этими кратчайшими не может быть больше 2π. Однако мы сейчас покажем, что она должна быть больше 2π. Полученное противоречие докажет неправильность сделанного нами предположения о том, что отрезок OB кратчайшей OA не есть предел кратчайших O_nB_n на многогранниках P_n.

Покажем, что линия $\overline{OB}+\overline{BA}$, составленная из кратчайших $\overline{OB}$ и $\overline{BA}$, сама является кратчайшей. Действительно, длины $\overline{OB}$ и OB равны, потому что обе эти линии — кратчайшие, соединяющие одни и те же точки. (Без черты обозначаются отрезки кратчайшей OA.) По той же причине $\overline{BA}$ и BA имеют равные длины. Следовательно, длина $\overline{OB}+\overline{BA}$ равна длине OA, т. е. равна длине кратчайшей OA, а это значит, что сама линия $\overline{OB}+\overline{BA}$ — кратчайшая.

Если две кратчайшие являются продолжением одна другой и вместе образуют кратчайшую, то угол между ними равен π, потому что в этом случае угол $\gamma(x, y)$ во вспомогательном плоском треугольнике всегда равен π, поскольку $z=x+y$. Поэтому угол между $\overline{OB}$ и $\overline{BA}$ равен π.

Совершенно так же докажем, что угол между $\overline{CB}$ и $\overline{BA}$ тоже равен π (стоит лишь в проведённом рассуждении заменить O на C).

Наконец, по лемме 2, угол между кратчайшими $\overline{OB}$ и $\overline{CB}$ не равен нулю, так как, по самому их построению, они не налегают друг на друга.

Итак, получилось, что сумма всех трёх углов между всеми кратчайшими $\overline{OB}, \overline{CB}, \overline{AB}$ должна быть больше 2π. Это противоречие доказывает, что наше исходное предположение неверно и лемма доказана.

Теперь докажем нашу основную теорему:

Теорема 1. *На всякой замкнутой выпуклой поверхности выполняется условие выпуклости в целом.*

Доказательство. Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из точки O на замкнутой выпуклой поверхности F. Возьмём внутри них точки X_0 и Y_0. Тогда, по доказанной только что лемме, отрезки OX_0 и OY_0 кратчайших L и M можно представить, как пределы кратчайших, исходящих из точек O_n на некоторых замкнутых выпуклых многогранниках P_n, сходящихся к F. А в таком случае, по лемме 1, для кратчайших OX_0 и OY_0 выполняется условие выпуклости. Иными словами, угол $\gamma(x, y)$, определёнными для кратчайших L и M, оказывается невозрастающей функцией в интервале $0 < x \leqslant x_0$, $0 < y \leqslant y_0$, который соответствует отрезкам OX_0 и OY_0. Но точки X_0 и Y_0 можно выбрать сколь угодно близко к концам кратчайших L и M. Поэтому $\gamma(x, y)$ является невозрастающей функцией на всём протяжении этих кратчайших. Так как $\gamma(x, y)$ есть непрерывная функция, то это верно также включая концы кратчайших L и M. Таким образом, теорема доказана.

Если F — произвольная выпуклая поверхность и O — точка на ней, то, беря ограниченную часть F, содержащую точку O, и дополняя её до замкнутой выпуклой поверхности F_0, мы можем взять столь малую окрестность точки O, что расстояния в ней, измеренные на F и на F_0, совпадают. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 2. *У каждой точки на выпуклой поверхности существует окрестность, в которой выполняется условие выпуклости.*

Пусть теперь F — бесконечная полная выпуклая поверхность и L, M — две кратчайшие на ней, исходящие из одной точки O. Мы можем пересечь F сферой S, содержащей кратчайшие L и M и вместе с тем настолько большой, чтобы расстояние её от кратчайших L и M было сколь угодно большим. (Достаточно взять центр сферы в точке O и радиус больше суммы длин этих кратчайших на произвольную заданную величину.) Часть поверхности F, отсекаемая сферой S, вместе с частью сферы S, вырезаемой поверхностью F, образует замкнутую выпуклую поверхность F_0 и, если сфера S взята достаточно большой, то все расстояния между точками кратчайших L и M будут на F и F_0 одни и те же. Поэтому из теоремы 1 следует также

Теорема 3. *Метрика бесконечной полной выпуклой поверхности удовлетворяет условию выпуклости в целом.*

Возможно, что кратчайшие, исходящие из одной точки на бесконечной полной выпуклой поверхности, можно продолжать до бесконечности, оставляя их кратчайшими, как, например, меридианы любой бесконечной поверхности вращения.

Тогда угол $\gamma(x, y)$ будет, очевидно, неубывающей функцией на всём протяжении этих бесконечно продолженных кратчайших.

В проведённом выше доказательстве того, что условие выпуклости выполняется на замкнутой выпуклой поверхности, играли роль только два факта:

1) Выполнение условия выпуклости в многогранной метрике положительной кривизны.

2) Возможность приближения метрики выпуклой поверхности метриками выпуклых многогранников, т. е. многогранными метриками положительной кривизны.

Поэтому, обобщая наши выводы, можно притти к заключению, что условие выпуклости выполняется во всяком многообразии, снабжённом внутренней метрикой, являющейся пределом многогранных метрик положительной кривизны. Наиболее общий получающийся здесь результат точно можно формулировать следующим образом:

Пусть в некотором многообразии R задана внутренняя метрика $\rho(XY)$. Пусть эта метрика такова, что в том же многообразии существуют сходящиеся к ней многогранные метрики положительной кривизны $\rho_n(XY)$, т. е. для каждых X и Y $\rho(XY) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(XY)$. Пусть, наконец, L и M — две кратчайшие в смысле метрики ρ, исходящие из одной точки O и такие, что любые две точки X и Y на них можно соединить кратчайшей. Тогда угол $\gamma(x, y)$, определённый для них так, как это сделано в формулировке условия выпуклости, является невозрастающей функцией x и y.

Так как во всяком многообразии с внутренней метрикой кратчайшей можно соединить достаточно близкие точки, а если метрика полная, — то и любые две точки, то из формулированной теоремы следует:

Во всяком многообразии с внутренней метрикой, являющейся пределом многогранных метрик положительной кривизны, выполняется условие выпуклости в малом. Если же метрика — полная, то условие выполняется в целом.

Эти теоремы особенно подчёркивают чисто внутренне геометрический характер всех наших предшествующих выводов. Точные их доказательства могут быть сравнительно легко получены на основании соображений, аналогичных тем, которые мы применяли выше. Читатель при желании сам может это сделать. Но так как мы занимаемся выпуклыми поверхностями, то эти общие теоремы выходят из рамок нашей темы и не будут дальше использованы.

§ 4. Следствия условия выпуклости.

Мы уже говорили, что условие выпуклости является характерным именно для выпуклых поверхностей и что их внутренняя геометрия может быть развита на основе одного этого условия, не считая, конечно, общих свойств всякой внутренней метрики. Однако такой путь не всегда оказывается самым простым и коротким, а потому мы будем иногда от него отступать. Здесь же мы выведем ряд важных теорем внутренней геометрии выпуклых поверхностей, непосредственно вытекающих из условия выпуклости.

Теорема 1. *Между двумя кратчайшими на выпуклой поверхности, исходящими из одной точки, существует определённый угол, всегда отличный от нуля, кроме того тривиального случая, когда обе кратчайшие налегают друг на друга.*

Доказательство. По принятому нами определению угла между кратчайшими, он есть предел угла $\gamma(x, y)$, фигурирующего в условии выпуклости при x и y стремящихся к нулю. По условию выпуклости, $\gamma(x, y)$ не убывает с уменьшением x и y, а потому $\lim\limits_{x,y\to 0} \gamma(x, y)$ существует.

Допустим, что угол между кратчайшими L и M равен нулю, т. е. $\lim\limits_{x,y\to 0} \gamma(x, y) = 0$. Тогда, так как $\gamma(x, y)$ не возрастает с ростом x и y, то

$\gamma(x, x)=0$ при всяком x. Но $\gamma(x, x)$ есть угол в плоском равнобедренном треугольнике с боковой стороной x и с основанием, равным расстоянию между точками на кратчайших L и M, удалёнными от их начала на расстояние x. Следовательно, эти точки при всяком x совпадают, т. е. кратчайшие L и M налегают друг на друга.

Теорема 2. *На выпуклой поверхности выполняется условие неналегания кратчайших, т. е. если две кратчайшие L и M, исходящие из общей точки O, совпадают на некотором отрезке OA, то одна из них есть часть другой.*

Доказательство. Допустим, что кратчайшие L и M, исходящие из точки O, совпадают на некотором отрезке. Пусть OA будет наибольший отрезок, на котором они совпадают; такой отрезок, очевидно, существует, поскольку кратчайшие суть замкнутые множества. Если OA есть одна из кратчайших L и M, то теорема верна.

Допустим, что отрезок OA не совпадает ни с одной из кратчайших L и M. Тогда на них есть различные точки X и Y, равноудалённые от O. Если точки X и Y достаточно близки к точке A, то их можно соединить кратчайшей и потому можно воспользоваться условием выпуклости. Положим $OA=a$, $OX=OY=x$, причём, по условию выбора точек X и Y, $x>a$. Тогда, по условию выпуклости, $\gamma(x, x) \leqslant \gamma(a, a)$. Но $\gamma(a, a)=0$, а потому также $\gamma(x, x)=0$, откуда, в силу определения угла γ, следует, что $\rho(XY)=0$. Следовательно, все точки X и Y кратчайших L и M, равноудалённые от O, совпадают. Это значит, что отрезок OA не может быть наибольшим отрезком, на котором кратчайшие L и M налегают друг на друга, если только он не простирается целиком на одну из этих кратчайших. Теорема доказана.

Так как на выпуклых поверхностях выполняется условие неналегания кратчайших, то выполняются также все его следствия, полученные в §§ 3—6 гл. II. Из этих следствий мы будем постоянно использовать простые свойства взаимного расположения кратчайших, выведенные в § 3 гл. II; результаты §§ 4—6 понадобятся нам позже.

Теорема 3. *Углы между сторонами треугольника на выпуклой поверхности не меньше соответствующих углов плоского треугольника со сторонами той же длины*[1]. (Соответствующие углы — это те, которые образованы соответственно равными сторонами.)

Мы докажем эту теорему в предположении, что к сторонам треугольника можно применять условие выпуклости. Так как мы доказали, что это условие выполняется на произвольной выпуклой поверхности «в малом» и на полной поверхности «в целом», то тем самым теорема будет доказана для достаточно малых треугольников на произвольной выпуклой поверхности и для любых треугольников на полных поверхностях. На самом деле теорема верна без всяких ограничений, но доказательство её в таком объёме требует дополнительных соображений.

Доказательство. Пусть ABC — треугольник на выпуклой поверхности со сторонами $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$. Пусть α — угол между его сторонами AB и AC, а α_0 — соответствующий угол плоского треугольника со сторонами той же длины. Возьмём на сторонах AB и AC переменные точки X, Y и определим угол $\gamma(x, y)$, фигурирующий в условии выпуклости. Тогда очевидно, что

$$\alpha_0=\gamma(b, c) \tag{1}$$

и вместе с тем

$$\alpha=\lim_{x, y \to 0} \gamma(x, y). \tag{2}$$

[1]) Угол между сторонами треугольника есть угол между кратчайшими и, следовательно, существует. Его следует отличать от угла треугольника, т. е. от угла сектора, ограниченного сторонами и содержащегося в треугольнике. Этот угол будет определён в следующей главе.

По условию выпуклости угол $\gamma(x, y)$ является невозрастающей функцией x и y. Поэтому

$$\gamma(b, c) \leqslant \lim_{x, y \to 0} \gamma(x, y), \tag{3}$$

откуда $\alpha_0 \leqslant \alpha$, что и требовалось доказать.

В доказательствах следующих теорем мы будем опираться не на условие выпуклости, а на теорему 3, потому что потом, при изучении абстрактной метрики положительной кривизны, мы сможем опираться именно на результат, заключающийся в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к выпуклой поверхности F. Пусть кратчайшие L_n и M_n, исходящие из точек O_n на поверхностях F_n, сходятся к кратчайшим L и M, исходящим из точки O на поверхности F (причём, конечно, точки O_n сходятся к точке O). Тогда, если α — угол между L и M, а α_n — угол между L_n и M_n, то*

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \alpha_n.$$

(В частности, все поверхности F_n могут совпадать с F и тогда получается теорема о сходимости углов на выпуклой поверхности. То, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$ может не существовать, а если и существует, то может быть больше α, показано в § 10 гл. I на примере куба.)

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать поверхности F_n и F замкнутыми. Для этого достаточно вырезать из данных поверхностей F_n и F конечные области, содержащие точки O_n и O, и дополнить эти области подходящим образом до замкнутых поверхностей. При этом метрика вблизи точек O_n и O не изменится, а следовательно, не изменятся также и углы между кратчайшими.

Пусть $\gamma(x, y)$ и $\gamma_n(x, y)$ — углы, определённые для кратчайших L и M, L_n и M_n так, как это делается в условии выпуклости. По определению угла, угол между L и M будет

$$\alpha = \lim_{x, y \to 0} \gamma(x, y).$$

Поэтому при всяком данном $\varepsilon > 0$ можно взять x и y столь малыми, чтобы было

$$\alpha < \gamma(x, y) + \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть X, Y — те точки на L и M, для которых $\rho(OX) = x$, $\rho(OY) = y$, где ρ — расстояние на поверхности F. Пусть X_n, Y_n — точки на L_n и M_n, сходящиеся к точкам X, Y. Тогда по теореме о сходимости метрик

$$\left.\begin{aligned} x_n = \rho_n(OX_n) &\to \rho(OX) = x, \\ y_n = \rho\ (OY_n) &\to \rho(OY) = y, \\ \rho_n(X_nY_n) &\to \rho(XY), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где ρ_n — расстояние на поверхности F_n.

Так как $\gamma_n(x, y)$ есть угол в плоском треугольнике со сторонами, равными $\rho_n(OX)$, $\rho_n(OY)$, $\rho_n(XY)$, а $\gamma(x, y)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами $\rho(OX)$, $\rho(OY)$, $\rho(XY)$, то из сходимостей (5) следует, что

$$\gamma(x, y) = \lim_{n \to \infty} \gamma_n(x_n, y_n). \tag{6}$$

Соединив точки X_n, Y_n кратчайшей, получим треугольник $O_nX_nY_n$ с углом α_n между сторонами O_nX_n и O_nY_n — отрезками кратчайших L_n, M_n. Так как

$\gamma_n(x_n, y_n)$ есть угол в плоском треугольнике со сторонами, равными сторонам треугольника $O_nX_nY_n$, то по теореме 3

$$\alpha_n \geqslant \gamma_n(x_n, y_n). \tag{7}$$

Отсюда, воспользовавшись равенством (6), заключаем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n \geqslant \lim_{n\to\infty} \gamma_n(x_n, y_n) = \gamma(x, y). \tag{8}$$

Сравнивая это соотношение с неравенством (4), получаем, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \alpha_n + \varepsilon > \alpha,$$

а так как ε произвольно, то, следовательно,

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Полученный результат представляет собою первую и основную теорему о сходимости углов; другие результаты будут получены в § 4 гл. IV, специально посвящённом исследованию сходимости углов.

Теорема 5. *Между каждыми двумя кратчайшими на выпуклой поверхности, исходящими из одной точки, существует угол в сильном смысле.*

Согласно определению, введённому в § 9 гл. I, это означает следующее. Пусть L и M — две кратчайшие на выпуклой поверхности, исходящие из точки O. Допустим, что каждые две точки X и Y на них можно соединить кратчайшей. Пусть X_n, Y_n — такая последовательность точек на L и M, отличных от O, что 1) $X_n \to O$, 2) кратчайшие X_nY_n сходятся к некоторой части кратчайшей M. Тогда, если $\gamma(x, y)$ — угол, фигурирующий в условии выпуклости, то $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(x_n, y_n)$ существует и равен углу α между кратчайшими L и M.

Возможно, что точки Y_n сходятся к O, так что не только $x_n \to 0$, но и $y_n \to 0$. Тогда кратчайшие X_nY_n сходятся к точке O, которая также есть часть кратчайшей M. Отсюда ясно, что данная теорема представляет собою усиление теоремы о существовании угла. Она показывает, что предел $\gamma(x, y)$ существует не только тогда, когда x и y стремятся к нулю, но также и в том случае, когда хотя бы одна из переменных x и y стремится к нулю, лишь бы только кратчайшие XY сходились к части одной из кратчайших M или L.

Если точки Y_n сходятся к некоторой внутренней точке A кратчайшей M, то кратчайшие X_nY_n заведомо сходятся к отрезку OA кратчайшей M, т. е. условие 2) для них автоматически выполняется. (Это вытекает из следствия 4 теоремы § 3 гл. II, которая основана на условии неналегания кратчайших, а последнее условие, как мы показали, выполняется.) Если же точки Y_n сходятся к концу кратчайшей M, то кратчайшие X_nY_n могут и не сходиться к M; следовательно, в этом случае условие 2) может не выполняться само собою. Легко убедиться в том, что если оно не выполнено, то утверждение теоремы также не выполняется [1]). Таким образом, это условие не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(x_n, y_n)$ равнялся α.

После этих замечаний обратимся к доказательству нашей теоремы.

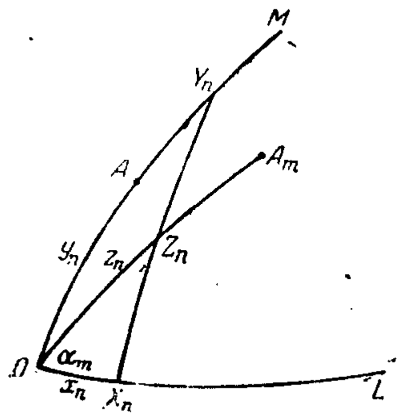
Мы можем предполагать, что точки Y_n сходятся к точке, отличной от O, потому что если они сходятся к O, то, как только что было указано, наша

[1]) Действительно, если $X_nY_n \to M'$, то по нашей теореме $\lim \gamma(x_n, y_n)$ равен углу между L и M'. Если M' не содержится в M, то, как легко показать, угол между L и M' отличен от угла между L и M.

теорема сводится к теореме существования угла. Тогда кратчайшие X_nY_n будут сходиться к некоторому отрезку кратчайшей M. Можно также предполагать, что кратчайшие L и M не налегают друг на друга, потому что в таком случае теорема тривиальна.

Так как каждая кратчайшая X_nY_n имеет с M общую точку Y_n, то из условия неналегания кратчайших следует, что имеют место только две возможности: либо кратчайшие X_nY_n и M не имеют других общих точек, либо X_nY_n налегает на M на всём отрезке OY_n. В последнем случае, обозначая через ρ метрику поверхности, мы будем иметь $\rho(X_nY_n)=\rho(OX_n)+\rho(OY_n)$. Поэтому плоский треугольник с такими сторонами вырождается в отрезок и его угол $\gamma(x_n, y_n)=\pi$. Если это положение имеет место хотя бы при одном n, то, очевидно, угол α между кратчайшими L и M равен π. Тогда, беря те n_i, для которых $\gamma(x_{n_i}, y_{n_i})=\pi$, мы будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(x_{n_i}, y_{n_i})=\alpha.$$



Черт. 38.

Поэтому остаётся рассмотреть такую последовательность кратчайших X_nY_n, что каждая из них не имеет с M никаких других общих точек, кроме точки Y_n. Тогда, как только кратчайшая X_nY_n проходит достаточно близко к M, имеет смысл говорить о том, что она проходит с той или с другой стороны от M [1]). Мы ограничимся кратчайшими X_nY_n, проходящими с какой-нибудь одной стороны от M. Чтобы не усложнять обозначений, мы будем отмечать их тем же индексом n (черт. 38).

Возьмём внутри M какую-нибудь точку A и построим последовательность точек A_m, сходящихся к A и лежащих с той же стороны от M, с какой проходят все X_nY_n. Так как точка A лежит внутри M, то кратчайшие OA_m будут сходиться к отрезку OA кратчайшей M и при достаточно больших m будут проходить в сколь угодно малой окрестности M, с той же стороны, с какой проходят кратчайшие X_nY_n.

Пусть α_m — угол между L и OA_m; тогда по доказанной выше теореме 4,

$$\varliminf_{m\to\infty}\alpha_m \geqslant \alpha.$$

Поэтому, задав произвольное положительное ε, можно выбрать такое m, что

$$\alpha_m+\varepsilon>\alpha. \tag{10}$$

Выберем такое m и оставим его в дальнейшем неизменным. При достаточно больших n кратчайшая X_nY_n проходит сколь угодно близко к M и потому точка A_m оказывается вне треугольника OX_nY_n. А так как кратчайшая OA_m проходит с той же стороны от M, с какой проходят кратчайшие X_nY_n, то при достаточно больших n эти последние пересекают OA_m. Пусть Z_n — точка пересечения кратчайшей X_nY_n с OA_m. Так как кратчайшие X_nY_n сходятся к отрезку кратчайшей M, а OA_m не имеет с M общих точек, помимо O, то точки Z_n сходятся к O.

Положим $\rho(OZ_n)=z_n$ и пусть $\gamma_m(x_n, z_n)$ — угол, определённый для точек X_n, Z_n так, как это делается в условии выпуклости. Тогда, поскольку X_n и Z_n сходятся к O,

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_m(x_n, z_n)=\alpha_m. \tag{11}$$

[1]) Так как кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку, то её вместе с её окрестностью можно гомеоморфно отобразить в плоскость так, что она перейдёт в отрезок, и тогда понятие о расположении с той или другой стороны от неё приобретает очевидный смысл.

Выберем какое-либо n и построим на плоскости треугольники $O'X_n'Z_n'$ и $O'Z_n'Y_n'$ со сторонами:

$$\left.\begin{array}{lll} O'X_n'=OX_n, & O'Z_n'=OZ_n, & X_n'Z_n'=X_nZ_n, \\ O'Y_n'=OY_n, & Z_n'Y_n'=Z_nY_n, & \end{array}\right\} \qquad (12)$$

где для краткости символы OX_n и т. п. обозначают длины соответствующих кратчайших. Эти треугольники мы прикладываем друг к другу так, чтобы сторона $O'Z_n'$ была у них общей и чтобы они лежали по разные стороны от неё. Тогда они образуют четыреугольник $O'X_n'Z_n'Y_n'$.

Из формул (12) следует, что

$$O'X_n'+O'Y_n'=OX_n+OY_n, \quad X_n'Z_n'+Z_n'Y_n'=X_nZ_n+Z_nY_n.$$

Точка Z_n лежит на кратчайшей X_nY_n, а потому

$$X_nZ_n+Z_nY_n=X_nY_n\leqslant OX_n+OY_n.$$

Следовательно,

$$O'X_n'+O'Y_n'\geqslant X_n'Z_n'+Z_n'Y_n'.$$

Отсюда следует, что угол δ при вершине O' нашего четыреугольника не больше π (иначе имело бы место обратное неравенство). А раз так, то угол δ вляется также углом треугольника $O'X_n'Y_n'$. Угол же при O' в треугольнике $O'X_n'Z_n'$ есть не что иное, как $\gamma_m(x_n, z_n)$. Поэтому

$$\gamma_m(x_n, z_n)\leqslant\delta. \qquad (13)$$

Построим, вместе с тем, треугольник $O''X_n''Y''$ со сторонами

$$O''X_n''=OX_n, \quad O''Y_n''=OY_n, \quad X_n''Y_n''=X_nY_n. \qquad (14)$$

Его угол при вершине O'' есть не что иное, как $\gamma(x_n, y_n)$.

Из (14) и (12) видно, что стороны, заключающие этот угол, равны сторонам, заключающим угол δ в треугольнике $O'X_n'Y_n'$. А между противолежащими сторонами имеет место неравенство

$$X_n''Y_n''\geqslant X_n'Y_n' \qquad (15)$$

(потому что $X_n''Y_n''=X_nY_n=X_nZ_n+Z_nY_n=X_n'Z_n'+Z_n'Y_n'\geqslant X_n'Y_n'$). Отсюда следует, что между углами $\gamma(x_n, y_n)$ и δ имеет место аналогичное неравенство

$$\gamma(x_n, y_n)\geqslant\delta. \qquad (16)$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (13), получаем, что

$$\gamma(x_n, y_n)\geqslant\gamma_m(x_n, z_n). \qquad (17)$$

Это верно при всяком n. Поэтому, переходя к пределу и пользуясь тем, что, согласно (11), предел углов $\gamma_m(x_n, z_n)$ равен углу α_m, мы получаем, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\gamma(x_n, y_n)\geqslant\alpha_m.$$

А так как по неравенству (10) $\alpha_m+\varepsilon>\alpha$, то

$$\varliminf_{n\to\infty}\gamma(x_n, y_n)>\alpha-\varepsilon.$$

Но ε было выбрано нами произвольно, а потому должно быть

$$\varliminf_{n\to\infty}\gamma(x_n, y_n)\geqslant\alpha. \qquad (18)$$

Так как α есть угол между сторонами треугольника OX_nY_n, а $\gamma(x_n, y_n)$ есть соответствующий угол в плоском треугольнике со сторонами той же длины, то по теореме 3 $\gamma(x_n, y_n) \leqslant \alpha$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \gamma(x_n, y_n) \leqslant \alpha. \tag{19}$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (18), мы видим, что предел угла $\gamma(x_n, y_n)$ существует и равен α, что и требовалось доказать.

Заметим, что неравенство (19) можно доказать, вовсе не ссылаясь на теорему 3. Действительно, так как $\gamma(x_n, y_n)$ есть угол в плоском треугольнике со сторонами x_n, y_n, $z_n = X_nY_n$, то

$$z_n^2 = x_n^2 + y_n^2 - 2x_ny_n \cos\gamma(x_n, y_n)$$

или

$$\cos\gamma(x_ny_n) = \frac{y_n^2 - z_n^2 + x_n^2}{2x_ny_n} = \frac{y_n - z_n}{x_n}\cdot\frac{y_n + z_n}{2y_n} + \frac{x_n}{2y_n}. \tag{20}$$

И так как $x_n \to 0$, а $y_n \to z_n$, то

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \cos\gamma(x_n, y_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{y_n - z_n}{x_n}. \tag{21}$$

Возьмём теперь на кратчайшей M последовательность точек Y'_n, сходящихся к O, но так, что $\frac{x_n}{y'_n} \to 0$, где $y'_n = OY'_n$. Тогда предел угла $\gamma(x_n, y'_n)$ существует и равен углу α между L и M. Так как $\gamma(x_n, y'_n)$ есть угол в плоском треугольнике со сторонами x_n, y'_n, $z'_n = X_nY'_n$, то для него подобно (20) имеем

$$\cos\gamma(x_n, y'_n) = \frac{y'_n - z'_n}{x_n}\cdot\frac{y'_n + z'_n}{2y'_n} + \frac{x_n}{2y'_n}. \tag{22}$$

По условию, $\frac{x_n}{2y'_n} \to 0$; вместе с тем по неравенству треугольника $|z'_n - y'_n| \leqslant \leqslant x_n$, т. е. $|y'_n + z'_n - 2y'_n| \leqslant x_n$ и так как $\frac{x_n}{y'_n} \to 0$, то $\frac{y'_n + z'_n}{2y'_n} \to 1$

Поэтому из (22) следует, что

$$\cos\alpha = \lim_{n\to\infty} \cos\gamma(x_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{y'_n - z'_n}{x_n}. \tag{23}$$

Заметим теперь, что в силу неравенства треугольника $OY_n - OY'_n = Y_nY'_n \geqslant \geqslant X_nY_n - X_nY'_n$, т. е. $y_n - y'_n \geqslant z_n - z'_n$, или $y_n - z_n \geqslant y'_n - z'_n$ В силу этого неравенства сравнение формул (21) и (23) приводит к заключению, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \cos\gamma(x_n, y_n) \geqslant \cos\alpha$$

или

$$\alpha \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \gamma(x_n, y_n).$$

Это и есть неравенство (19); оно доказано, следовательно, на основании одного только неравенства треугольника. Поэтому самая теорема основана на трёх фактах: 1) существовании угла, 2) условии неналегания кратчайших и 3) на возможности провести кратчайшую OA_m, образующую с L угол, сколь угодно близкий к α. Это замечание будет нам полезно в § 1 гл. VIII при рассмотрении абстрактных многообразий.

ГЛАВА IV.

УГОЛ.

§ 1. Общие теоремы о сложении углов.

В предыдущей главе было доказано, что на выпуклой поверхности между всякими двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует определённый угол. Здесь мы хотим изучить свойства угла между кратчайшими и прежде всего установить теорему о сложении углов. Оказывается, что эта теорема основана только на самом факте существования угла; поэтому нет надобности предполагать, что речь идёт о кратчайших на выпуклой поверхности: мы можем говорить вообще о таких кривых в любом многообразии с внутренней метрикой, между которыми существуют определённые углы [1]). Эта общая постановка вопроса интересна хотя бы потому, что понятие угла является одним из основных понятий геометрии.

Напомним определение угла между кривыми. Пусть L и M — две кривые, исходящие из точки O в каком-нибудь многообразии с внутренней метрикой ρ. Пусть $X_t = X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и $Y_s = Y(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ дают параметрические представления этих кривых, причём $X_0 = Y_0 = 0$ и при достаточно малых t и s X_t и Y_s отличны от O, если t и s не равны нулю. Строим плоский треугольник со сторонами, равными $\rho(OX_t)$, $\rho(OY_s)$, $\rho(X_tY_s)$, и угол этого треугольника, лежащий против стороны, равной $\rho(X_tY_s)$, обозначаем $\gamma(t, s)$. Предел этого угла при t и s, стремящихся к нулю, т. е. $\lim\limits_{t, s \to 0} \gamma(t, s)$, и называется углом между кривыми L и M в точке O.

Мы будем рассматривать кривые L_i, исходящие из одной точки O в многообразии с внутренней метрикой, ограничиваясь такой малой окрестностью точки O, каждые две точки которой можно соединить кратчайшей. Мы будем предполагать, что кривые L_i заданы параметрически: $X_i = X_i(t_i)$ $(0 \leqslant t_i \leqslant 1)$ так, что $X_i(0) = 0$ и при t_i, отличных от нуля, $X_i(t_i) \neq O$. Утверждение, что точка X_i стремится к O, равносильно утверждению, что $t_i \to 0$. $\gamma_{ij}(t_i, t_j)$ будет обозначать угол в плоском треугольнике со сторонами, равными OX_i; OX_j; X_iX_j, лежащий против стороны, равной X_iX_j; символ ρ мы для краткости опускаем. α_{ij} будет обозначать угол между кривыми L_i и L_j.

Результат, который мы получим, сводится в основном к следующему:

1. *Если из точки O исходят три кривые L_1, L_2, L_3, образующие углы α_{12}, α_{23}, α_{31}, то сумма каждых двух из этих углов не меньше третьего.*

2. *Если, кроме того, кратчайшие X_1X_3 пересекают L_2 при X_1 и X_3, сколь угодно близких к O, то $\alpha_{12} + \alpha_{23} = \alpha_{13}$.*

Эти свойства угла совершенно аналогичны свойствам угла между полупрямыми на плоскости. Для доказательства удобно доказать сначала некоторые леммы об углах $\gamma_{ij}(t_i, t_j)$.

---

[1]) Собственно говоря, теоремы, которые мы получим, верны во всяком метрическом пространстве.

Лемма 1. *Для всяких трёх кривых L_1, L_2, L_3, исходящих из одной точки O,*

$$\varlimsup_{t_1,\, t_3 \to 0} \gamma_{13}(t_1, t_3) \leqslant \varlimsup_{t_1,\, t_2 \to 0} \gamma_{12}(t_1, t_2) + \varlimsup_{t_2,\, t_3 \to 0} \gamma(t_2, t_3).$$

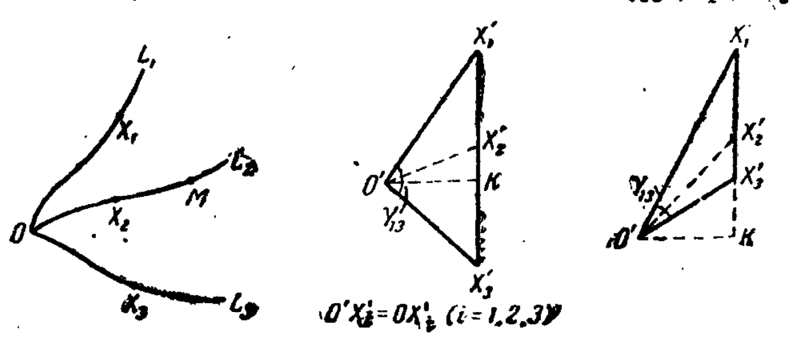
(Существование углов, следовательно, не предполагается.)

Доказательство. Положим

$$\varlimsup_{t_i,\, t_j \to 0} \gamma_{ij}(t_i, t_j) = \bar{\alpha}_{ij}.$$

Мы должны доказать, что $\bar{\alpha}_{13} \leqslant \bar{\alpha}_{12} + \bar{\alpha}_{23}$. Если $\bar{\alpha}_{13} = 0$, то это неравенство тривиально; поэтому можно предположить, что $\bar{\alpha}_{13} > 0$.

Возьмём на кривых L_1 и L_3 такую последовательность пар точек $X_1^{(n)}$, $X_3^{(n)}$, что углы $\gamma_{13}(t_1^{(n)}, t_3^{(n)})$, взятые для этих точек, сходятся к $\bar{\alpha}_{13}$. Так как $\bar{\alpha}_{13} > 0$, то можно считать, что все $\gamma_{13}(t_1^{(n)}, t_3^{(n)}) > 0$ (достаточно отбросить те пары $X_1^{(n)}$, $X_3^{(n)}$, для которых $\gamma_{13} = 0$). Кроме того, допустим сначала, что среди углов $\gamma_{13}(t_1^{(n)}, t_3^{(n)})$ имеется бесконечно много отличных от π, и ограничимся только такими n, для которых $\gamma_{13}(t_1^{(n)}, t_3^{(n)}) \neq \pi$. Наконец, возьмём на кривой L_2 любую точку M, отличную от O, и ограничимся только такими парами $X_1^{(n)}$, $X_3^{(n)}$, для которых $OX_1^{(n)}$ и $OX_3^{(n)} < OM$.



Черт. 39.

Пусть X_1, X_3 — какая-либо пара точек из выделенной последовательности. Построим, как обычно, плоский треугольник $O'X_1'X_3'$ со сторонами $O'X_1' = OX_1$, $O'X_3' = OX_3$, $X_1'X_3' = X_1X_3$ (черт. 39). Угол при вершине O' этого треугольника и есть γ_{13} и так как по предположению γ_{13} не равно ни нулю, ни π, то треугольник не вырождается в отрезок. Пусть для определённости $O'X_1' \geqslant O'X_3'$. Пусть $O'K$ — высота треугольника $O'X_1'X_3'$, опущенная из вершины O'; очевидно, $0 < O'K < O'X'$.

Так как точка $X_2(t_2)$ кривой L_2 зависит от параметра t_2 непрерывно, то и расстояние OX_2 будет непрерывной функцией t_2. Оно принимает значения O и OM; а так как мы считаем $OX_1 < OM$, то найдётся такое наименьшее значение $t_2 = \tau_1$, при котором

$$OX_2(\tau_1) = OX_1 = O'X_1'.$$

Так как $O'K < OX_1$, то точно так же среди значений $t_2 < \tau_1$ найдётся наибольшее значение $t_2 = \tau_2$, при котором

$$OX_2(\tau_2) = O'K.$$

Каждому значению параметра t_2 в промежутке $[\tau_2, \tau_1]$ мы можем сопоставить такую точку $X_2'(t_2)$ на отрезке KX_1', что

$$OX_2(t_2) = O'X_2'(t_2)\,^{1)}.$$

---

[1]) Это было бы невозможно, если бы при некотором $t_2 \in [\tau_2, \tau_1]$ было либо $OX_2(t_2) < O'K$, либо $OX_2(t_2) > O'X_1'$. Но обе возможности исключены. Если, например, $OX_2(t_2) < O'K$ при $t_2 = \tau$, то в силу непрерывной зависимости расстояния $OX_2(t_2)$ от t_2 и в силу того, что $OX_2(\tau_1) = OX_1 > O'K$, нашлось бы такое $t_2 \in [\tau, \tau_1]$, что $OX_2(t_2) = O'K$, так что τ_2 не было бы наибольшим из тех значений $t_2 < \tau_1$, при которых $OX_2(t_2) = O'K$, вопреки определению τ_2. По аналогичной причине невозможно, чтобы при $t_2 \in [\tau_2, \tau_1]$ было $OX_2(t_2) > O'X_1'$.

Если точка X_3' лежит между X_1' и K, то в промежутке $[\tau_2, \tau_1]$ найдётся наибольшее значение параметра $t_2=\tau_3$, при котором $OX_2(\tau_3)=O'X_3'$. Тогда при непрерывном изменении t_2 от τ_1 до τ_3 точка X_2' непрерывно движется от X_1' до X_3'. Если же, напротив, точка K лежит между X_1' и X_3', то в промежутке $[\tau_2, \tau_1]$ найдётся наименьшее значение параметра $t_2=\tau_4$, при котором $OX_2(\tau_4)=$ $=O'X_3'$. Тогда мы можем изменять параметр t_2 от τ_1 до τ_2, причём точка $X_2'(t_2)$ будет непрерывно двигаться по отрезку $X_1'K$ от X_1' до K, а затем, если вновь увеличивать значения t_2 от τ_2 до τ_4, беря точку $X_2'(t_2)$ уже на луче KX_3', то точка $X_2'(t_2)$ будет непрерывно двигаться по отрезку KX_3' от K до X_3'.

Таким образом, в обоих случаях расположения точки K мы получаем такой процесс непрерывного изменения параметра t_2, при котором точка X_2' движется непрерывно, зачерчивая отрезок $X_1'X_3'$.

Рассмотрим отношения

$$\frac{X_1'X_2'}{X_1'X_2'+X_2'X_3'} \quad \text{и} \quad \frac{X_1X_2}{X_1X_2+X_2X_3}.$$

Каждое из них является непрерывной функцией t_2 и при рассматриваемом изменении параметра t_2 первое из них пробегает все значения от 0 до 1, второе же остаётся заключённым между нулём и единицей. Поэтому при некотором значении t_2 оба отношения равны, и мы имеем такие точки X_2 и X_2', что

$$\frac{X_1'X_2'}{X_1'X_2'+X_2'X_3'}=\frac{X_1X_2}{X_1X_2+X_2X_3}; \quad O'X_2'=OX_2. \tag{1}$$

Но по построению $X_1'X_3'=X_1X_3$ и по неравенству треугольника

$$X_1'X_2'+X_2'X_3'=X_1'X_3'=X_1X_3\leqslant X_1X_2+X_2X_3,$$

что вместе с (1) даёт:

$$X_1'X_2'\leqslant X_1X_2, \qquad X_2'X_3'\leqslant X_2X_3.$$

Поэтому, когда мы построим плоские треугольники со сторонами OX_1, OX_2, X_1X_2 и OX_2, OX_3, X_2X_3, то они будут отличаться от треугольников $O'X_1'X_2'$ и $O'X_2'X_3'$ только тем, что у них стороны X_1X_2 и X_2X_3 будут больше (не меньше), чем $X_1'X_2'$ и $X_2'X_3'$, а другие стороны будут те же, потому что

$$O'X_1'=OX_1, \qquad O'X_2'=OX_2, \qquad O'X_3'=OX_3.$$

Вместе с тем, углы этих треугольников, противолежащие сторонам X_1X_2 и X_2X_3, суть не что иное, как γ_{12} и γ_{23}. Поэтому

$$\angle X_1'O'X_2'\leqslant\gamma_{12}, \qquad \angle X_2'O'X_3'\leqslant\gamma_{23}.$$

А так как угол при O' в треугольнике $O'X_1'X_3'$ есть γ_{13}, то в сумме оба неравенства дают:

$$\gamma_{13}\leqslant\gamma_{12}+\gamma_{23}.$$

По выбору рассматриваемой нами последовательности пар X_1, X_3, $\lim\gamma_{13}=$ $=\bar{\alpha}_{13}$. А потому, переходя в полученном неравенстве слева к пределу, а справа — к верхним пределам, получим требуемое неравенство

$$\bar{\alpha}_{13}\leqslant\bar{\alpha}_{12}+\bar{\alpha}_{23}.$$

Мы предполагали, что среди рассматриваемых значений $\gamma_{13}(t_1^{(n)}, t_3^{(n)})$ имеется бесконечно много отличных от π. Допустим теперь, что все $\gamma_{13}=\pi$

(конечное число значений $\gamma_{13} \neq \pi$ можно исключить). Это значит, что

$$X_1^{(n)} X_3^{(n)} = X_1^{(n)} O + O X_3^{(n)}. \tag{2}$$

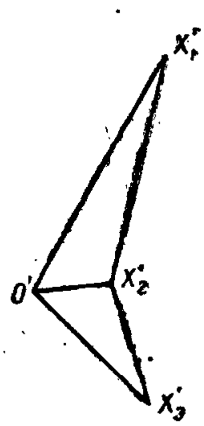
Если бы в этом случае неравенство

$$\overline{\alpha}_{13} = \pi \leqslant \overline{\alpha}_{12} + \overline{\alpha}_{23}$$

не имело место, то нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что для всех достаточно больших n при малых t_2, т. е. при $X_2(t_2)$, близких к O, было бы

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} < \pi - \varepsilon.$$

Но тогда при данном n мы могли бы взять t_2 столь малым, чтобы плоские треугольники $O'X_1'X_2'$ и $O'X_2'X_3'$ со сторонами, равными $OX_1^{(n)}$, $OX_2^{(n)}$, $X_1^{(n)}X_2^{(n)}$ и $OX_2^{(n)}$, $OX_3^{(n)}$, $X_2^{(n)}X_3^{(n)}$, образовывали вместе вогнутый четыреугольник, как представлено на чертеже 40 (угол при O' в таком четыреугольнике равен $\gamma_{12} + \gamma_{23}$, и так как он $< \pi - \varepsilon$, то при X_2', близком к O', угол при X_2' будет $> \pi$).



Черт. 40.

Но в таком случае

$$X_1'X_2' + X_2'X_3' < O'X_1' + O'X_3',$$

т. е.

$$X_1^{(n)}X_2^{(n)} + X_2^{(n)}X_3^{(n)} < OX_1^{(n)} + OX_3^{(n)}$$

или, в силу равенства (2),

$$X_1^{(n)}X_2^{(n)} + X_2^{(n)}X_3^{(n)} < X_1^{(n)}X_3^{(n)}.$$

А это противоречит неравенству треугольника. Следовательно, предположение о том, что в рассматриваемом случае неравенство $\pi \leqslant \overline{\alpha}_{12} + \overline{\alpha}_{23}$ не выполняется, неверно. Таким образом, во всех случаях

$$\overline{\alpha}_{13} \leqslant \overline{\alpha}_{12} + \overline{\alpha}_{23},$$

и лемма доказана.

Из леммы 1 немедленно вытекает

Теорема 1. *Если из точки O исходят кривые L_1, L_2, L_3, образующие друг с другом определённые углы α_{12}, α_{23}, α_{31}, то сумма каждых двух из этих углов не меньше третьего.*

Действительно, $\alpha_{ij} = \lim\limits_{t_i,\, t_j \to 0} \gamma_{ij}(t_i, t_j)$ и потому из леммы 1 следует, что $\alpha_{13} \leqslant \alpha_{12} + \alpha_{23}$ и то же для α_{23} и α_{31}.

Лемме 1 можно придать следующую несколько более общую форму:

Лемма 1*. *Для любого числа кривых $L_1, \ldots, L_n$, исходящих из одной точки,*

$$\overline{\lim_{t_1,\, t_n \to 0}} \gamma_{1n}(t_1, t_n) \leqslant \overline{\lim_{t_1,\, t_2 \to 0}} \gamma_{12}(t_1, t_2) + \ldots + \overline{\lim_{t_{n-1},\, t_n \to 0}} \gamma_{n-1,n}(t_{n-1}, t_n).$$

Действительно, по лемме 1

$$\overline{\lim_{t_1,\, t_n \to 0}} \gamma_{1n}(t_1, t_n) \leqslant \overline{\lim_{t_1,\, t_{n-1} \to 0}} \gamma_{1,n-1}(t_1, t_{n-1}) + \overline{\lim_{t_{n-1},\, t_n \to 0}} \gamma_{n-1,n}(t_{n-1}, t_n).$$

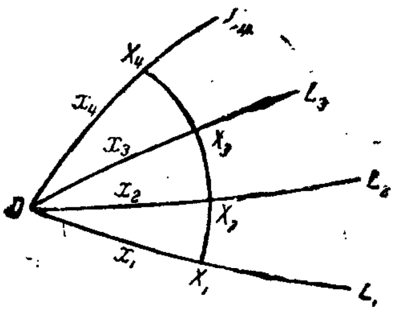
Оценивая так же $\overline{\lim\limits_{t_1\, t_{n-1} \to 0}} \gamma_{1,n-1}(t_1, t_{n-1})$ и т. д., получим требуемое неравенство.

Лемма 2. *Пусть из точки O исходят кривые $L_1, \ldots, L_n$ и пусть X_1, X_n — переменные точки на L_1 и L_n. Допустим, что при X_1, X_n, сколь угодно близких к O, кратчайшая X_1X_n пересекает кривые $L_2, \ldots, L_{n-1}$ в точках $X_2, \ldots, X_{n-1}$, отличных от точки O и расположенных между X_1 и X_n в порядке номеров. Ограничимся только такими точками X_1, X_n, для которых это именно так. Тогда, если t_i — значения параметров на кривых L_i, соответствующие указанным точкам X_i, то*

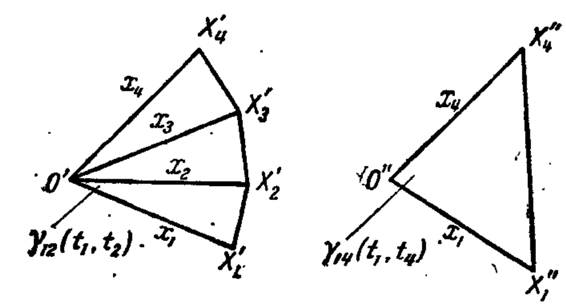
$$\varliminf_{t_1, t_n \to 0} \gamma_{1n}(t_1, t_n) \geqslant \varliminf_{t_1, t_2 \to 0} \gamma_{12}(t_1, t_2) + \ldots + \varliminf_{t_{n-1}, t_n \to 0} \gamma_{n-1, n}(t_{n-1}, t_n)$$

(где нижние пределы берутся только по допущенным значениям t_i).

Доказательство. Пусть X_1 и X_n — такие точки на кривых L_1 и L_n, что хотя бы одна из соединяющих их кратчайших пересекает $L_2, \ldots, L_{n-1}$. Мы будем рассматривать только такие точки X_1 и X_n, не оговаривая это особо



Черт. 41.



Черт. 42.

Так как, по условию, такие точки найдутся сколь угодно близко к точке O, то их можно брать переменными, сходящимися к O. Под кратчайшей X_1X_n мы будем понимать именно кратчайшую, пересекающую $L_2, \ldots, L_{n-1}$. Точки пересечения обозначаем X_i (см. черт. 41, где $n = 4$). (Важно, что X_i отлична от O, но единственная она или нет — не играет дальше никакой роли.)

Положим

$$OX_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Возьмём какое-нибудь данное положение точек X_1, X_n и соответствующие точки $X_2, \ldots, X_{n-1}$. Построим на плоскости треугольники $O'X_i'X_{i+1}'$ со сторонами, равными сторонам треугольников OX_iX_{i+1}, т. е., например, $O'X_1' = OX_1 = x_1$, и т. д. Эти треугольники мы прикладываем друг к другу последовательно по сторонам $O'X_i'$ так что у треугольников $O'X_{i-1}'X_i'$ и $O'X_i'X_{i+1}'$ вершины O' и X_i' общие. В результате образуется многоугольник $O'X_1' \ldots X_n'$ (черт. 42).

Углы при вершине O' в треугольниках $O'X_i'X_{i+1}'$ будут $\gamma_{i, i+1}(t_i, t_{i+1})$.

Построим ещё плоский треугольник $O''X_1''X_n''$ со сторонами, равными сторонам треугольника OX_1X_n. Угол при его вершине O'' будет $\gamma_{1n}(t_1, t_n)$.

Покажем, что угол при вершине O'' в треугольнике $O''X_1''X_n''$ не меньше угла при вершине O' в многоугольнике $O'X_1' \ldots X_n'$, т. е. что

$$\gamma_{1n}(t_1, t_n) \geqslant \gamma_{12}(t_1, t_2) + \ldots + \gamma_{n-1, n}(t_{n-1}, t_n).$$

Для этого заметим прежде всего, что $\gamma_{12} + \ldots + \gamma_{n-1, n} \leqslant \pi$.

Действительно, по построению многоугольника $O'X_1'\ldots X_n'$,

$$X_1'X_2'+\ldots+X_{n-1}'X_n'=X_1X_2+\ldots+X_{n-1}X_n=X_1X_n$$

и

$$O'X_1'=OX_1,\quad O'X_n'=OX_n.$$

А так как линия X_1X_n — кратчайшая, то $X_1X_n\leqslant OX_1+OX_n$ и потому

$$O'X_1'+O'X_n'\geqslant X_1'X_2'+\ldots+X_{n-1}'X_n'.$$

Однако, если бы угол при вершине O' был больше π, то имело бы место обратное неравенство.

Итак, угол $\gamma_{12}+\ldots+\gamma_{n-1,n}$ при вершине O' в нашем многоугольнике не больше π. Поэтому он является также углом в треугольнике $O'X_1'X_n'$. Сравнивая этот треугольник с треугольником $O''X_1''X_n''$, мы видим, что, по построению,

$$O'X_1'=O''X_1'',\quad O'X_n'=O''X_n'',$$

т. е. у этих треугольников соответственные стороны, сходящиеся в вершинах O' и O'', равны. Вместе с тем, очевидно

$$X_1'X_n'\leqslant X_1'X_2'+\ldots+X_{n-1}'X_n',$$

а, по построению,

$$X_1''X_n''=X_1X_n=X_1X_2+\ldots+X_{n-1}X_n=X_1'X_2'+\ldots+X_{n-1}',X_n',$$

так что

$$X_1'X_n'\leqslant X_1''X_n''.$$

Следовательно, для углов при вершинах O' и O'' имеет место то же неравенство, т. е.

$$\gamma_{12}(t_1,t_2)+\ldots+\gamma_{n-1,n}(t_{n-1},t_n)\leqslant\gamma_{1n}(t_1,t_n). \tag{3}$$

Если точки X_1 и X_n стремятся к O, то все точки X_i также стремятся к O, т. е. при t_1, $t_n\to 0$ также $t_i\to 0$. Переходя в неравенстве (3) к пределу при t_1 и $t_n\to 0$ по допущенным значениям t_1 и t_n, получим

$$\varlimsup_{t_1,\,t_n\to 0}\gamma_{1n}(t_1,t_n)\geqslant\varlimsup_{t_1,\,t_2\to 0}\gamma_{12}(t_1,t_2)+\ldots+\varlimsup_{t_{n-1},\,t_n\to 0}\gamma_{n-1,n}(t_{n-1},t_n),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть из точки O исходят кривые $L_1,\ldots,L_n$, образующие друг с другом определённые углы $\alpha_{12},\ldots,\alpha_{n-1,n}$ и α_{n1}. Пусть X_1 и X_n — переменные точки на L_1 и L_n. Допустим, что при X_1 и X_n, сколь угодно близких к O, кратчайшая X_1X_n пересекает кривые $L_2,\ldots,L_{n-1}$ в точках $X_2,\ldots,X_{n-1}$, отличных от O и расположенных между X_1 и X_n в порядке номеров. Тогда*

$$\alpha_{1n}=\alpha_{12}+\alpha_{23}+\ldots+\alpha_{n-1,n}.$$

Доказательство. Так как углы $\alpha_{i,i+1}$ существуют, то существуют пределы

$$\lim_{t_i,\,t_{i+1}\to 0}\gamma_{i,i+1}(t_i,t_{i+1})=\alpha_{i,i+1}.$$

Поэтому, на основании леммы 1*,

$$\alpha_{1n}\leqslant\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,n}.$$

А так как в теореме предполагаются выполненными условия леммы 2, то по этой лемме

$$\alpha_{1n}\geqslant\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,n}.$$

Следовательно,

$$\alpha_{1n}=\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,\,n}.$$

Если $L_1, \ldots, L_n$ суть кратчайшие в многообразии, в котором выполняется условие неналегания кратчайших, то неналегающие друг на друга кратчайшие $L, \ldots, L_n$, исходящие из одной точки O, не имеют вблизи неё других общих точек и, следовательно, разбивают её окрестность на секторы. Поэтому имеет смысл говорить, что кратчайшие $L_2, \ldots, L_{n-1}$ расположены между L_1 и L_n в порядке номеров от L_1 к L_n. В этом случае, если кратчайшая X_1X_n пересекает $L_2, \ldots, L_{n-1}$, точки пересечения $X_2, \ldots, X_{n-1}$ располагаются на $L_2, \ldots, L_{n-1}$, в порядке номеров от X_1 до X_n. Без условия неналегания кратчайших $L_1, \ldots, L_n$ нельзя утверждать, что они рсаположены в определённом порядке, и приходится поэтому говорить о порядке точек $X_1, \ldots, X_n$.

Теорема 3. *Пусть из точки O исходят кривые $L_1, \ldots, L_n$, образующие друг с другом последовательно определённые углы $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n-1,\,n}$, отличные от нуля. Пусть X_1 и X_n — переменные точки на L_1 и L_n. Допустим, что если X_1 и X_n достаточно близки к O, то кратчайшая X_1X_n пересекает $L_2, \ldots, L_{n-1}$ в точках $X_2, \ldots, X_{n-1}$, отличных от O и расположенных между X_1 и X_n в порядке номеров. Тогда между кратчайшими L_1 и L_n также существует определённый угол и он равен сумме углов $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n-1,\,n}$.*

Доказательство. Условия этой теоремы отличаются от условий теоремы 2 в двух пунктах: существование угла α_{1n} не предполагается, но зато предполагается, что кратчайшие X_1X_n пересекают $L_2, \ldots, L_{n-1}$ при всех X_1 и X_n, достаточно близких к O. В силу этого последнего условия, мы можем воспользоваться леммой 2, не налагая в ней никаких ограничений на переменные t_1 и t_n. Так как углы $\alpha_{i,\,i+1}$ предполагаются существующими, то существуют пределы

$$\lim_{t_i,\ t_{i+1}\to 0}\gamma_{i,\,i+1}(t_i,\ t_{i+1})=\alpha_{i,\,i+1},$$

а потому из леммы 2 следует:

$$\lim_{t_1,\ t_n\to 0}\gamma_{1n}(t_1,\ t_n)\geqslant\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,\,n}.$$

С другой стороны, по той же причине, из леммы 1* следует, что

$$\overline{\lim_{t_1,\,t_n\to 0}}\,\gamma_{1n}(t_1,\ t_n)\leqslant\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,\,n}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t_1,\,t_n\to 0}\gamma_{1n}(t_1,\ t_n)$ существует и равен $\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,\,n}$, что и требовалось доказать.

Эта теорема, конечно, не имеет значения для кратчайших на выпуклой поверхности, потому что для них угол α_{1n} заведомо существует, но она оказывается полезной для любых других кривых, а также для кратчайших в абстрактных многообразиях с внутренней метрикой.

На этом мы заканчиваем изучение углов между любыми кривыми: в следующих параграфах речь будет итти об углах между кратчайшими на выпуклых поверхностях. Потом, в гл. IX мы более детально рассмотрим некоторые свойства угла между любыми кривыми на выпуклых поверхностях.

§ 2. Теоремы о сложении углов на выпуклых поверхностях.

Для углов на выпуклых поверхностях общие теоремы сложения, доказанные в предыдущем параграфе, можно дополнить теоремой, совершенно аналогичной известной теореме планиметрии о том, что сумма смежных углов равна двум прямым:

Теорема 1. *Если из точки O, лежащей внутри кратчайшей L на выпуклой поверхности, исходит кратчайшая M, то сумма углов, которые M образуют с ветвями кратчайшей L, равна π.*

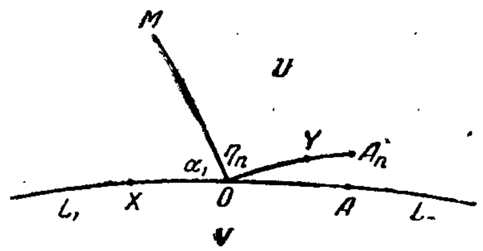
Доказательство этой теоремы существенно основано на двух фактах, относящихся именно к выпуклым поверхностям: во-первых, — на условии неналегания кратчайших и, во-вторых, — на теореме о сходимости углов (теорема 4 § 4 гл. III): если кратчайшие N_n' и N_n'' сходятся к N' и N'', то угол между N' и N'' не меньше нижнего предела углов между N_n' и N_n''. Мы будем пользоваться следствиями условия неналегания кратчайших, выведенными в § 3 гл. II.

Ветви L_1 и L_2 кратчайшей L, на которые её делит точка O, сами являются кратчайшими. Углы, которые они образуют с кратчайшей M, обозначим α_1, α_2. Угол между L_1 и L_2 равен π, поэтому, на основании теоремы 1 § 1,

$$\alpha_1+\alpha_2 \geqslant \pi. \tag{1}$$

Если мы докажем, что вместе с тем $\alpha_1+\alpha_2 \leqslant \pi$, то теорема будет доказана

Ограничимся малой окрестностью точки O. Кратчайшая L разбивает такую окрестность на две области U и V. Мы можем, конечно, предполагать, что кратчайшая M не налегает на L, а тогда, вследствие условия неналегания (теорема 1 § 3 гл. II), она вовсе не имеет с L общих точек помимо точки O. Поэтому M проходит целиком в одной из областей U или V, например, в области U (черт. 43).



Черт. 43.

Возьмём на L_2 точку A и построим внутри той части области U, которая ограничена L_2 и M, последовательность точек A_n, сходящихся к A. Кратчайшие OA_n будут сходиться к отрезку OA кратчайшей L, потому что (в силу условия неналегания) OA есть единственная кратчайшая, соединяющая точки O и A.

Возьмём на L_1 и на одной из кратчайших OA по точке X и Y. Если эти точки достаточно близки к точке O, то соединяющая их кратчайшая лежит в области U. Действительно, если бы кратчайшая XY «заходила» в область V, то она должна была бы пересекать кратчайшую L ещё в одной точке, кроме X. Но тогда, в силу условия неналегания кратчайших, она налегала бы на L. Это, однако, невозможно, потому что тогда точка Y, а вместе с ней и все точки кратчайшей OA_n лежали бы на L, вопреки предположению. Таким образом, кратчайшая XY не имеет с L общих точек, кроме X, и лежит в области U.

Точка X лежит на L_1, а по построению кратчайших OA_n точка Y лежит между кратчайшими M и L_2. Поэтому кратчайшая XY пересекает M, если только точки X и Y достаточно близки к O.

На основании теоремы 2 § 1 отсюда следует, что угол ξ_n между OA_n и L_1 равен сумме углов α_1 и η_n между L_1 и M, M и OA_n:

$$\xi_n=\alpha_1+\eta_n. \tag{2}$$

Кратчайшие OA_n сходятся к OA и потому, в силу теоремы 4 § 4 гл. III,

$$\varliminf_{n\to\infty} \eta_n \leqslant \alpha_2. \tag{3}$$

С другой стороны, $\xi_n \leqslant \pi$ и, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \pi. \tag{4}$$

Поэтому, переходя в равенстве (2) к пределу при $n \to \infty$, мы, на основании неравенств (3) и (4), получим, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \pi.$$

А так как мы уже видели, что $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \pi$, то тем самым $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$, и теорема доказана.

В отличие от общих теорем предыдущего параграфа, полученное свойство смежных углов не будет верным в любом многообразии с внутренней метрикой. Например, если условие неналегания кратчайших не выполняется, то возможно такое положение, что кратчайшая M является продолжением L_1 и образует с ней вместе одну кратчайшую, но не совпадает с L_2. В таком случае угол α_1 между M и L_1 равен π, и если только угол α_2 между M и L_2 не равен нулю, то $\alpha_1 + \alpha_2 > \pi$. Так, например, обстоит дело на всяком конусе, у которого полный угол вокруг вершины больше 2π.

Теорема о смежных углах легко обобщается на тот случай, когда из точки O на кратчайшей L исходит несколько кратчайших.

Теорема 1*. *Пусть из точки O, лежащей внутри кратчайшей L на выпуклой поверхности, проведены кратчайшие $M_1, \ldots, M_n$, проходящие вблизи точки O по одну сторону от L. Пусть они перенумерованы в порядке их расположения от одной ветви L_1 кратчайшей L до другой ветви L_2, и пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы между L_1 и M_1, M_1 и M_2 и т. д. Тогда*

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \pi.$$

Действительно, из условия неналегания кратчайших легко заключить, что если точки X и Y, лежащие на L_1 и M_n, отличны от точки O и достаточно близки к ней, то кратчайшая XY пересекает $M_1, \ldots, M_{n-1}$ в точках, отличных от O. Поэтому, на основании теоремы 2 предыдущего параграфа, угол между L_1 и M_n равен $\alpha_0 + \ldots + \alpha_{n-1}$. Вместе с тем этот угол — смежный с углом α_n и потому $\alpha_0 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \pi$.

Этот результат представляет собою существенное дополнение к теореме 2 предыдущего параграфа. В указанной теореме требовалось, чтобы кратчайшая X_1X_n, соединяющая точки X_1 и X_n на кратчайших L, L_n, пересекала остальные кратчайшие $L_2, \ldots, L_{n-1}$ в точках, отличных от O. Если это требование не выполняется, то кратчайшие L_1 и L_n окажутся продолжением одна другой; потому что если кратчайшая X_1X_n проходит через точку O, то отрезки X_1O и X_nO кратчайших L_1 и L_n образуют вместе одну кратчайшую и угол между L_1 и L_n оказывается равным π. Если, кроме того, кратчайшие $L_2, \ldots, L_{n-1}$ проходят с одной стороны от линии $L_1 + L_n$ в порядке номеров от L_1 к L_n, то мы оказываемся, очевидно, в условиях теоремы 1*. Поэтому на выпуклой поверхности теорему 2 § 1 можно объединить с теоремой 1* в одну:

Теорема 2. *Пусть из точки O на выпуклой поверхности исходят кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$, перенумерованные в порядке их расположения вокруг точки O* [1]*). Пусть $\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n-1, n}$, α_{1n} — углы между соседними из этих кратчайших. Тогда, если при X_1 и X_n, сколь угодно близких к O, кратчайшая X_1X_n имеет со всеми кратчайшими $L_2, \ldots, L_{n-1}$ общие точки, то*

$$\alpha_{1n} = \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{n-1, n}.$$

§ 3. Угол сектора, ограниченного кратчайшими.

Две кратчайшие L и M, исходящие из одной точки O на выпуклой поверхности, разбивают окрестность этой точки на два *сектора*. Строгое определение этих секторов можно дать, например, так. У точки O есть окрестность,

[1]) Вследствие условия неналегания кратчайших это утверждение имеет однозначный смысл.

гомеоморфная кругу. Возьмём эту окрестность U столь малой, чтобы кратчайшие L и M пересекали её границу. Пусть A и B — ближайшие к O точки пересечения кратчайших L и M с границей окрестности U. Так как кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку, то отрезки OA и OB кратчайших L и M разбивают окрестность U на две части — на два сектора. Путём гомеоморфного отображения окрестность U можно отобразить на круг, а отрезки OA и OB — на радиусы этого круга, причём круг окажется разделённым на два сектора. Дальше, говоря о секторах, мы будем иметь в виду столь малую окрестность точки O, что всякая кратчайшая, соединяющая точки из разных секторов, пересекает одну из кратчайших L и M. К сектору мы присоединяем также ограничивающие его кратчайшие. Из формальных соображений представляется удобным считать сектором также одну кратчайшую. Можно сказать, что такой «нулевой» сектор ограничен двумя налегающими кратчайшими.

Окрестность U, разбиваемую кратчайшими на секторы, можно выбирать, конечно, по-разному, и тогда секторы, ограниченные данными кратчайшими L и M, будут представлять собою разные множества точек. Однако мы будем считать их за одни и те же секторы. Говоря точно, два множества V_1 и V_2, ограниченные одной и той же парой кратчайших L и M в окрестностях U_1 и U_2, мы считаем за один сектор, если в окрестности U_3, содержащейся одновременно в U_1 и U_2, кратчайшие L и M выделяют множество (сектор) V_3, содержащееся одновременно в V_1 и V_2. Таким образом, сектор есть любой представитель целого класса множеств, или ещё лучше — самый класс множеств, выделяемых из окрестностей данной точки двумя данными кратчайшими.

Мы будем говорить, что сектор V содержится в многоугольнике P, если V ограничен двумя сторонами многоугольника P, сходящимися в одной его вершине O, и если для достаточно малой окрестности точки O один из представителей класса множеств, являющегося сектором V, содержится в P.

Каждому сектору, ограниченному двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, мы приписываем определённый угол по следующему правилу. Пусть сектор V ограничен кратчайшими L и M, исходящими из точки O. Проведём в этом секторе из той же точки O ещё несколько кратчайших $N_1, \ldots, N_n$, занумерованных в порядке их расположения от L к M. Обозначим через $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ углы между соседними кратчайшими, т. е. между L и N_1, между N_1 и N_2 и, наконец, между N_n и M. Будем произвольно менять как сами кратчайшие N_i, так и их число, оставляя их, однако, в секторе V. Каждой совокупности кратчайших L_i будет соответствовать сумма углов $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. *Точную верхнюю границу этих сумм мы принимаем за угол сектора* V. Если эта граница не существует, то можно считать угол сектора равным бесконечности. Это замечание по существу не имеет для нас значения, так как мы скоро покажем, что для секторов на выпуклых поверхностях указанная верхняя граница не может быть больше 2π. Однако, пока это не будет доказано, мы будем молча допускать для углов секторов бесконечные значения [1]).

[1]) Данное определение угла сектора полезно сравнить с определением длины кривой. Между обоими определениями имеется полная формальная аналогия, которая усиливается тем, что для углов между кратчайшими верны те требования, каким подчиняется расстояние: в частности, по аналогии с неравенством треугольника, имеет место теорема 1 § 1: $\alpha(L_1L_2) + \alpha(L_2L_3) \geqslant \alpha(L_1L_3)$, где $\alpha(L_iL_j)$ — угол между кривыми L_i и L_j. В двухмерных многообразиях эта аналогия мало интересна, потому что в них множество кратчайших, исходящих из одной точки, одномерно. Совсем не так обстоит дело в многообразиях высших размерностей. Пусть в многообразии R дано семейство кратчайших $L(t)$, исходящих из одной точки O $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Пусть α обозначает угол — «угловое расстояние» между кратчайшими. Берём значения $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ и образуем сумму $\sum \alpha(L(t_{i-1})\,L(t_i))$. Точную верхнюю границу этих сумм естественно принять за «угловую длину» семейства $L(t)$. Семейство $L(t)$, соединяющее две данные кратчайшие $L = L(0)$ и $M = L(1)$ и имеющее наименьшую угловую длину, представляет собою аналог плоского сектора, натянутого на L и M.

В данном определении угла сектора допускается к рассмотрению также пустая совокупность кратчайших N_i, т. е. можно попросту не проводить ни одной такой кратчайшей и тогда сумма $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ сводится к одному углу между кратчайшими L и M. Так как угол сектора мы определили как точную верхнюю границу таких сумм, то из сделанного замечания вытекает, что угол сектора, ограниченного двумя кратчайшими, всегда не меньше угла между самими кратчайшими.

Найдём некоторые условия, обеспечивающие равенство обоих углов.

Возьмём на кратчайших L и M, исходящих из точки O, переменные точки X и Y. Допустим, что кратчайшие L и M не налегают друг на друга. Вследствие условия неналегания кратчайших, две кратчайшие, имеющие одну общую точку, либо не имеют других общих внутренних точек, либо налегают друг на друга. Поэтому кратчайшая XY либо не имеет с L и M общих точек, кроме X и Y, либо налегает на них, так что на участке от X до Y кратчайшие L и M образуют одну кратчайшую OX. В первом случае кратчайшая XY проходит целиком внутри одного сектора. Во втором случае можно одинаково считать, что она проходит в одном или в другом секторе.

Пусть при X и Y, сколь угодно близких к O, кратчайшая XY проходит в секторе U, ограниченном L и M. Проведём из точки O в секторе U ещё какие-нибудь кратчайшие $N_1, \ldots, N_n$, перенумерованные в порядке их расположения от L до M. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы между α и N_1, N_1 и $N_2, \ldots, N_n$ и M. Если кратчайшие XY проходят внутри сектора U, то они пересекают кратчайшие $N_1, \ldots, N_n$, а потому из теоремы 2 § 1 следует, что сумма углов $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ равна углу α между L и M. Следовательно, точная верхняя граница этих сумм, т. е. угол сектора U, равняется углу α.

Если кратчайшая XY налегает на L и M, то отрезки OX и OY этих кратчайших образуют одну кратчайшую. Поэтому во-первых, угол α между L и M равен π. А во-вторых, по теореме 1* § 2, сумма углов $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n$ равна π. Следовательно, опять точная верхняя граница этих сумм, т. е. угол сектора U, равняется углу π.

Полученные результаты можно суммировать в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Угол сектора U, ограниченного кратчайшими L и M, исходящими из одной точки O, всегда не меньше угла между самими кратчайшими. Если кратчайшие XY, соединяющие точки X и Y на L и M, при X и Y, сколь угодно близких к O, проходят в секторе U, то угол сектора U равен углу между кратчайшими L и M. Следовательно, всегда угол одного из двух взаимно дополнительных секторов равен углу между ограничивающими кратчайшими.*

Следовательно, если кратчайшие XY при X и Y, сколь угодно близких к O, проходят то в секторе U, то в дополнительном секторе U' или в обоих секторах одновременно, то углы обоих секторов равны углу между кратчайшими L и M.

Если, в частности, XY налегает на L и M, то углы обоих секторов U и U' равны π.

(Угол нулевого сектора равен нулю, а потому теорема верна и в том случае, когда кратчайшие L и M налегают друг на друга.)

Докажем теперь, что углы секторов складываются так же, как углы секторов на плоскости:

Теорема 2. *Если сектор U составлен из двух секторов V и W, то его угол равен сумме углов секторов V и W, предполагая, конечно, что секторы V и W не имеют общих точек помимо точек разделяющей их кратчайшей, исходящей из вершины сектора U.*

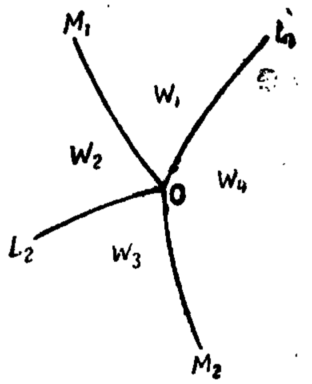
Доказательство. Пусть сектор U, ограниченный кратчайшими L и M, исходящими из точки O, разделён на секторы V и W кратчайшей N, исходящей из той же точки O, причём V обозначает сектор, ограниченный L и N.

Пусть u, v, w — углы секторов U, V, W.

Проведём из точки O внутри сектора U кратчайшие $N_1, \ldots, N_n$, пронумерованные в порядке их расположения от L к M. Пусть, как и выше, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ обозначают углы между L и N_1, N_1 и $N_2, \ldots$, N_n и M. По определению угла сектора

$$u = \sup \sum_{i=0}^{n} \alpha_i.$$

Присоединим к кратчайшим N_i ещё одну кратчайшую N', проходящую, например, между N_k и N_{k+1}. Тогда в сумме $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ угол α_k между N_k и N_{k+1} должен будет замениться суммой углов между N_k и N', N' и N_{k+1}. Но, по теореме 1 § 1, сумма этих углов не меньше угла между N_k и N_{k+1}. Следовательно, сумма углов вида $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ не уменьшается при присоединении новых кратчайших к уже проведённым кратчайшим. Поэтому при отыскании точной верхней границы этих сумм можно считать, что среди кратчайших N_i содержится кратчайшая N, разделяющая секторы V и W. Пусть, например, кратчайшая N_m и есть кратчайшая N. Тогда кратчайшие $N_1, \ldots, N_{m-1}$ идут в секторе V, а кратчайшие $N_{m+1}, \ldots, N_n$ — в секторе W. Эти кратчайшие совершенно произвольны и потому на основании самого определения углов секторов,



Черт. 44.

$$v = \sup \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i, \qquad w = \sup \sum_{i=m}^{n} \alpha_i.$$

А так как $u = \sup \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, то тем самым $u = v + w$, что и требовалось доказать. Отсюда следует, конечно, что угол сектора, составленного из любого конечного числа секторов, равен сумме углов этих секторов.

Далее из доказанной теоремы следует, что *сумма углов двух взаимно дополнительных секторов не зависит от этих секторов, а зависит только от точки, являющейся их вершиной.*

Действительно, пусть мы имеем две пары взаимно дополнительных секторов U и U', V и V' с общей вершиной O. Первые ограничены кратчайшими L_1 и L_2, вторые — кратчайшими M_1 и M_2. Допустим, например, что кратчайшая M_1 проходит в секторе U, а M_2 — в секторе U'; кратчайшая L_1 проходит в секторе V, а L_2 — в секторе V'. Тогда окрестность точки O разлагается на секторы W_1, W_2, W_3, W_4, ограниченные соответственно кратчайшими L_1 и M_1, M_1 и L_2 и т. д. (черт. 44). Исходные секторы представляются в виде сумм этих секторов следующим образом:

$$U = W_1 + W_2, \quad U' = W_3 + W_4,$$
$$Y = W_1 + W_4, \quad Y_1 = W_2 + W_3.$$

Поэтому из доказанной только что теоремы следует, что как сумма углов секторов U и U', так и сумма углов секторов V и V' равна сумме углов секторов $W_1, \ldots, W_4$. Следовательно, они равны между собою.

Тот же результат получается, конечно, при любом другом взаимном расположении кратчайших, ограничивающих рассматриваемые секторы.

Полученный результат приводит к важному определению: *сумму двух взаимно дополнительных секторов с вершиной O мы называем полным углом вокруг точки O.*

Впрочем, полный угол можно определить непосредственно, не прибегая к понятию об угле сектора. Пусть из точки O исходят кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$, перенумерованные в порядке их циклического расположения вокруг O. Пусть α_{ij} обозначает угол между L_i и L_j. Образуем сумму $\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,n}+\alpha_{n1}$. *Точная верхняя граница таких сумм для всевозможных кратчайших, проводимых из O в любом конечном числе, равна полному углу вокруг точки O.*

Действительно, доказывая теорему о сложении углов секторов, мы показали, что присоединение новых кратчайших к уже проведённым не уменьшает суммы углов между соседними кратчайшими. Поэтому при определении верхней границы таких сумм можно считать, что среди кратчайших L_i содержатся две данные кратчайшие L и M, разбивающие окрестность O на секторы U и U'. Тогда каждая сумма $\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n-1,n}+\alpha_{n1}$ разобьётся на две: одну для кратчайших, проходящих в секторе U, другую, для кратчайших проходящих в дополнительном секторе U'. Точные верхние границы этих частных сумм равны, по определению, углам секторов U и U', а в сумме они дают сумму углов этих секторов, т. е. полный угол вокруг точки O.

Воспользовавшись понятием полного угла вокруг точки, можно формулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Сумма углов секторов с общей вершиной O, покрывающих всю окрестность точки O и не имеющих общих внутренних точек, равна полному углу вокруг точки O.*

Действительно, пусть $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — такие секторы с вершиной O. Тогда секторы U_1 и $U_2+\ldots+U_n$ взаимно дополнительны и потому сумма их углов равна полному углу вокруг точки O. Вместе с тем, угол сектора $U_2+\ldots+U_n$ равен сумме углов составляющих его секторов. Следовательно, сумма углов всех секторов $U_1, \ldots, U_n$ равна полному углу вокруг точки O.

Едва ли следует указывать на то очевидное обстоятельство, что определённый нами в гл. I полный угол вокруг вершины конуса есть полный угол в смысле только что данного определения.

Теорема 4. *Полный угол вокруг точки на выпуклой поверхности всегда* $\leqslant 2\pi$.

Для выпуклых многогранников эта теорема очевидна, а для любых выпуклых поверхностей она может быть легко доказана предельным переходом от многогранников. Мы не будем, однако, проводить это доказательство здесь, потому что в следующем параграфе оно получится как простое следствие общей теоремы о сходимости углов секторов.

Из самого определения полного угла ясно, что угол всякого сектора с вершиной в точке O не больше полного угла вокруг этой точки. Поэтому на выпуклой поверхности угол всякого сектора имеет конечное значение и притом меньшее 2π. Исключение составляет сектор, дополнительный к нулевому: угол такого сектора с вершиной в точке O равен полному углу вокруг O и потому, вообще говоря, равен 2π. Дальше мы покажем, что на всякой выпуклой поверхности те точки, полный угол вокруг которых меньше 2π, образуют не более чем счётное множество.

Важную особенность таких точек устанавливает следующая теорема:

Теорема 5. *Через точку, полный угол вокруг которой меньше 2π, не проходит ни одна кратчайшая.*

Действительно, если через точку O проходит кратчайшая, то ветви этой кратчайшей, на которые её разделяет точка O, образуют угол, равный π. Поэтому углы обоих секторов, ограниченных этими ветвями, не меньше π и, следовательно, полный угол вокруг точки O не меньше 2π. Это рассуждение верно в любом многообразии. На выпуклой же поверхности нет точек с полным углом, бо́льшим 2π, а потому *на выпуклой поверхности вокруг точки, через которую проходит кратчайшая, полный угол равен 2π.*

Мы имеем теперь два угла: угол между кратчайшими и угол сектора. *Под углом многоугольника P при вершине A мы будем всегда понимать угол того сектора, ограниченного сторонами, сходящимися в A, который содер-*

жится в многоугольнике P. Этот угол может быть равен углу между сторонами либо дополнять его до полного угла вокруг точки A. У выпуклого многоугольника все его углы равны углам между сторонами. На плоскости всякий треугольник — выпуклый и потому для плоских треугольников оба понятия угла совпадают. Но на выпуклых поверхностях даже сколь угодно малый треугольник может не быть выпуклым и далеко не всегда угол между сторонами треугольника будет равен углу содержащегося в треугольнике сектора, ограниченного этими сторонами. Например, на замкнутой выпуклой поверхности три кратчайшие, соединяющие три точки A, B, C, разделяют поверхность на два треугольника ABC. И если в одном из них угол при вершине A равен углу между сторонами AB и AC, то в другом он оказывается дополнением этого угла до полного угла вокруг точки A.

§ 4. О сходимости углов.

В § 4 гл. III была доказана общая теорема о сходимости углов на выпуклых поверхностях:

Теорема 1. *Пусть из точки O на выпуклой поверхности F исходят кратчайшие L и M, образующие друг с другом угол α. Пусть на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к F, из точек O_n проведены кратчайшие L_n, M_n, сходящиеся соответственно к L и M, причём точки O_n сходятся к O. Тогда, если α_n обозначают углы между L_n и M_n, то*

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n.$$

В § 10 гл. I было показано на примере, что предел углов α_n может не существовать, а если он существует, то может быть больше угла α. Теперь мы хотим выяснить условия, при которых углы α_n будут заведомо сходиться к углу α, и исследовать сходимость углов секторов, ограниченных кратчайшими L и M.

Пусть на выпуклой поверхности F дан сектор U, ограниченный кратчайшими L и M, исходящими из точки O, а на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к F, даны секторы U_n, ограниченные кратчайшими L_n и M_n, исходящими из точек O_n. Мы говорим, что секторы U_n сходятся к сектору U, если выполняются следующие три условия:

1) Точки O_n сходятся к O. 2) Кратчайшие L_n и M_n сходятся соответственно к L и M. 3) Всякая внутренняя точка сектора U есть предел внутренних точек секторов U_n.

Две кратчайшие L и M, исходящие из одной точки, ограничивают два взаимно дополнительных сектора U и U'. Нетрудно доказать, что *если точки O_n ходятся к O и кратчайшие L_n и M_n сходятся к L и M, то одни из взаимно дополнительных секторов, ограниченных кратчайшими L_n и M_n, сходятся к U, а другие сходятся к U'. Если секторы U_n сходятся к U, то секторы U'_n, дополнительные для U_n, сходятся к сектору U', дополнительному для U.*

Это утверждение столь очевидно, что мы не будем его сейчас доказывать, не желая отвлекаться от нашей основной темы; доказательство даётся в конце данного параграфа в виде добавления. А теперь приступим к изучению сходимости углов сходящихся секторов.

Теорема 2. *Пусть секторы U_n на выпуклых поверхностях, сходящихся к F, сходятся к сектору U. Тогда, если α и α_n обозначают углы секторов U и U_n, то*

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Доказательство. Пусть сектор U ограничен кратчайшими L и M, исходящими из точки O, а секторы U_n — кратчайшими L_n и M_n, исходящими из точек O_n. По самому определению сходимости секторов O_n сходятся к O, а L_n и M_n сходятся к L и M; мы считаем, что L_n сходятся к L, а M_n сходятся к M.

Из определения угла сектора следует, что при всяком $\varepsilon > 0$ в секторе U можно провести кратчайшие $N_1, \ldots, N_m$ так, что, нумеруя их в порядке расположения от L к M и обозначая углы между L и N_1, N_1 и $N_2, \ldots, N_m$ и M через $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^m$, мы будем иметь

$$\alpha - (\alpha^0 + \ldots + \alpha^m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Проведя в секторе U кратчайшие $N_1, \ldots, N_m$ так, чтобы выполнялось это неравенство, возьмём внутри них точки $A_1, \ldots, A_m$. Тогда отрезки $OA_1, \ldots, OA_m$ этих кратчайших будут единственными кратчайшими, соединяющими точку O с точками A_i. Точки A_i мы берём настолько близко к O, чтобы они, во-первых, лежали внутри сектора U, а, во-вторых, чтобы внутри секторов U_n можно было взять точки A_{in}, сходящиеся соответственно к точкам A_i. Это возможно по самому определению сходимости секторов.

Так как кратчайшие OA_i — единственные, соединяющие O с точками A_i, то кратчайшие O_nA_{in} к ним сходятся и, во всяком случае при достаточно больших i, будут расположены между L_n и M_n в том же порядке [1]). Пусть $\overset{0}{\alpha}_n, \overset{1}{\alpha}_n, \ldots, \overset{m}{\alpha}_n$ — углы между кратчайшей L_n и соответственно кратчайшими O_nA_{0n}, O_nA_{1n} и O_nA_{2n}, и т. д. Тогда из определения угла сектора следует, что угол сектора U_n не меньше суммы углов $\overset{0}{\alpha}_n, \ldots, \overset{m}{\alpha}_u$, т. е.

$$\alpha_n \geqslant \overset{0}{\alpha}_n + \ldots + \overset{m}{\alpha}_n, \tag{2}$$

как только кратчайшие O_nA_{in} расположены в порядке номеров между L_n и M_n, т. е. при достаточно больших n.

Так как кратчайшие $L_n, O_nA_{1n}, \ldots, M_n$ сходятся соответственно к кратчайшим $L, OA_1, \ldots, M$, то, применяя к углам между ними теорему 1, мы получим, что

$$\alpha^i \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \alpha^i{}_n \qquad (i = 0, 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Поэтому из формулы 2 следует, что

$$\varliminf_{n \to \infty} \alpha_n \geqslant \alpha^0 + \alpha^1 + \ldots + \alpha^m,$$

откуда, применяя неравенство 1, получаем, что $\varliminf\limits_{n \to \infty} \alpha_n > \alpha - \varepsilon$.

Но так как ε выбрано произвольно, то отсюда следует, что

$$\varliminf_{n \to \infty} \alpha_n \geqslant \alpha,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть точки O_n, лежащие на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к выпуклой поверхности F, сходятся к точке O на F. Тогда, если θ_n и θ обозначают полные углы вокруг точек O_n и O, то $\theta \leqslant \varliminf\limits_{n \to \infty} \theta_n$.*

Так как полный угол вокруг точки равен сумме углов двух взаимно дополнительных секторов, то это утверждение есть прямое следствие теоремы 2.

---

[1]) Действительно, во-первых, можно считать все кратчайшие OA_i неналегающими друг на друга. Во-вторых, если данные точки O_n и A_{in} можно соединить несколькими кратчайшими, то мы берём одну из них. При больших i кратчайшие O_nA_{in} не будут налегать друг на друга и будут делить сектор U_n на меньшие секторы, которые, в силу высказанного выше без доказательства утверждения, будут сходиться к секторам, ограниченным кратчайшими OA_i.

Следствие 2. *Полный угол вокруг точки на выпуклой поверхности не больше* 2π.

Для точек на выпуклых многогранниках утверждение очевидно. Поэтому, если в предыдущем следствии под поверхностями F_n понимать многогранники, то $\theta_n \leqslant 2\pi$, а поэтому $\theta \leqslant 2\pi$. Этим доказана теорема 4 предыдущего параграфа.

Теорема 3. *Пусть секторы U_n на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к выпуклой поверхности F, сходятся к сектору U на этой поверхности и пусть полные углы θ_n вокруг вершин секторов U_n сходятся к полному углу θ вокруг вершины сектора U. Тогда, если α_n и α обозначают углы секторов U_n и U, то* 1) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ *и* 2) $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Доказательство. Так как секторы U_n сходятся к сектору U, то дополнительные секторы U'_n сходятся к сектору U', дополнительному для U. Углы секторов U'_n и U' равны соответственно $\theta_n - \alpha_n$ и $\theta - \alpha$. Поэтому по теореме (2)

$$\theta - \alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (\theta_n - \alpha_n),$$

а так как, по условию, $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, то

$$\alpha \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \alpha_n.$$

С другой стороны, по теореме 1 должно быть

$$\alpha \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ существует и равен α. Теорема доказана.

Заметим, что если $\theta \neq \lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$, то угол по крайней мере одного из секторов U и U' не равен пределу углов секторов U_n и U'_n, либо эти пределы не существуют. Поэтому теорему 3 можно формулировать так: углы обоих взаимно дополнительных секторов U и U' равны пределам углов сходящихся к ним взаимно дополнительных секторов U_n и U'_n тогда и только тогда, когда полные углы при вершинах секторов U_n сходятся к полному углу при вершине сектора U.

Теорема 4. *Пусть секторы U_n на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к F, сходятся к такому сектору U на F, полный угол вокруг вершины которого равен 2π. Тогда, если α и α_n обозначают углы секторов U и U_n, то*

1) *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ *и* 2) $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Доказательство. Пусть θ_n есть полный угол вокруг вершины сектора U_n. Так как полный угол вокруг вершины сектора U равен 2π, то согласно следствию 1 теоремы 2

$$\varliminf_{n\to\infty} \theta_n \geqslant 2\pi.$$

Но по следствию 2 той же теоремы $\theta_n \leqslant 2\pi$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n$ существует и равен 2π, т. е. полному углу вокруг вершины сектора U. Это значит, что в данном случае выполняется условие теоремы 3. Поэтому утверждение этой теоремы тоже выполняется, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ существует и равен α.

Из теоремы 3 и 4 легко следуют аналогичные свойства сходимости углов между кратчайшими:

Теорема 5. *Пусть выпуклые поверхности F_n сходятся к выпуклой поверхности F и кратчайшие L_n и M_n, исходящие из точек O_n на поверхностях F_n, сходятся к кратчайшим L и M, исходщим из точки O на F,* *причём O_n сходятся к O. Тогда, если выполнены условия теоремы 3 или 4, т. е. если полные углы вокруг точек O_n сходятся к полному углу вокруг точки O или если, в частности, полный угол вокруг точки O равен 2π, то углы между кратчайшими L_n и M_n сходятся к углу между L и M.*

В предыдущем параграфе было показано, что меньший из углов двух взаимно дополнительных секторов равен углу между ограничивающими эти секторы кратчайшими; если же углы обоих секторов равны, то они равны углу между ограничивающими кратчайшими. Следовательно, если α и α' суть углы взаимно дополнительных секторов U и U', ограниченных кратчайшими L и M, и $\alpha \leqslant \alpha'$, то α есть угол между кратчайшими L и M. Пусть α_n и α'_n — углы взаимно дополнительных секторов U_n и U'_n, ограниченных кратчайшими L_n и M_n. Тогда, если выполнены условия теоремы 3 или 4, то

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha'_n = \alpha'.$$

Если $\alpha = \alpha'$, то углы α_n и α'_n играют одинаковую роль, и так как один из них равен углу между кратчайшими L_n и M_n, то предел этого угла тоже равен α, т. е. углу между L и M.

Если же $\alpha < \alpha'$, то при больших n должно быть так же $\alpha_n < \alpha'_n$ и, следовательно, α_n будет углом между кратчайшими L_n и M_n. Поэтому в этом случае равенство $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ обозначает, что угол между кратчайшими L_n и M_n сходится к углу между L и M. Теорема доказана.

Во всех доказанных здесь теоремах 1—5 поверхности F_n, сходящиеся к F, можно, конечно, считать совпадающими с F. Тогда эти теоремы превратятся в предложения о сходимости углов на одной выпуклой поверхности. Далее, если на данной поверхности мы будем рассматривать секторы U_n с общей вершиной, то условие теоремы 3 будет тривиально выполняться: вершины всех секторов U_n, а значит и полные углы вокруг них будут совпадать. Поэтому из теорем 3 и 5 следует

Теорема 6. *Пусть кратчайшие L_n и M_n, исходящие из одной и той же точки на выпуклой поверхности, сходятся к кратчайшим L и M. Тогда: 1) углы между самими кратчайшими L_n и M_n сходятся к углу между L и M и 2) углы обоих секторов, ограниченных кратчайшими L_n и M_n, сходятся соответственно к углам секторов, ограниченных кратчайшими L и M.*

Эта теорема выражает непрерывную зависимость угла от кратчайших и существенно дополняет основные свойства угла, установленные в предыдущих параграфах. Однако исследование основных свойств угла не может быть на этом закончено, потому что, например, мы ещё не доказали даже такой, казалось бы простой, теоремы, что окрестность каждой точки на выпуклой поверхности можно разбить на секторы со сколь угодно малыми углами. Эта теорема будет установлена только в § 5 следующей главы. Тогда общее учение об угле между кратчайшими на выпуклой поверхности с точки зрения внутренней геометрии будет завершено.

Дополнение.

В начале этого параграфа мы высказали утверждение, что если точки O_n и кратчайшие L_n, M_n, исходящие из O_n на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к F, сходятся, соответственно, к точке O и кратчайшим L и M на F, то одни из взаимно дополнительных секторов, ограниченных кратчайшими L_n и M_n, сходятся к одному из секторов U и U', ограниченных L и M, а другие сходятся к другому из этих секторов. Если на L и M взять точки A и B и соединить их ломаной, составленной из кратчайших и проходящей в секторе U, то получим многоугольник, содержащий этот сектор. Отсюда ясно, что высказанное нами утверждение о сходимости секторов есть прямое следствие следующей общей леммы:

Лемма. *Пусть на замкнутой выпуклой поверхности F имеется замкнутая ломаная L без кратных точек. Она разбивает F на два многоугольника G и H. Пусть на замкнутых выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к поверхности F, имеются замкнутые ломаные L_n без кратных точек и такие, что их звенья сходятся соответственно к звеньям ломаной L. Тогда области, на которые ломаные L_n разбивают поверхности F_n, сходятся соответственно к областям G и H* [1]).

Доказательство. Возьмём внутри области G произвольную точку A и пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность точек на поверхностях $F_1, F_2, \ldots$, сходящаяся к A. При сколь угодно больших n точки A_n не могут лежать на кривых L_n, так как точка A лежит внутри области G, а кривые L_n сходятся к кривой L, образующей границу этой области. Поэтому, по крайней мере при больших n, точка A_n лежит внутри одной из областей, ограничиваемых на поверхности кривою L_n. Эту область мы обозначим G_n; нужно доказать, что области G_n сходятся к области G, а области H_n, дополняющие области G_n до поверхностей F_n, сходятся к области H.

Допустим сначала, что поверхность F не вырождается в дважды покрытую плоскую область. Тогда, по крайней мере при достаточно больших n, поверхности F_n тоже не вырождаются, и можно взять точку O, лежащую внутри этих поверхностей F_n и поверхности F. Описав вокруг O сферу S, спроектируем поверхности F и F_n из точки O на сферу S. Тогда области G, H, G_n, H_n и кривые L, L_n спроектируются на сферу S и проекции кривых L_n будут сходиться к проекции L. Путём гомеоморфного преобразования сферы S самой в себя, проекцию кривой L можно превратить в окружность, причём проекции кривых L_n перейдут в кривые, сходящиеся к этой окружности. Тогда теорема сводится к утверждению, что если простые замкнутые кривые на сфере сходятся к окружности, то ограничиваемые ими области сходятся к областям, ограниченным этой окружностью. Доказательство этого утверждения настолько очевидно, что мы не станем его проводить.

Если поверхность F вырождается в плоскую область F^*, то, взяв внутри этой области точку O и описав вокруг неё единичный круг K, преобразуем поверхность F в дважды покрытый круг K. Именно, если точка X лежит в области «сверху» («снизу») и луч OX пересекает границу области F^* в точке Y, то точке X мы сопоставляем такую точку Z, лежащую сверху (снизу) на круге K, что $OZ = \frac{OX}{OY}$. После этого, описав вокруг точки O единичную сферу S, мы переводим каждую верхнюю (нижнюю) точку круга K в лежащую над ней точку верхней (нижней) полусферы. В результате поверхность F окажется гомеоморфно отображенной на сферу S. Поверхности F_n можно сначала спроектировать на плоскость, где лежит F, а потом отобразить на сферу тем же путём (особенности, связанные с возможной невзаимной однозначностью проектирования, роли не играют. Таким образом, предыдущее рассуждение повторяется.

§ 5. Касательный конус.

До сих пор мы изучали свойства угла между кратчайшими с чисто внутренне геометрической точки зрения. Но если речь идёт не об абстрактном многообразии, а о выпуклой поверхности, то кратчайшие являются кривыми в пространстве и, естественно, встаёт вопрос о том, какой пространственный, или, если угодно,

[1]) Речь идёт о замкнутых областях, так как предел последовательности любых множеств всегда является замкнутым множеством.

внешне геометрический смысл имеет угол между кратчайшими. Ответ на этот вопрос, который будет получен, состоит в следующем.

Пусть O — точка на выпуклой поверхности F. Будем увеличивать поверхность F подобно с центром подобия в точке O. Тогда при бесконечном увеличении коэффициента подобия получающиеся поверхности будут сходиться к выпуклому конусу с вершиной в точке O. Этот конус K называется *касательным конусом* к поверхности F в точке O[1]). Вместе с тем, при указанном бесконечном подобном увеличении поверхности F всякая кратчайшая L, исходящая из точки на поверхности F, будет сходиться с некоторой образующей касательного конуса K. Эта образующая T представляет собою не что иное, как предел полупрямых, исходящих из O в переменную точку X кратчайшей L, при условии, что точка X стремится к точке O. Следовательно, образующая T является касательной полупрямой, или, как говорят, *полукасательной* к кратчайшей L. Если из точки O исходят две кратчайшие L_1 и L_2 с полукасательными T_1 и T_2, то эти полукасательные делят конус K на два сектора V и V'. Пусть U и U' — секторы, на которые кратчайшие L_1 и L_2 делят окрестность точки O на поверхности F. При бесконечном подобном увеличении один из этих секторов сходится к V, а другой — к V'. Оказывается, что угол того из секторов U и U', который сходится к V, равен углу сектора V, а угол того, который сходится к V', равен углу сектора V'. Этот результат и раскрывает полностью пространственный смысл угла сектора и, следовательно, также угла между кратчайшими. В частности, отсюда немедленно вытекает, что полный угол вокруг точки O на поверхности F есть не что иное, как полный угол касательного конуса в точке O. Теорема о сложении углов секторов на поверхности F сводится к сложению углов секторов, ограниченных образующими конуса. Ряд других свойств угла также получает соответствующую пространственную интерпретацию.

Если касательный конус сводится к плоскости, то это будет касательная плоскость к поверхности F в точке O. В этом случае угол между кратчайшими сводится к углу между полукасательными к ним. Если же касательный конус не есть плоскость, то угол между полукасательными измеренный в пространстве, будет, вообще говоря, отличен от угла, измеренного на касательном конусе. Но именно этот последний угол равен углу между кратчайшими. Следовательно, вообще говоря, пространственный угол между кратчайшими, т. е. между их полукасательными, не будет равен углу между ними в смысле внутренней геометрии поверхности.

Касательным конусом к выпуклой поверхности может быть любой выпуклый конус. А выпуклые конусы могут быть трёх сортов: плоскость, двугранный угол и конус с полным углом $< 2\pi$. В первом случае точка поверхности будет, так сказать, «гладкой» точкой, во втором — «ребристой» и в третьем — «конической».

В этом параграфе мы исследуем связь между метрикой выпуклой поверхности в окрестности точки O, с одной стороны, и метрикой касательного конуса в точке O — с другой стороны. Результат, который при этом получится, имеет самостоятельное значение для уяснения свойств внутренней метрики выпуклых поверхностей. В следующем параграфе будет доказано существование полукасательных к кратчайшим и тогда будет доказано то, что было сейчас сказано о внешне геометрической природе угла между кратчайшими.

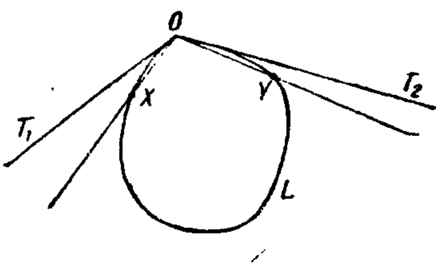
Лемма. *Выпуклая поверхность имеет в каждой точке касательный конус*, т. е., если выпуклую поверхность F бесконечно подобно увеличивать

---

[1]) Чаще определяют касательный конус как конус, образованный пределами лучей OX, идущих из O в точки X поверхности F при условии, что X стремится к O. Легко показать, что оба определения эквивалентны. Наше определение только больше соответствует нашим целям.

из некоторой её точки O, то она будет сходиться к некоторому выпуклому конусу с вершиной в точке O.

Доказательство. Допустим, что поверхность F лежит целиком в одной плоскости P. Если к тому же окрестность точки O на поверхности представляет собою окрестность её на плоскости P, то лемма очевидна: при безграничном подобном увеличении поверхности она в пределе покроет всю плоскость P, которая, таким образом, и будет касательным конусом в точке O. Если же окрестность точки O на поверхности не является её окрестностью на плоскости, то это значит, что точка O лежит на границе той области на плоскости P, которую поверхность F покрывает дважды вблизи точки O. В таком случае отрезок этой границы вблизи точки O представляет выпуклую кривую L (черт. 45). Правая и левая полукасательные T_1 и T_2 к L в точке O вырезают из P выпуклый угол V, содержащий всю поверхность F [1]). (V может быть полуплоскостью.) Дважды покрытый угол V и будет касательным конусом



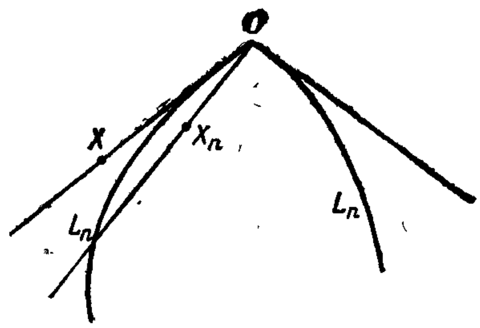
Черт. 45.

к F в точке O. Действительно, мы можем взять на L точки X и Y столь близко к O, что полупрямые OX и OY будут сколь угодно близкими к T_1 и T_2; при этом треугольник OXY будет принадлежать F. Тогда при безграничном подобном увеличении поверхности F этот треугольник в пределе покроет весь угол между OX и OY. А так как полупрямые OX и OY можно взять сколь угодно близко к полукасательным T_1 и T_2, то ясно, что и весь угол между T_1 и T_2 окажется в пределе покрытым увеличивающейся поверхностью F. Тем самым он будет пределом поверхностей, подобных F.

Допустим теперь, что поверхность F не лежит в одной плоскости. Тогда, если дополнить её до границы выпуклого тела H, то полученное тело будет иметь внутренние точки.

Проведём из точки O лучи через все внутренние точки тела H и присоединим к ним ещё все лучи, являющиеся пределами уже проведённых лучей. В результате получится, очевидно, выпуклый телесный конус V, содержащий тело H [2]). Поверхность этого конуса и будет касательным конусом к поверхности F в точке O.

Действительно, пусть X — любая точка на поверхности конуса V, отличная от O. Луч OX есть предел лучей OX_n, идущих через внутренние точки X_n тела H. Плоскость P_n, проходящая (при данном n) через точки O, X, X_n, пересекает поверхность F вблизи точки O по выпуклой кривой L_n, одна из ветвей которой лежит в угле между лучами OX и OX_n, потому что луч OX_n проходит через внутренние точки тела H, частью границы которого является L_n. (На черт. 46 изображено сечение плоскостью P_n.) При подобном увеличении поверхности F эта ветвь кривой L



Черт. 46.

[1]) При бесконечном подобном увеличении кривой L из точки O она остаётся выпуклой и сходится поэтому к двум полупрямым, исходящим из O. Это и будет правая и левая полукасательные.

[2]) Если точки A и B лежат на лучах, идущих из O через точки A_0 и B_0 тела H, то отрезок AB состоит из точек, лежащих на лучах, идущих из O через точки отрезка A_0B_0. А этот отрезок содержится в H, по выпуклости H. Следовательно, проектируя H из O, мы получаем выпуклый конус. За K мы принимаем замыкание этого конуса. Замыкание выпуклого множества выпукло, так как, если $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то отрезок AB есть предел отрезков A_nB_n.

будет также увеличиваться, оставаясь при этом в угле между OX и OX_n. А так как при больших n этот угол может быть сколь угодно малым, то отсюда ясно, что точка X будет пределом точек, лежащих на увеличивающихся кривых L_n, т. е. пределом точек, лежащих на увеличивающихся поверхностях F.

С другой стороны, если точка X лежит вне конуса V, то она не может быть пределом точек, лежащих на увеличивающихся поверхностях F, поскольку все эти поверхности, очевидно, остаются в конусе V. Если же точка X лежит внутри конуса V, то луч OX проходит через внутренние точки тела H. Иначе через луч OX проходила бы опорная плоскость к H, которая отрезала бы от конуса V часть, не могущую содержать лучей, предельных для лучей, идущих из O через внутренние точки тела H. Но раз луч OX проходит через внутренние точки тела H, то вокруг него есть конус из таких же лучей. Этот конус не будет поэтому содержать ни точек поверхности F, ни точек поверхностей, подобных F, кроме, конечно, точки O. Поэтому точка X, лежащая внутри конуса V, не может быть предельной для точек поверхностей, подобных F.

Следовательно, все точки поверхности конуса V и только они суть предельные точки для точек поверхностей, подобных F, а это и значит, что поверхность конуса V есть предел поверхностей, подобных F.

Теперь мы докажем, что выпуклая поверхность в бесконечно малой окрестности любой своей точки O изометрична с точностью до бесконечно малых высшего порядка касательному конусу в точке O. Прежде следует, однако, точно определить смысл выражения: «изометрична с точностью до бесконечно малых высшего порядка».

Пусть F и F' — две поверхности, а O и O' — точки на них. Мы говорим, что в окрестностях точек O и O' поверхности F и F' изометричны с точностью до бесконечно малых высшего порядка, или *«изометричны в бесконечно малом»*, если существует отображение h окрестности точки O на окрестность точки O', обладающее следующими свойствами:

1) h взаимно однозначно и взаимно непрерывно,

2) $h(O)=O'$, т. е. отображение h переводит O в O',

3) при всяком $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что как только $\rho_F(OX)$, $\rho_F(OY)<\delta$, так

$$|\rho_F(XY)-\rho_{F'}(X'Y')|<\varepsilon\max[\rho_F(OX),\ \rho_F(OY)],\tag{1}$$

где ρ_F и $\rho_{F'}$ — расстояния на F и F'; точки X и Y лежат на F в указанной окрестности точки O, а X' и Y' суть образы этих точек при отображении h. (Вместо (1) можно написать

$$|\rho_F(XY)-\rho_{F'}(X'Y')|<\varepsilon'\max[\rho_{F'}(O'X'),\ \rho_{F'}(O'Y')],$$

где ε' связано с ε формулы (1) равенством $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Отсюда ясно, что обе поверхности играют здесь одинаковую роль.)

Отображение, обладающее указанными свойствами, мы будем называть *«изометричным в бесконечно малом»* отображением окрестности точки O на окрестность точки O'.

Теорема 1. *Выпуклая поверхность в окрестности любой своей точки изометрична в бесконечно малом касательному конусу в этой точке.*

Иными словами, окрестность точки O на выпуклой поверхности F допускает изометричное в бесконечно малом отображение h на окрестность той же точки на касательном конусе.

Следовательно, в согласии с данным только что определением, отображение h таково, что 1) h есть гомеоморфизм; 2) $h(O)=O$; 3) при всяком $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что как только $\rho_F(OX)$, $\rho_F(OY)<\delta$, так

$$|\rho_F(XY)-\rho_K(X'Y')|<\varepsilon\max[\rho_F(OX),\ \rho_F(OY)],$$

где $\rho_K(X', Y')$ — расстояние на касательном конусе между образами X', Y' точек X и Y.

Если конус K не вырождается в дважды покрытый угол на плоскости, то за отображение h можно принять проектирование вдоль любого направления, проходящего внутри конуса K.

Если конус K вырождается в дважды покрытый угол V на плоскости P, то сама поверхность F лежит в P. Можно предположить, что F замкнута, так как речь идёт о свойстве её в малом. Тогда F покрывает дважды некоторую выпуклую область на плоскости P. Точка O лежит на границе этой области. Возьмём в плоскости P какое-либо направление, проходящее внутри угла V, и через каждую точку поверхности F проведём прямую, параллельную этому направлению. Пусть одна из этих прямых l выходит из поверхности F в точке X и проходит через одну из сторон угла V в точке X_1. Тогда сместим весь отрезок прямой l, лежащей в F, так, чтобы точка X попала в точку X_1. Эта операция устанавливает отображение поверхности F в конус V, если условиться отображать каждую сторону поверхности F на соответствующую сторону конуса V. Легко видеть, что при этом условии рассматриваемое отображение будет взаимно однозначным и непрерывным в окрестности точки O. Это отображение можно принять за отображение h, фигурирующее в теореме.

Теперь докажем нашу теорему. Так как речь идёт о свойстве поверхности в малом, то можно предположить поверхность F замкнутой, чтобы обойтись без лишних оговорок. Пусть O — точка на F и K — касательный конус к F в точке O. Будем обозначать через λM фигуру, получающуюся из фигуры M при преобразовании подобия с коэффициентом λ и с центром в точке O.

Пусть ρ_λ — расстояние на поверхности λF; в частности, ρ_1 — расстояние на самой F; пусть ρ_K — расстояние на конусе K, а ρ_0 — расстояние в пространстве.

Ограничимся точками поверхностей λF, расстояния которых от точки O меньше единицы:

$$\rho_\lambda(OX)<1. \tag{2}$$

Опишем вокруг точки O шар S большого радиуса R, скажем, $R>2$. Кусок поверхности шара S, вырезываемый конусом K, вместе с частью конуса, лежащей в шаре S, образует замкнутую выпуклую поверхность K_1. Аналогично, часть поверхности λF, лежащая в шаре S, вместе с лежащим внутри λF куском поверхности самого шара образует замкнутую выпуклую поверхность F_λ. И так как шар S имеет большой радиус, то расстояния на λF и $F\lambda$ будут одни и те же для точек, удовлетворяющих условию (2). Аналогично, расстояния на K и K_1 будут одни и те же для точек, не слишком удалённых от O, и во всяком случае для тех точек, расстояние которых от O меньше половины радиуса шара S. Поэтому, если мы ограничимся только такими точками, то вместо расстояний на F_λ и K_1 можно будет брать прямо расстояния на λF и K. Между тем, поскольку при $\lambda\to\infty$ поверхности λF сходятся к касательному конусу K, то и поверхности F_λ сходятся к K_1. Поверхности F_λ и K_1 замкнуты и потому к ним приложима теорема 2 § 1 о сходимости метрик. Применяя эту теорему и ограничиваясь точками, не слишком удалёнными от точки O, мы можем утверждать следующее: для любого $\varepsilon>0$ найдутся такое λ_0 и такое $\delta>0$, что лишь только $\lambda>\lambda_0$ и расстояния точек X и Y на λF от точек X' и Y' на K меньше δ, так

$$|\rho_\lambda(XY)-\rho_K(X'Y')|<\varepsilon \tag{3}$$

$$(\rho_\lambda(OX),\ \rho_\lambda(OY)<1,\quad \rho(XX'),\ \rho(YY')<\delta,\quad \lambda>\lambda_0).$$

Допустим теперь, что конус K не вырождается. Пусть h обозначает проектирование вдоль какого-нибудь направления, проходящего внутри K. Тогда, поскольку λF сходятся к K, найдётся такое λ_1, что при всяком $\lambda > \lambda_1$ расстояние от точки x на λF от её проекции на K будет меньше δ, если только расстояние X от O меньше единицы:

$$\rho(X,\ h(X)) < \delta \qquad (\rho_\lambda(OX) < 1). \tag{4}$$

Если мы теперь возьмём любое $\lambda > \lambda_0$ и $> \lambda_1$, то в силу (3) и (4) мы будем иметь, что

$$|\rho_\lambda(XY) - \rho_K(h(X)\,h(Y))| < \varepsilon, \tag{5}$$

если

$$\rho_\lambda(OX),\ \rho_\lambda(OY) < 1 \text{ и } \lambda > \max(\lambda_0,\ \lambda_1) = \lambda_2.$$

Пусть теперь A и B — те точки на исходной поверхности F, которые при подобном увеличении F в λ раз переходят в точки X и Y, т. е. $X = \lambda A$, $Y = \lambda B$. Расстояние на поверхности при её подобном увеличении в λ раз также увеличивается в λ раз и поэтому

$$\rho_\lambda(XY) = \lambda\rho_1(AB). \tag{6}$$

Вместе с тем при преобразовании подобия проекция переходит в проекцию, так что

$$h(X) = \lambda h(A), \qquad h(Y) = \lambda h(B).$$

Наконец, при наших преобразованиях подобия с центром в O, конус K переходит сам в себя и если точки $h(A)$, $h(B)$ переходят в точки $h(X)$, $h(Y)$, то расстояние между ними увеличивается при этом в λ раз, т. е.

$$\rho_K(h(X)\,h(Y)) = \lambda\rho_K(h(A)\,h(B)). \tag{7}$$

Воспользовавшись теперь равенствами (6) и (7), мы вместо (5) получим, что

$$|\rho_1(AB) - \rho_K(h(A)\,h(B))| < \frac{\varepsilon}{\lambda},$$

если

$$\rho_1(OA),\ \rho_1(OB) < \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda_2}.$$

Беря

$$\frac{1}{\lambda} = \max[\rho_1(OA),\ \rho_1(OB)] \text{ и } \delta = \frac{1}{\lambda_3},$$

мы видим, что эти формулы и дают нам утверждение, высказанное в теореме.

Если конус K вырождается в дважды покрытый плоский угол, то вместо проектирования мы принимаем за h отображение, которое было описано выше. При этом все рассуждения останутся буквально теми же, так что было бы излишним повторять их применительно к этому случаю.

Доказанная теорема не принадлежит, конечно, внутренней геометрии, поскольку в ней фигурирует понятие о касательном конусе, определённое чисто внешним образом. Однако в ней устанавливается важное свойство внутренней метрики выпуклой поверхности и стоит лишь изменить формулировки, чтобы придать этой теореме чисто внутренне геометрическую форму:

Для каждой точки O выпуклой поверхности существует конус K такой, что окрестность точки O допускает «изометричное в бесконечно малом» отображение на окрестноть вершины конуса K.

Здесь самый конус K тоже рассматривается, конечно, с точки зрения его внутренней метрики. Так как касательный конус к выпуклой поверхности — выпуклый, то с точки зрения внутренней метрики он характеризуется тем, что полный угол вокруг его вершины $\leqslant 2\pi$.

Заметим в заключение, что, рассматривая и поверхность, и касательный конус с точки зрения только внутренней метрики, мы естественно приходим к следующему понятию. Пусть окрестность точки O в многообразии R с какой-то заданной в нём метрикой допускает «изометричное в бесконечно малом» отображение на окрестность вершины некоторого конуса K. В таком случае мы говорим, что конус K является «касательным конусом многообразия R в точке O». Это понятие оказывается полезным в теории многообразий с внутренней метрикой; оно является обобщением принятого в теории римановых двухмерных многообразий понятия о касательной эвклидовой плоскости, т. е. в конечном счёте понятия о линейном элементе. Однако в общем виде мы этим понятием пользоваться дальше не будем и потому мы не останавливаемся на нём подробнее.

§ 6. Пространственный смысл угла между кратчайшими.

Существование полукасательной к кратчайшей на выпуклой поверхности было доказано И. М. Либерманом в его прекрасной работе «Геодезические линии на выпуклых поверхностях» [1]). Доказательство основано на лемме Буземана и Феллера, которой мы уже имели случай воспользоваться при доказательстве теоремы о сходимости метрик (лемма 2 § 1 гл. III). Используя эту лемму, Либерман посредством изящного геометрического рассуждения получает не только существование полукасательной, но выводит целый ряд важных внешне геометрических свойств кратчайших на выпуклых поверхностях. Мы воспроизведём здесь доказательство части результатов Либермана. Так как речь будет итти о свойствах кратчайших в малом, то можно рассматривать замкнутые выпуклые поверхности, потому что всякую конечную выпуклую поверхность можно дополнить до замкнутой, не меняя её метрики в достаточно малых областях.

Лемма 1. *Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность, не вырождающаяся в плоскую область, и L — кратчайшая на F. Возьмём на L произвольную точку O и через все точки L, достаточно близкие к O, проведём параллельные прямые так, чтобы они проходили через внутренние точки тела, ограниченного поверхностью F. Если полученный таким образом цилиндр C развернуть на плоскость, то лежащий на нём отрезок кратчайшей перейдёт в выпуклую кривую. Эта кривая будет обращена выпуклостью в ту сторону, которая соответствует части цилиндра C, выходящей из тела, ограниченного поверхностью F.*

Доказательство. Пусть L' — кривая, в которую переходит кратчайшая L при развёртывании цилиндра C на плоскость (черт. 47). Пусть C^* — та часть цилиндра C, которая выходит из тела, ограниченная поверхностью F. Допустим, что кривая L' не обладает свойством, указанным в лемме. Тогда на ней можно найти две такие точки A' и B', что хорда $\overline{A'B'}$ лежит на части C^* развёрнутого цилиндра C. Если $\overset{\frown}{A'B'}$ — соответствующая дуга кривой L', то, очевидно,

$$\overset{\frown}{A'B'} > \overline{A'B'}. \tag{1}$$

На самом цилиндре C хорде $\overline{A'B'}$ и дуге $\overset{\frown}{A'B'}$ отвечают некоторая линия $\overline{AB}$

---

[1]) Доклады Академии наук СССР, т. XXXII, № 5 (1941 г.), стр. 310—313. Благодаря общности и простоте метода, Либерман получает в рамках небольшой заметки много важных теорем о кратчайших на выпуклых поверхностях в пространстве любого числа измерений. Эти теоремы с их доказательствами буквально обобщаются на выпуклые поверхности в n-мерных пространствах любой постоянной кривизны. Доказательство существования касательной к кратчайшей в точках, где выпуклая поверхность имеет касательную плоскость, было дано Буземаном и Феллером.

и дуга $\widehat{AB}$ кратчайшей L (точки A и B — те, которые при развёртывании цилиндра дают точки A' и B').

При этом

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}, \quad \widehat{A'B'} = \widehat{AB}. \tag{2}$$

Линия $\overline{AB}$ лежит на части C^* цилиндра C, выступающей из тела, ограниченного поверхностью F. На основании леммы 2 § 1 гл. III, эта линия, следовательно, не короче кратчайшей $\widehat{AB}$, т. е.

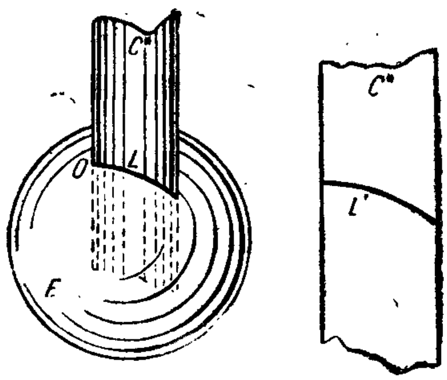
$$\widehat{AB} \leqslant \overline{AB}. \tag{3}$$

Но вследствие равенств (2) это неравенство противоречит неравенству (1). Следовательно, наше предположение невозможно, и лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть O — точка на выпуклой поверхности F и X_i ($i = 1, 2, \ldots$) — последовательность точек на той же поверхности, сходящаяся к O. Тогда отношение расстояния от O до X_i в пространстве и на поверхности F стремится к единице*:

$$\lim_{x_i \to O} \frac{\rho(OX_i)}{\rho_F(OX_i)} = 1, \tag{4}$$

где ρ — расстояние в пространстве, а ρ_F — расстояние на поверхности.



Черт. 47.

Доказательство. Спроектируем окрестность точки O на касательный конус K к поверхности F в точке O вдоль любого направления, проходящего внутри конуса K.

Пусть X_i' — проекция точек X_i, а ρ_K — расстояние на K. Очевидно, что

$$\lim_{X_i \to O} \frac{\rho_K(OX_i')}{\rho(OX_i)} = 1, \tag{5}$$

а по теореме о касательном конусе, доказанной в § 5 [1]),

$$\lim_{X_i \to O} \frac{\rho_K(OX_i')}{\rho_F(OX_i)} = 1. \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает (4), что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть конец вектора $x(s)$, проведённого из некоторого начала, описывает кратчайшую L на выпуклой поверхности, причём s есть длина дуги этой кратчайшей, отсчитываемая от одного из её концов. Тогда функция $x(s)$ имеет в каждой точке правую и левую производные: $x_r'(s)$ и $x_l'(s)$, причём* $|x_r'|^2 = |x_l'|^2 = 1$. (В концах кратчайшей имеется, конечно, только по одной производной.)

Доказательство. На поверхности, вырождающейся в дважды покрытую плоскую область, кратчайшая L представляет один или два прямолинейных отрезка. Поэтому в этом случае теорема очевидна, и можно предполагать, что речь идёт о невырождающейся поверхности. Достаточно ограничиться рассмотрением правой производной, так как обе производные играют одинаковую роль.

[1]) По этой теореме, при $\rho_F(OX_i) < \delta$ имеем $|\rho_F(OX_i) - \rho_K(OX_i')| < \varepsilon\rho_F(OX_i)$ или $\left|\frac{\rho_K(OX_i')}{\rho_F(OX_i)} - 1\right| < \varepsilon$, так что при $\rho_F(OX_i) \to 0$ получаем (6).

По определению

$$x'_r(s) = \lim_{h \to +0} \frac{x(s+h) - x(s)}{h}.$$

Очевидно, $|x(s+h) - x(s)|$ есть длина хорды, а h — длина соответствующей дуги кратчайшей. Поэтому из леммы 2 следует, что если $x'_r(s)$ существует, то $|x'_r(s)|^2 = 1$. Следовательно, остаётся доказать существование $x'_r(s)$. Для этого возьмём какую-либо точку O на кратчайшей L и, выделив, если нужно, из нашей выпуклой поверхности любую конечную область, содержащую эту точку, дополним её до замкнутой выпуклой поверхности, не вырождающейся в плоскую область. Возьмём внутри этой поверхности F три точки X, Y, Z так, чтобы они не лежали в одной плоскости с точкой O. Проведя прямые OX, OY, OZ, примем их за оси координат: точка O будет началом. Пусть $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ — ортогональные проекции вектора $x(s)$, проведённого из O в переменную точку на кратчайшей L. Если мы докажем, что каждая из функций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ имеет в точке O правую производную, то тем самым требуемый результат будет достигнут.

Рассмотрим, например, $x(s)$. Через все точки кратчайшей L, достаточно близкие к O, мы проводим прямые, параллельные прямой OX. Так как точка X лежит внутри поверхности F, то проведённые прямые будут проходить через внутренние точки поверхности F, т. е. внутри ограниченного ею тела. Эти прямые образуют некоторый цилиндр.

Если этот цилиндр развернуть на плоскость, то, согласно лемме 1, лежащий на нём отрезок кратчайшей L перейдёт в выпуклую кривую L'. Величина $x(s)$ есть не что иное, как координата точки кратчайшей L вдоль оси OX[1]. После развёртывания на плоскость она даёт соответствующую координату точки на кривой L'. Так как кривая L' выпуклая, то в каждой её точке существует правая производная от $x(s)$ по длине её дуги [2], т. е. по s, ибо при развёртывании длины сохраняются. Теорема доказана.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в двух утверждениях: 1) *кратчайшая на выпуклой поверхности имеет в каждой точке правую и левую касательные*; 2) *отношение хорды к дуге кратчайшей стремится к единице, когда один из концов дуги неподвижен и длина дуги стремится к нулю.*

Если взять на кратчайшей L точку O и из этой точки увеличивать поверхность подобно до бесконечности, то поверхность будет переходить в касательный конус, а правая и левая ветви кратчайшей L — в правую и левую полукасательные. Правая (левая) полукасательная есть предел полупрямых, проведённых из точки O через точку, бесконечно близкую к O и лежащую на кривой справа (слева) от O. Отсюда легко заключить, что она есть также предел, к которому стремится правая (левая) ветвь кривой при бесконечном подобном увеличении её из точки O.

Теорема 2. *Угол между кратчайшими, исходящими из точки O на выпуклой поверхности F, равен углу между полукасательными к ним, измеренному на конусе K, касательном к F в точке O.*

Доказательство. Возьмём на выпуклой поверхности F точку O и спроектируем её окрестность на касательный конус K в этой точке вдоль направления, проходящего внутри этого конуса; или, если конус вырождается в дважды покрытый плоский угол, то произведём отображение окрестности точки O,

---

[1]) Координата определяется путём проектирования на ось OX плоскостью, перпендикулярной оси OX, но, вообще говоря, не параллельной плоскости OYZ.

[2]) Выпуклая кривая имеет в каждой точке правую касательную. Если $\eta = f(\xi)$ — уравнение кривой в прямоугольных координатах, то существует $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\text{пр}}$. Вместе с тем, отношение длины хорды $\sqrt{\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2}$ к длине дуги стремится к единице при $\Delta\xi \to 0$, как это следует из леммы 2. Отсюда ясно, что существует правая производная от η по дуге.

описанное в § 5. При бесконечном подобном увеличении конуса из его вершины проекции кратчайших, исходящих из O, будут сходиться к полукасательным.

Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из точки O, L' и M' — полукасательные к ним, а X и Y — переменные точки на L и M, сходящиеся к O так, что отношение $\frac{\rho_F(OY)}{\rho_F(OX)}$ остаётся заключённым в положительных границах. Докажем, что тогда *угол* $\gamma(x, y)$ *в плоском треугольнике со сторонами* $x = \rho_F(OX)$, $y = \rho_F(OY)$, $z = \rho_F(XY)$ *сходится к углу между полукасательными* L', M'. Так как предел угла $\gamma(x, y)$ и есть угол между кратчайшими, то тем самым теорема будет доказана.

Выберем какую-либо последовательность точек X_n, Y_n, так, чтобы отношение $\frac{\rho_F(OY_n)}{\rho_F(OX_n)}$ стремилось к определённому пределу. Спроектируем кратчайшие L и M на конус K и пусть X_n', Y_n' обозначают проекции точек X_n, Y_n. Каждому положению точек X_n, Y_n поставим в соответствие подобное преобразование с центром подобия в точке O и с коэффициентом подобия, равным $\frac{1}{\rho_K(OX_n')}$. Тогда точки X_n'', в которые будут при этом переходить точки X_n' будут лежать на постоянном расстоянии, равном 1, от точки O: $\rho_K(OX_n'') = 1$. Проекции кратчайших L и M будут сходиться к полукасательным L' и M', потому что коэффициент подобия $\frac{1}{\rho_K(OX_n')}$ бесконечно возрастает. Следовательно, точки X_n'' будут сходиться к некоторой точке X'' на L'. Точки Y_n'', соответствующие точкам Y_n', тоже будут сходиться к некоторой точке Y'' на M', отличной от точки O. Действительно, отношение $\frac{\rho_F(OY_n)}{\rho_F(OX_n)}$ стремится к положительному пределу и тем самым отношение $\frac{\rho_K(OY_n')}{\rho_K(OX_n')}$ стремится к тому же пределу, как это следует из теоремы, доказанной в предыдущем параграфе[1]). Но при подобном увеличении отношение расстояний не изменяется и, следовательно, $\frac{\rho_K(OY_n'')}{\rho_K(OX_n'')} = \rho_K(OY_n'')$ стремится к тому же пределу. Так как, кроме того, точки Y_n'' приближаются к полукасательной M', то они сходятся к некоторой точке Y'' на M', отличной от O.

Сравним отношения расстояний

$$\rho_F(OX_n) : \rho_F(OY_n) : \rho_F(X_nY_n)$$

и

$$\rho_K(OX_n') : \rho_K(OY_n') : \rho_K(X_n'Y_n').$$

Как уже было отмечено, из теоремы предыдущего параграфа следует, что пределы отношений $\rho_F(OY_n) : \rho_F(OX_n)$ и $\rho_K(OY_n') : \rho_K(OX_n')$ равны. В силу той же теоремы

$$\frac{\rho_F(X_nY_n) - \rho_K(X_n'Y_n')}{\max[\rho_F(OX_n), \rho_F(OY_n)]} \to 0. \tag{7}$$

Так как отношение $\rho_F(OY_n) : \rho_F(OX_n)$ ограничено, то в знаменателе можно взять просто $\rho_F(OX_n)$. Кроме того, отношение $\rho_K(OX_n') : \rho_F(OX_n)$ стремится

---

[1]) В сноске на стр. 139 (при доказательстве леммы 2) уже было показано, что $\frac{\rho_K(OX_n')}{\rho_F(OX_n)} \to 1$ и аналогично $\frac{\rho_K(OY_n')}{\rho_F(OY_n)} \to 1$, откуда и следует сделанное сейчас утверждение.

к единице, а потому вместо (7) можно написать:

$$\frac{\rho_F(X_nY_n)}{\rho_F(OX_n)}-\frac{\rho_K(X'_nY'_n)}{\rho_K(OX'_n)}\to 0.$$

Следовательно пределы всех отношений

$$\rho_F(OX_n):\rho_F(OY_n):\rho_F(X_nY_n)$$

и

$$\rho_K(OX'_n):\rho_K(OY'_n):\rho_K(X_n'Y_n')$$

должны быть равны.

При подобном преобразовании отношения расстояний не изменяются. Поэтому в последних отношениях точки X'_n, Y'_n можно заменить точками X''_n, Y''_n. Но точки X''_n, Y_n'' сходятся к точкам X'', Y'', а потому окончательно заключаем, что пределы отношений

$$\rho_F(OX_n):\rho_F(OY_n):\rho_F(X_nY_n)$$

равны отношениям

$$\rho_K(OX''):\rho_K(OY''):\rho_K(X''Y'').$$

Отсюда следует, что углы плоских треугольников T_n со сторонами, равными $x_n=\rho_F(OX_n)$, $y_n=\rho_F(OY_n)$, $z_n=\rho_F(X_nY_n)$, сходятся к углам треугольника $OX''Y''$ (это — треугольник на конусе и потому он изометричен плоскому треугольнику со сторонами $\rho_K(OX'')$ и т. д.) Угол при вершине O треугольника $OX''Y''$ и есть угол α' между полукасательными L' и M', а соответствующий ему угол треугольника T_n есть $\gamma(x_n, y_n)$. Следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(x_n, y_n)=\alpha'.$$

Это доказано для любой последовательности X_n, Y_n, для которой отношение $\rho_F(OY_n):\rho_F(OX_n)$ имеет положительный предел. Следовательно, то же будет верно, если точки X и Y стремятся к O так, чтобы только отношение $\rho_F(OY):\rho_F(OX)$ оставалось в положительных границах. Так как $\lim\limits_{x, y\to 0}\gamma(x,y)$ и есть угол между кратчайшими L и M, то теорема доказана.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что ни в одном пункте доказательства мы не воспользовались существованием $\lim\limits_{x, y\to 0}\gamma(x, y)$. Существование этого предела было нами доказано для всех последовательностей, для которых $\frac{y}{x}=\frac{\rho_F(OY)}{\rho_F(OX)}$ остаётся в положительных границах. Поэтому, если ослабить определение угла между кратчайшими, допуская только такие последовательности x и y, то самый факт существования угла будет вытекать из теорем о касательном конусе и о существовании полукасательных к кратчайшим. Этот результат, конечно, слабее существования $\lim\limits_{x, y\to 0}\gamma(x, y)$ для всех последовательностей $x, y\to 0$, и он не может быть усилен, потому что можно указать примеры поверхностей, конечно, не выпуклых, для которых теоремы о касательном конусе и существовании полукасательных выполняются, но $\lim\limits_{x, y\to 0}\gamma(x,y)$ существует не для всех последовательностей x, $y\to 0$. Тем не менее здесь открывается возможность построить учение об угле между кратчайшими на основе указанных теорем без привлечения условия выпуклости.

Теорема 3. *Полный угол вокруг точки O на выпуклой поверхности F равен полному углу касательного конуса K поверхности F в точке O.*

Доказательство. Пусть θ — полный угол вокруг точки O поверхности F. Как показано в § 3, он равен верхней границе сумм углов между соседними кратчайшими, проводимыми из O в произвольном числе. Поэтому при всяком $\varepsilon > 0$ найдутся такие кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$, исходящие из O, что

$$\alpha_{12} + \alpha_{23} + \ldots + \alpha_{n-1, n} + \alpha_{n1} > \theta - \varepsilon, \tag{8}$$

причём кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$ предполагаются, конечно, перенумерованными в порядке их расположения вокруг точки O, а α_{ij} обозначает угол между L_i и L_j.

Как только что доказано, углы α_{ij} равны углам между полукасательными к кратчайшим L_i, L_j. Эти полукасательные расположены на касательном конусе K, очевидно, в том же порядке. Полный угол θ' вокруг вершины конуса K тоже равен верхней границе сумм углов между его образующими [1]. Поэтому

$$\theta' \geqslant \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{n1}.$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (8), получаем, что $\theta' > \theta - \varepsilon$, а так как ε произвольно, то

$$\theta' \geqslant \theta. \tag{9}$$

При подобном увеличении поверхности F в λ раз она переходит в поверхность λF с тем же полным углом вокруг точки O, и при $\lambda \to \infty$ поверхности λF сходятся к конусу K. В § 4 было доказано, что нижний предел полных углов не меньше полного угла на предельной поверхности; поэтому $\varliminf_{\lambda \to \infty} \theta_\lambda \geqslant \theta'$ и так как $\theta_\lambda = \theta$, то $\theta \geqslant \theta'$. Сравнивая это неравенство с неравенством (9), мы видим, что $\theta = \theta'$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть кратчайшие L и M, исходящие из точки O на выпуклой поверхности F, разбивают её окрестность на секторы U и V. Как было показано, при бесконечном подобном увеличении из точки O кратчайшие L и M сходятся к своим полукасательным L', M', а секторы U и V — к секторам U' и V', которые полукасательные L', M' ограничивают на конусе K, касательном к F в точке O. Углы секторов U' и V' равны углам секторов U и V.*

Доказательство. Так как при бесконечном увеличении поверхность F сходится к конусу K, а кратчайшие L, M — к полукасательным L', M', то и секторы U и V сходятся к секторам, ограниченным на K образующими L' и M'. При подобных преобразованиях углы не меняются. Поэтому полные углы вокруг точки O на поверхностях λF, получающихся из F подобным увеличением, постоянно равны полному углу конуса K. А тогда можно применить теорему 3 § 4, которая утверждает, что в таком случае предел углов секторов равен углу предельного сектора. У всех секторов, получающихся из U (или V) подобным увеличением, углы равны. Следовательно, они равны углу предельного сектора U' (или V'), что и требовалось доказать.

Таким образом, углы секторов на поверхности сводятся к углам секторов на касательном конусе и приобретают поэтому простое наглядное значение. Можно было бы углы секторов на поверхности определить как углы соответствующих секторов на касательном конусе, а полный угол вокруг точки — как

---

[1] Он, конечно, равен сумме углов между образующими, если они делят конус на достаточно малые секторы; но без этого условия возможно, что $\theta' > \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{n1}$.

полный угол касательного конуса. Тогда мы сразу получили бы все свойства углов секторов, выведенные в § 3. Сопоставляя это замечание с тем, что было сказано после теоремы 2 об угле между кратчайшими, мы видим, что, действительно, учение об углах может быть построено на основании теоремы о касательном конусе и существовании полукасательных. Такое изложение было бы, пожалуй, нагляднее, чем то, которому мы следовали в первых параграфах этой главы. Недостаток его состоит в том, что, как уже было отмечено после теоремы 2, теорема о существовании угла получается в ослабленной форме. Кроме того, здесь привлекаются понятия касательного конуса и полукасательной, внешние по отношению к внутренней метрике поверхности[1].

Существенное различие между внутренней и «внешней» точками зрения обнаруживается, например, в теоремах о сходимости углов. В § 4 было доказано, что если выпуклые поверхности F_n сходятся к F и полные углы вокруг точек O_n на поверхностях F_n сходятся к полному углу вокруг предельной точки O на поверхности F, то углы секторов с вершинами в O_n сходятся к углам предельных секторов с вершиной O (теорема 3 § 4). Либерман доказал следующую теорему о сходимости полукасательных к кратчайшим:

Пусть выпуклые поврхности F_n сходятся к выпуклой поверхности F, точки O_n на поверхностях F_n сходятся к точке O и кратчайшие L_n, исходящие из точек O_n, сходятся к кратчайшей L. Тогда, если касательные конусы поверхностей F_n в точках O_n сходятся к касательному конусу поверхности F в точке O, то полукасательные к кратчайшим L_n в точках O_n сходятся к полукасательным к кратчайшей L в точке O[2].

Эта теорема придаёт теореме 3 § 4 более точный смысл, если касательные конусы в точках O_n сходятся к касательному конусу в точке O. Однако теорема 3 § 4 не следует из теоремы Либермана, потому что из сходимости полных углов касательных конусов не следует сходимость самих конусов. Действительно, если касательный конус в точке O сводится к двугранному углу, то его полный угол равен 2π и тогда, как показано в § 4, полные углы вокруг точек O_n заведомо сходятся к полному углу вокруг точки O. Однако касательные конусы в точках O_n могут сводиться к плоскостям и не будут сходиться к касательному конусу в точке O, что можно видеть на самых простых примерах. Тогда полукасательные к любым кратчайшим, исходящим из точек O_n, заведомо не будут сходиться к полукасательным к кратчайшим, исходящим из точки O. Можно показать, что это есть единственный случай, когда из сходимости полных углов

[1] Как было указано в конце § 5, понятию касательного конуса можно придать чисто внутренне геометрический смысл. Полукасательную тоже можно трактовать аналогичным образом. Пусть K — касательный конус к поверхности F в точке O (в смысле, указанном в конце § 5. Пусть L — кривая на F, исходящая из O. Если образ кривой L на конусе K имеет в точке O полукасательную L', то L' можно назвать полукасательной к кривой L. Речь идёт об образе L при отображении, изометрическом в бесконечно малом. Это отображение не определено однозначно и при одном отображении образ может иметь полукасательную, а при другом — нет (легко указать соответствующие примеры). Следовательно, в этом определении заключается некоторое неудобство. Во всяком случае, пользуясь касательными, мы выходим за пределы поверхности. Заметим ещё, что из одного существования полукасательных, так же как из одного существования касательного конуса нельзя заключать о существовании угла между кратчайшими в смысле внутренней геометрии. Можно указать примеры поверхностей (не выпуклых, конечно), в некоторых точках которых имеет место только одно из двух: либо существование касательного конуса, либо существование полукасательных к кратчайшим, и в этих примерах не все кратчайшие, исходящие из указанных точек, образуют друг с другом определённые углы, даже в том более слабом смысле, какой был определён после теоремы 2.

[2] См. цитированную заметку Либермана в Докладах Академии наук, т. XXXII, № 5 (1941), стр. 310—313. В этой заметке указанная теорема даже не формулирована, но она, очевидно, следует из приведённых там теорем. Едва намеченная там идея доказательства позволяет, однако, восстановить его полностью.

вокруг точек на сходящихся выпуклых поверхностях не следует сходимость касательных конусов.

С внутренней точки зрения те точки, где касательный конус оказывается двугранным углом, могут ничем не отличаться от точек, где есть касательная плоскость. Примером могут служить точки внутри рёбер многогранника. Однако, например, точки на окружности основания кругового цилиндра отличаются от остальных точек цилиндра, так как даже в сколь угодно малой их окрестности цилиндр (вместе с основанием) нельзя развернуть на плоскость. Однако это различие между точками цилиндра не мешает их окрестностям быть изометричными с точностью до бесконечно малых порядка выше первого: а для определения угла нужна только такая точность.

В заключение приведём ещё одну теорему Либермана, устанавливающую общие свойства кратчайших как кривых в пространстве[1]). Вернёмся для этого к рассуждениям, доказывающим существование полукасательной. Проводя через точки кратчайшей L параллельные прямые, идущие внутрь тела, ограниченного данной выпуклой поверхностью, получаем цилиндр. При развёртывании этого цилиндра на плоскость кратчайшая переходит в выпуклую кривую L'. Координата $x(s)$ вдоль образующих — одна и та же для точки на L и на L'. А так как кривая L' — выпуклая, то правые и левые производные $x'_r(s)$, $x'_l(s)$ от этой координаты по длине дуги обладают следующими свойствами:

1) При всяком s $x'_r(s)$ непрерывна справа, а $x'_l(s)$ непрерывна слева, и

$$x'_r(s) = \lim_{h \to +0} x'_r(s+h) = \lim_{h \to +0} x'_l(s+h),$$

$$x'_l(s) = \lim_{h \to +0} x'_l(s-h) = \lim_{h \to +0} x'_r(s-h).$$

2) Всюду, исключая самое большее, счётное число значений s,

$$x'_r(s) = x'_l(s).$$

3) $x'_r(s)$ и $x'_l(s)$ суть монотонные функции.

Известно, что монотонная функция имеет почти везде производную; поэтому из 3 следует:

4) Почти при всех значениях s существует вторая производная $x''(s)$.

Применяя те же выводы к координатам $y(s)$ и $z(s)$ по двум другим направлениям и переходя от проекций $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ к самому вектору $\boldsymbol{x}(s)$, мы приходим к следующей теореме:

Пусть конец вектора $\boldsymbol{x}(s)$ описывает кратчайшую на выпуклой поверхности, причём s есть длина дуги этой кратчайшей. Пусть $\boldsymbol{x}'_r(s)$ и $\boldsymbol{x}'_l(s)$ суть правая и левая производные от $\boldsymbol{x}(s)$ по s. Тогда: 1) *при всех s*

$$\boldsymbol{x}'_r(s) = \lim_{h \to +0} \boldsymbol{x}'_r(s+h) = \lim_{h \to +0} \boldsymbol{x}'_l(s+h),$$

$$\boldsymbol{x}'_l(s) = \lim_{h \to +0} \boldsymbol{x}'_l(s-h) = \lim_{h \to +0} \boldsymbol{x}'_r(s-h),$$

т. е. правая и левая касательные непрерывны, соответственно, справа и

---

[1]) Эта теорема не имеет, однако, прямого отношения к нашей теме и не будет далее использоваться.

слева; 2) *всюду, кроме, самое большее, счётного числа точек,* $x'_r(s) = x'_l(s)$, *т. е. правая и левая касательные совпадают*; 3) $x'_r(s)$, $x'_l(s)$ *имеют ограниченную вариацию*; 4) *при почти всех* s *существует* $x''(s)$, *т. е. кратчайшая почти везде имеет определённую кривизну.*

Наконец, можно указать, что ещё Буземанн и Феллер доказали следующее предложение:

Если в точке O выпуклая поверхность имеет касательную плоскость P, то проекция на P всякой кратчайшей, исходящей из O, имеет в точке O нулевую кривизну, т. е. в точках, где есть касательная плоскость, кратчайшая ведёт себя так же, как на регулярной поверхности.

Доказательство этой теоремы и дальнейшие результаты, относящиеся к кратчайшим, читатель найдёт в уже цитированной работе Либермана.

ГЛАВА V.
КРИВИЗНА.

§ 1. Внутренняя кривизна.

В этой главе мы изложим основы теории кривизны выпуклых поверхностей. Некоторое понятие об этой теории мы уже дали в гл. I (§§ 9—11). Значение её для внутренней геометрии очень велико и мы не только дадим в последнем параграфе этой главы ряд её приложений, но и дальше будем ею постоянно пользоваться самым существенным образом. Достаточно сказать, что аксиоматическое определение внутренней метрики выпуклой поверхности, обоснование которого будет дано в гл. VII, исходит по существу из понятия кривизны.

Поверхность имеет как бы две кривизны: внутреннюю и внешнюю; первая является мерой отклонения внутренней геометрии поверхности от геометрии на плоскости, вторая характеризует искривление поверхности в пространстве. Определение этих двух кривизн, исследование их свойств и установление связи между ними и составляет предмет теории кривизны. Дальше вместо «внутренняя кривизна» мы будем всегда говорить просто «кривизна».

Кривизну мы определяем как функцию множества, т. е. множеству M на выпуклой поверхности ставится в соответствие некоторое число $\omega(M)$ — кривизна множества M на поверхности F.

Мы начнём с определения кривизны для трёх видов «основных» множеств: открытых треугольников, открытых кратчайших и точек [1]). Открытым треугольником называется треугольник с исключёнными вершинами и сторонами; открытой кратчайшей называется кратчайшая с исключёнными концами.

Пусть T — открытый треугольник на выпуклой поверхности и α, β, γ, — углы этого треугольника (т. е. углы соответствующего замкнутого треугольника, включающего стороны и вершины). За кривизну открытого треугольника T мы принимаем число

$$\omega(T)=\alpha+\beta+\gamma-\pi. \tag{1}$$

Кривизну всякой открытой кратчайшей L на выпуклой поверхности мы принимаем равной нулю:

$$\omega(L)=0. \tag{2}$$

Пусть X — точка на выпуклой поверхности и θ — полный угол вокруг этой точки. За кривизну точки X мы принимаем число

$$\omega(X)=2\pi-\theta. \tag{3}$$

Одна и та же точка X пространства может быть точкой многих выпуклых поверхностей, и полные углы вокруг неё на этих поверхностях могут быть различными. Следовательно, кривизна точки X зависит не только от самой

---

[1]) Множество, состоящее из одной точки X, мы будем называть просто точкой X и будем обозначать его также через X. Кривизна пустого множества считается равной нулю.

точки X, но и от той выпуклой поверхности F, на которой она в данный момент рассматривается. Аналогичное замечание может относиться и к другим множествам, для которых мы определяем кривизну. Поэтому, строго говоря, следует говорить: «кривизна множества M на поверхности F» и писать $\omega_F(M)$. Однако мы будем постоянно опускать такое указание на поверхность F, вводя его явно лишь в тех случаях, когда одно и то же множество M будет рассматриваться на нескольких поверхностях одновременно: если же рассматривается лишь одна поверхность, то отказ от указания, что кривизна берётся именно на этой поверхности, не может повести к недоразумению.

Каждый угол треугольника на выпуклой поверхности не меньше соответствующего угла плоского треугольника со сторонами той же длины. Поэтому, сумма углов треугольника на выпуклой поверхности не меньше π и, следовательно, *кривизна всякого открытого треугольника неотрицательна*. Теорема об углах треугольника, которой мы здесь пользуемся, была доказана в случае произвольной выпуклой поверхности только для достаточно малых треугольников (см. теорему 3 § 4 гл. III). Поэтому мы будем рассматривать только такие треугольники и будем причислять к основным множествам только соответствующие открытые треугольники.

Полный угол вокруг точки на выпуклой поверхности всегда $\leqslant 2\pi$, поэтому *кривизна точки неотрицательна*. Таким образом, кривизны всех основных множеств неотрицательны.

Рассмотрим на какой-нибудь данной выпуклой поверхности все такие множества, которые могут быть представлены как суммы «основных» множеств, не имеющих попарно общих точек. Такие множества можно назвать «элементарными». Например, всякий геодезический многоугольник является элементарным множеством. Действительно, согласно теореме, доказанной в § 6 гл. II, всякий геодезический многоугольник P можно разбить на сколь угодно малые треугольники. Беря внутренние части этих треугольников, их стороны с исключёнными концами и, наконец, их вершины, получим представление многоугольника P как суммы «основных» множеств без общих точек.

Пусть M — «элементарное» множество и пусть

$$M=\sum_{i=1}^{n} B_i$$

есть представление его в виде суммы «основных» множеств без общих точек. *За кривизну множества M мы принимаем число*

$$\omega(M)=\sum_{i=1}^{n}\omega(B_i). \tag{4}$$

Для того чтобы это определение было однозначным, нужно доказать следующее: если $M=\sum_i B_i=\sum_j A_j$ суть два представления множества M в виде суммы «основных» множеств без общих точек, то всегда $\sum_i\omega(B_i)=\sum_j\omega(A_j)$; т. е. $\omega(M)$ не зависит от выбора разбиения множества M на «основные». Это мы и докажем несколько дальше.

Смысл данного определения состоит в том, что кривизна оказывается аддитивной функцией множества, т. е. если M_1 и M_2 не имеют общих точек, то

$$\omega(M_1+M_2)=\omega(M_1)+\omega(M_2). \tag{5}$$

Действительно, пусть $M_1=\sum_i A_i$, $M_2=\sum_j B_j$ суть разложения множеств M_1 и M_2 на основные; тогда

$$M_1+M_2=\sum_i A_i+\sum B_j$$

есть разложение суммы M_1+M_2 на основные множества и, следовательно, по формуле (4)

$$\omega(M_1+M_2)=\sum_i \omega(A_i)+\sum_j \omega(B_j)=\omega(M_1)+\omega(M_2).$$

Однако это доказательство аддитивности кривизны не имеет смысла, пока не доказана однозначность самого определения кривизны, а потому аддитивностью мы пока не можем пользоваться.

Для того чтобы доказать однозначность данного нами определения кривизны «элементарных» множеств, докажем следующую теорему, имеющую также большое самостоятельное значение.

Теорема 1. *Пусть P есть внутренняя часть геодезического многоугольника с углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и эйлеровой характеристикой $\chi(P)$. Кривизна P равна*

$$\omega(P)=2\pi\chi(P)-\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i). \tag{6}$$

В более развёрнутой формулировке эта теорема означает следующее. Внутренняя часть P всякого геодезического многоугольника есть, очевидно, элементарное множество (так как сам геодезический многоугольник есть элементарное множество). Пусть P разбита на f треугольников, т. е. пусть P представлена как сумма f открытых треугольников $T_1, \ldots, T_f$, m их вершин $X_1, \ldots$ $\ldots, X_m$ и p сторон $L_1, \ldots, L_p$. Тогда, по формуле (4), мы должны положить

$$\omega(P)=\sum_{i=1}^{f}\omega(T_i)+\sum_{j=1}^{m}\omega(X_j),$$

а все $\omega(L_k)$ можно отбросить, так как, по определению, они равны нулю. Следовательно, теорема утверждает, что для всякого разбиения многоугольника P на треугольники T_i

$$\sum_i \omega(T_i)+\sum_j \omega(X_j)=2\pi\chi(P)-\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i). \tag{7}$$

В частности, это означает, что стоящая здесь слева сумма — одна и та же для всех разбиений и, следовательно, для внутренней части многоугольника кривизна определяется однозначно.

Доказательство. Рассмотрим многоугольник $\overline{P}$, внутренностью которого является P. Многоугольник $\overline{P}$ разбит на треугольники $T_1, \ldots, T_f$. К вершинам многоугольника $\overline{P}$ присоединим также те вершины треугольников T_i, которые лежат на его сторонах. Так как углы при таких вершинах равны π, то это не изменит правой части формулы (7). Поэтому можно считать, что в число углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ входят также и эти добавленные углы.

Если φ_1^i, φ_2^i, φ_3^i обозначают углы треугольника T_i, то

$$\omega(T_i)=\varphi_1^i+\varphi_2^i+\varphi_3^i-\pi.$$

Суммируя по всем треугольникам, получим

$$\sum_{i=1}^{f}\omega(T_i)=\sum_{i,j}\varphi_j^i-f\pi. \tag{8}$$

С другой стороны, сумма углов вокруг внутренней вершины X_i разбиения равна полному углу вокруг неё, т. е. равна $2\pi-\omega(X_i)$, а сумма углов вокруг вершины на границе равна углу многоугольника. Поэтому сумма всех углов треугольников T_i может быть представлена так:

$$\sum_{i,j}\varphi_j^i=\sum_{i=1}^{m}[2\pi-\omega(X_i)]+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi m-\sum_{i=1}^{m}\omega(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в формулу (8), получим, что

$$\sum_{i=1}^{f}\omega(T_i)+\sum_{i=1}^{m}\omega(X_i)=(2m-f)\pi+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=$$
$$=(2m-f+n)\pi-\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i). \qquad (10)$$

Число e всех вершин разбиения равно сумме числа внутренних вершин и вершин, лежащих на границе:

$$e=m+n. \qquad (11)$$

Число k сторон в разбиении может быть подсчитано следующим образом: у каждого треугольника $3f$ сторон, но стороны, лежащие внутри, считаются дважды, а стороны на границе — один раз. Число этих последних равно числу вершин многоугольника, т. е. n. Следовательно,

$$3f=2k-n. \qquad (12)$$

По определению эйлеровой характеристики

$$\chi(P)=f-k+e.$$

Отсюда, умножая на 2 и пользуясь равенством (12), имеем:

$$2\chi(P)=2e-n-f.$$

Теперь, пользуясь равенством (11), получаем, что

$$2\chi(P)=2m+n-f \qquad (13)$$

и потому формулу (10) можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{f}\omega(T_i)+\sum_{i=1}^{m}\omega(X_i)=2\pi\chi(P)-\sum_{i=1}^{n}(\pi-\alpha_i),$$

что и требовалось доказать.

Напомним, что замкнутую поверхность мы тоже считаем геодезическим многоугольником, только вовсе не имеющим границы, а, следовательно, и углов. Так как такая выпуклая поверхность гомеоморфна сфере, то её эйлерова характеристика равна 2, и потому кривизна всякой замкнутой выпуклой поверхности, согласно доказанной теореме, равна 4π.

Для n-угольника, гомеоморфного кругу, эйлерова характеристика равна единице, и потому кривизна его внутренней области выражается формулой $\omega(P)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-(n-2)\pi$. В частности для треугольника $\omega(T)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi$. Кривизна многоугольника с включённой границей слагается из кривизны его внутренней области и кривизн вершин, кривизны же сторон с исключёнными концами равны нулю, потому что кривизна геодезической линии с исключёнными концами всегда равна нулю. Действительно, геодезическая линия может быть разложена на конечное число открытых кратчайших и отдельных точек, являющихся общими концами этих кратчайших. Но геодезическая не может проходить через точку, угол вокруг которой $<2\pi$, т. е. точку с кривизной >0. Поэтому сумма кривизн кратчайших и точек, на которые разложена геодезическая, всегда равна нулю.

Так как, по определению, треугольник включает свою границу, то его кривизна слагается из кривизны его внутренней области и кривизн вершин. Однако мы почти нигде не будем рассматривать кривизну треугольника, а только кривизну его внутренней области. Потому ради краткости мы будем говорить просто «кривизна треугольника», всегда, однако, подразумевая кривизну его внутренней области, если только явно не будет оговорено противное.

Теперь, на основании теоремы 1, легко доказывается

Теорема 2. *Данное выше определение кривизны «элементарных» множеств однозначно, т. е. если множество M представлено двумя способами как сумма «основных» множеств, не имеющих попарно общих точек:*

$$M = \sum_i A_i = \sum_j B_j,$$

то

$$\sum_i \omega(A_i) = \sum_j \omega(B_j).$$

Доказательство. Представим себе оба разбиения множества M произведёнными одновременно; тогда M разобьётся на множества A_iA_j, являющиеся пересечениями множеств одного и другого разбиения. Возьмём какое-либо множество A_i из первого разбиения; тогда

$$A_i = \sum A_iB_j,$$

где среди множеств A_iB_j многие могут быть пустыми (а именно те, для которых A_i не пересекает B_j). Посмотрим, что может представлять собою непустое множество A_iB_j.

Если одно из множеств A_i и B_j есть точка, то A_iB_j есть та же самая точка.

Если A_i и B_j — открытые кратчайшие, то A_iB_j есть либо открытая кратчайшая, либо одна точка, потому что две кратчайшие либо налегают, либо пересекаются не более чем в одной точке.

Если A_i — открытая кратчайшая, а B_j — внутренность треугольника (или наоборот), то A_iB_j есть либо одна кратчайшая, либо совокупность двух открытых кратчайших. Действительно, кратчайшая A_i не может пересекать ни одну из сторон треугольника B_j более одного раза (потому что стороны — тоже кратчайшие). Поэтому, если A_i пересекает только одну или две стороны, то A_iB_j — одна открытая кратчайшая, а если A_i пересекает все три стороны (выходит из треугольника через одну сторону, входит через вторую и выходит через третью), то A_iB_j состоит из двух открытых кратчайших.

Пусть, наконец, A_i и B_j являются оба открытыми треугольниками. Так как их стороны не могут пересекаться более чем в некотором конечном числе точек, то множество A_iB_j может представлять собою лишь конечное число внутренностей многоугольников. А каждый многоугольник можно разбить на треугольники.

Теперь подсчитаем кривизны множеств A_iB_j, не считая, конечно, пустых множеств, так как их кривизны равны нулю.

Если A_i есть точка X, то, очевидно,

$$\omega(A_i) = \omega(X). \tag{14}$$

Если A_i — открытая кратчайшая, то из проведённого рассмотрения множеств A_iB_j следует, что разбиение её на множества A_iB_j представляет собою разбиение на конечное число открытых кратчайших L^p и точек X^q. Кривизны всех точек X^q равны нулю,так как кратчайшая не может проходить через точку с ненулевой кривизной. Поэтому

$$\omega(A_i) = \sum \omega(L^p) + \sum \omega(X^q) = 0. \qquad (15)$$

Наконец, если A_i — открытый треугольник, то его разбиение на множества A_iB_j можно подразделить так, что получится разбиение на конечное число открытых треугольников T^s, открытых кратчайших M^r и точек Y^e. По теореме 1[1]

$$\omega(A_i) = \sum \omega(T^s) + \sum \omega(M^r) + \sum \omega(Y^e). \qquad (16)$$

Суммируя формулы (14), (15), (16), мы получим, что сумма кривизн множеств A_i представляется в виде суммы кривизны множеств, обладающих следующими свойствами: 1) каждое из них содержится в каком-нибудь A_i и одновременно в каком-нибудь B_j; 2) все эти множества в сумме образуют данное множество M и, следовательно, покрывают как все A_i, так и все B_j. Поэтому ясно, что, применяя к множествам B_j то же рассуждение, какое мы применили только что к множествам A_i, мы получим то же самое выражение для суммы их кривизн. Следовательно,

$$\sum_i \omega(A_i) = \sum_j \omega(B_j),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, определение кривизны для элементарных множеств обосновано.

Свойства кривизны можно формулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *Кривизна элементарных множеств на выпуклой поверхности есть аддитивная и неотрицательная функция.*

Действительно, аддитивность её мы доказали сразу, исходя из определения (см. стр. 148), а неотрицательность вытекает из неотрицательности кривизны «основных» множеств.

Все проведённые рассуждения имеют чисто внутренний характер, а потому они применимы не только к выпуклым поверхностям, но и к таким абстрактным многообразиям с внутренней метрикой, у которых каждая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности. Следовательно, *данное определение кривизны и доказанные о ней теоремы* 1, 2, 3 *имеют силу также во всяком многообразии с внутренней метрикой, локально изометричном выпуклым поверхностям.*

Даже более того, если отвлечься от неотрицательности кривизны, то в остальных выводах мы пользовались только: 1) понятием угла и его аддитивностью, 2) тем, что угол между двумя ветвями одной кратчайшей равен π, 3) тем, что две кратчайшие не могут пересекаться более чем в конечном числе точек. Эти свойства имеют место, например, на всякой регулярной поверхности, независимо от того, выпуклая она или нет. Таким образом, данные основы учения о кривизне имеют очень общую природу и могут быть применены не только к выпуклым поверхностям.

Заметим ещё, что, используя также чисто внутренне-геометрические методы, можно доказать, что кривизна множеств на выпуклых поверхностях не только аддитивна, но и *вполне аддитивна*, т. е. если множество M представлено в

---

[1] Эта формула есть частный случай формулы (7): в формуле (7) за многоугольник P следует взять треугольник A_i, тогда правая часть формулы (7) даёт $\omega(A_i)$ (согласно определению кривизны треугольника), а левая часть формулы (7) даёт правую часть формулы (16), потому что, согласно определению, кривизны открытых кратчайших M^r равны нулю: $\omega(M^r) = 0$.

виде суммы последовательности множеств $M_1, M_2, \ldots$, не имеющих попарно общих точек, и если кривизна определена как для M, так и для всех M_i, то

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega(M_i).$$

Потом, используя известные методы теории меры, можно распространить понятие кривизны на открытые, замкнутые и вообще на все борелевы множества на выпуклой поверхности. Однако эти результаты получаются не так просто и мы придём к ним дальше попутно, рассматривая связь внутренней и «внешней» кривизны.

§ 2. Площадь сферического изображения.

Пусть на выпуклой поверхности F выделено некоторое множество M. Возьмём сферу S радиуса, равного единице, и, проведя через точки множества M всевозможные опорные плоскости к поверхности F, будем откладывать единичные векторы внешних нормалей к этим плоскостям из центра сферы S. Геометрическое место концов этих нормалей называется *сферическим изображением множества* M. Если поверхность есть дважды покрытая плоская область и точка X лежит внутри этой области, то внешней считается нормаль, направленная в ту сторону, на которой считается лежащей точка X.

Площадь сферического изображения множества M, если она существует, принимается, согласно Гауссу, за меру внешней кривизны (интегральной внешней кривизны) множества M на поверхности F.

Полезно вспомнить, что вовсе не всякое множество на сфере обязано иметь определённую площадь: оно может быть неизмеримым. Например, даже тот факт, что сферическое изображение внутренней области геодезического треугольника имеет определённую площадь, хотя и может показаться очевидным, но на самом деле доказывается не совсем просто. Мы рассматриваем произвольные выпуклые поверхности, а потому сферические изображения даже, так сказать, очень простых множеств могут иметь сложное строение, и вопрос о существовании их площади оказывается нетривиальным. Это не позволяет ограничиться элементарным учением о площади, и нужно обратиться к теории лебеговской меры. Обычно в университетских курсах рассматривают только меру на плоскости[1]), но теория меры на сфере ничем существенным не отличается, и мы можем поэтому считать её известной. Под площадью сферического изображения всюду понимается его лебеговская мера.

Связь площади сферического изображения с внутренней метрикой поверхности была открыта Гауссом. Знаменитая теорема Гаусса, являющаяся одним из краеугольных камней теории поверхностей, состоит в том, что площадь сферического изображения области на регулярной поверхности зависит только от внутренней метрики этой поверхности. В частности, площадь сферического изображения геодезического треугольника равна сумме его углов минус π. Наша задача состоит в том, чтобы обобщить теорему Гаусса на все выпуклые поверхности, а для этого нужно сначала изучить свойства сферического изображения выпуклых поверхностей.

Каждому множеству M на выпуклой поверхности F соответствует его сферическое изображение M^*. Площадь сферического изображения множества M, если она существует, мы обозначаем $\psi(M)$; она является функцией множества на выпуклой поверхности F. Так как M^* может и не иметь определённой площади, т. е. может быть неизмеримым, то $\psi(M)$ оказывается определённой лишь для некоторых множеств M. Нашей первой задачей будет показать, что она

[1]) См., например, Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, гл. III, § 2.

определена для всех замкнутых и открытых множеств M, и даже для всех борелевских множеств. Фактически мы будем встречаться только с замкнутыми и открытыми множествами, а также с их конечными суммами и пересечениями. Однако представляется удобным определить функцию ψ для всех борелевских множеств, потому что к ним, как известно, можно без ограничения применять операцию суммирования конечного и счётного числа множеств и операцию вычитания одного множества из другого.

Далее, мы покажем также, что $\psi(M)$ является аддитивной функцией множества, т. е. что $\psi(M_1 + M_2) = \psi(M_1) + \psi(M_2)$, если множества M_1 и M_2 не имеют общих точек. Это вовсе не так очевидно, как могло бы показаться на первый взгляд, потому что из того, что множества M_1 и M_2 не имеют общих точек, вовсе ещё не следует, что их сферические изображения также не имеют общих точек. Например, сферические изображения двух вершин тетраэдра имеют общие точки.

Наконец, мы докажем, что функция $\psi(M)$ не только аддитивна, но и вполне аддитивна (см. стр. 153). Из аддитивности полная аддитивность, как известно, не следует.

Нам, собственно говоря, будет нужна не полная аддитивность функции $\psi(M)$, а эквивалентное свойство, состоящее в следующем. Говорят, что множества M_i образуют исчезающую последовательность, если 1) они последовательно включены одно в другое, т. е. M_1 содержит M_2, M_2 содержит M_3 и т. д. и 2) пересечение всех этих множеств пусто. Свойство функции $\psi(M)$, о котором идёт речь, состоит в том, что если множества M_i, для которых функция $\psi(M)$ определена, образуют исчезающую последовательность, то

$$\lim_{i \to \infty} \psi(M_i) = 0. \tag{1}$$

Это свойство функции множества называется её *непрерывностью* [1]). Мы докажем именно такое свойство площади сферического изображения, и именно оно окажется более удобным в приложениях. То, что оно эквивалентно полной аддитивности, вытекает из следующей общей леммы:

Лемма 1. *Для того чтобы аддитивная функция множества $\varphi(M)$ была вполне аддитивна, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(M)$ дыла непрерывной в определённом только что смысле.* (Предполагается, что φ определена для всех борелевских множеств.)

Доказательство. Пусть $\varphi(M)$ — произвольная аддитивная и непрерывная функция множества. Пусть множества $M_1, M_2, \ldots$ не имеют попарно общих точек. Тогда в силу аддитивности при всяком n

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(M_i) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} M_i\Big). \tag{2}$$

Множества $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} M_i$, очевидно, образуют исчезающую последовательность и потому

$$\lim_{n \to \infty} \varphi\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} M_i\Big) = 0$$

или, в силу аддитивности,

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} M_i\Big) - \lim_{n \to \infty} \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} M_i\Big) = 0.$$

---

[1]) Этот термин, введённый Фреше, повидимому, мало распространён. Но он, конечно, совершенно естественен для аддитивных функций.

Сравнивая это равенство с равенством (2), мы убеждаемся, что

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(M_i),$$

т. е. функция $\varphi(M)$ вполне аддитивна.

Пусть теперь функция $\varphi(M)$ вполне аддитивна. Если множества M_i образуют исчезающую последовательность, то множества $M_1 - M_2$, $M_2 - M_3, \ldots$ не имеют попарно общих точек и в сумме образуют множество M_1. Поэтому, в силу полной аддитивности,

$$\varphi(M_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(M_i - M_{i+1}),$$

или

$$\varphi(M_1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(M_i - M_{i+1}). \tag{3}$$

Так как $M_i \supset M_{i+1}$, то по аддитивности $\varphi(M_i - M_{i+1}) = \varphi(M_i) - \varphi(M_{i+1})$ и, следовательно, сумма, стоящая в (3), равна $\varphi(M_1) - \varphi(M_{n+1})$. Поэтому из (3) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(M_n) = 0$, т. е. функция $\varphi(M)$ непрерывна. Лемма доказана.

Помимо перечисленных выше свойств площади сферического изображения, мы докажем также некоторые предложения о сходимости площадей сферических изображений множеств на сходящихся выпуклых поверхностях.

Дальше речь будет итти о замкнутых выпуклых поверхностях, что упрощает рассуждения, но не является, конечно, существенным, потому что всякую ограниченную выпуклую поверхность можно дополнить до замкнутой, причём, конечно, её опорные плоскости, а следовательно, и сферическое изображение, остаются неизменными. M^* будет всегда обозначать сферическое изображение множества M, а $\psi(M)$ — площадь этого сферического изображения.

Лемма 2. *Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к поверхности F и последовательность точек X_n, лежащих на поверхностях F_n, сходится к точке X на F, то предел любой сходящейся последовательности опорных плоскостей к поверхностям F_n в точках X_n есть опорная плоскость к поверхности F в точке X.*

Доказательство. Пусть опорные плоскости P_n к поверхностям F_n в точках X_n сходятся к плоскости P. Каждая поверхность F_n лежит по одну сторону от своей опорной плоскости P_n. Поэтому предельная поверхность лежит по одну сторону от предельной плоскости P [1]). Вместе с тем плоскость P, очевидно, проходит через точку X поверхности F, предельную для точек X_n. Следовательно, плоскость P — опорная к поверхности F в точке X.

Лемма 3. *Сферическое изображение замкнутого множества на выпуклой поверхности есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть M — замкнутое множество на выпуклой поверхности F и M^* — его сферическое изображение. Пусть последовательность точек N_i из M^* сходится к точке N. Из определения сферического изображения ясно, что точки N_i являются концами нормалей n_i к поверхности F в каких-то точках X_i, принадлежащих множеству M. Из точек X_i можно выбрать сходящуюся последовательность X_{ij}, и так как M замкнуто, то предельная точка X этой последовательности будет принадлежать M. Если в лемме 2 вместо поверхностей F_n взять одну и ту же поверхность F, то из этой леммы будет видно, что предел n нормалей n_{ij} в точках X_{ij} есть нормаль к поверхности F в точке X. А так как точка X принадлежит M, то конец N нормали n принадлежит

[1]) Это доказано в § 6 Дополнения.

сферическому изображению M^* множества M. Следовательно, предел любой последовательности точек из M^* принадлежит M^*, т. е. M^* замкнуто.

Назовём опорную плоскость к выпуклой поверхности F *особой*, если в ней лежит более одной точки поверхности F. Если в опорной плоскости P лежат две точки X и Y замкнутой выпуклой поверхности F, то весь отрезок XY принадлежит поверхности F.

Лемма 4. *Множество концов нормалей к особым опорным плоскостям выпуклой поверхности имеет меру нуль.* (Нормали предполагаются отложенными из центра единичной сферы S и речь идёт о множестве их концов на этой сфере.)

Доказательство. Пусть F — выпуклая поверхность и M — множество концов особых нормалей, т. е. нормалей к особым опорным плоскостям поверхности F. Возьмём прямые L_1 и L_2, проходящие через центр единичной сферы S. Определим три класса особых опорных плоскостей к поверхности F: особую опорную плоскость P мы относим к первому классу, если в ней лежит отрезок поверхности F, не перпендикулярный к прямой L_1; P мы относим ко второму классу, если в ней лежит отрезок поверхности F, не перпендикулярный к прямой L_2; наконец, P мы относим к третьему классу, если в ней нет отрезка поверхности F, не перпендикулярного хотя бы одной из прямых L_1 и L_2. В этом случае в P лежит только один отрезок и он перпендикулярен и к L_1 и к L_2. Плоскость P может принадлежать первому и второму классу одновременно, но для нас важно лишь то, что всякая особая опорная плоскость принадлежит хотя бы одному классу.

В соответствии с тем, принадлежит ли плоскость P к первому, второму или третьему классам, мы относим конец нормали к ней (на единичной сфере S) к одному из множеств M_1, M_2, M_3. Множество концов всех особых нормалей есть сумма этих множеств: $M = M_1 + M_2 + M_3$. Поэтому, если мы докажем, что каждое из множеств M_1, M_2, M_3 имеет меру нуль, то тем самым окажется, что и M имеет меру нуль.

По определению множества M_3 конец нормали к плоскости P принадлежит M_3, если в P имеется отрезок, перпендикулярный к обеим прямым L_1 и L_2. Это значит, что все такие плоскости P параллельны одной прямой, именно прямой, перпендикулярной L_1 и L_2. Следовательно, концы нормалей к ним лежат на одном большом круге, и тем самым множество их, т. е. P_3, имеет меру нуль.

Так как множества M_1 и M_2, как ясно из их определения, играют совершенно одинаковую роль, то достаточно рассмотреть одно из них, скажем, M_1.

Докажем сначала, что M_1 измеримо. Пусть M_1^{km} есть множество концов нормалей к тем опорным плоскостям, которые имеют с поверхностью F такие общие отрезки, что длина отрезка $\geqslant \frac{1}{k}$, а угол, образуемый им с прямою L_1, отличается от прямого не менее, чем на $\frac{\pi}{m}$. Ясно, что M_1 есть сумма всех таких M_1^{km} $(k,\ m = 1,\ 2, \ldots)$:

$$M_1 = \sum_{k,\ m=1}^{\infty} M_1^{km}.$$

Вместе с тем, каждое M_1^{km} замкнуто. Действительно, пусть N — предельная точка множества M_1^{km} и $N_1, N_2, \ldots$ — сходящаяся к ней последовательность точек из M_1^{km}. Тогда, по лемме 2, предел сходящейся последовательности, выбранной из опорных плоскостей $P_1, P_2, \ldots$ с концами нормалей $N_1, N_2, \ldots$, будет опорной плоскостью P с концом нормали N. В каждой плоскости P_i лежит отрезок поверхности F с длиной $\geqslant \frac{1}{k}$, образующий с прямою L_1 угол

$\leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}$. Так как, по условию, поверхность F — замкнутая, то из указанных отрезков можно выбрать сходящуюся последовательность, предел которой будет таким же отрезком, лежащим в плоскости P. Следовательно, в P тоже лежит такой же отрезок, а это значит, что точка N также принадлежит M_1^{km}, и этим доказано, что M_1^{km} замкнуто. Следовательно, множество M_1 есть сумма счётного числа замкнутых множеств и потому оно измеримо.

Возьмём теперь любое направление L, перпендикулярное к прямой L_1, и спроектируем поверхность F на плоскость вдоль этого направления. Опорные плоскости к F, параллельные L, огибают проектирующий цилиндр, и концы нормалей к ним лежат на большом круге C, перпендикулярном к L. Так как L перпендикулярно прямой L_1, то круг C проходит через точки N, N', в которых прямая L_1 пересекает единичную сферу S.

В проекции поверхность F даёт выпуклую область G. Если особая опорная плоскость P принадлежит первому классу и параллельна направлению проектирования, то ей соответствует на границе области G прямолинейный отрезок l'. Этот отрезок l' есть проекция отрезка l поверхности F, лежащего в плоскости P, и так как l не перпендикулярен к L_1, т. е. не параллелен L, то l' не вырождается в точку. Число отрезков на границе выпуклой области G, очевидно, не более чем счётно. Поэтому число особых опорных плоскостей первого класса, параллельных направлению L, также не более чем счётно. Концы нормалей к этим плоскостям образуют пересечение множества M_1 с большим кругом C и потому это пересечение состоит не более чем из счётного числа точек.

Однако направление L — произвольное перпендикулярное к прямой L_1, и тем самым круг C — произвольный большой круг, проходящий через точки N, N'. Следовательно, пересечение всякого такого круга с множеством M_1 счётно и потому заведомо имеет меру нуль. А так как M_1 к тому же измеримо, то и оно имеет меру нуль [1]). Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 легко выводится основная теорема о площади сферического изображения:

Теорема 1. *Площадь сферического изображения есть вполне аддитивная функция множества на выпуклой поверхности, определённая для всех борелевских множеств.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что всякое борелевское множество на выпуклой поверхности имеет определённую площадь сферического изображения, или, иными словами, что сферическое изображение борелевского множества измеримо. Для этого докажем последовательно три утверждения: 1) сферическое изображение всякого замкнутого множества измеримо; 2) если сферическое изображение M^* множества M на поверхности F измеримо, то сферическое изображение $(F-M)^*$ дополнения множества M также измеримо; 3) если сферические изображения множеств M_1, $M_2, \ldots$ измеримы, то сферическое изображение их суммы также измеримо.

1) По лемме 3 сферическое изображение замкнутого множества замкнуто, а следовательно, измеримо.

---

[1]) Здесь мы пользуемся теоремой: если множество M_1 измеримо и пересечение его со всяким большим кругом, проходящим через данную точку, имеет линейную меру нуль, то M_1 имеет (поверхностную) меру нуль. Эта теорема есть прямое следствие известной теоремы Фубини о замене двойного интеграла повторным:

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy = \int\left(\int f(x, y)\,dx\right)dy.$$

Достаточно взять за x и y сферические координаты, а за $f(x, y)$ — характеристическую функцию множества M_1 (т. е. равную единице на M_1 и нулю вне M_1). Доказательство теоремы Фубини см., напр., в книге Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, гл. III, § 5 (изд. 1933 г.).

2) Пусть сферическое изображение M^* множества M на поверхности F измеримо. Рассмотрим сферическое изображение $(F-M)^*$ его дополнения. Так как сферическое изображение замкнутой поверхности F покрывает всю сферу S, то

$$(F-M)^* = (S-M)^* + M^*(F-M)^*, \tag{4}$$

т. е. сферическое изображение множества $F-M$ состоит из дополнения сферического изображения множества M и общей части сферических изображений множеств M и $F-M$.

Если точка N принадлежит одновременно M^* и $(F-M)^*$, то это значит, что в опорной плоскости с концом нормали N лежат как точки множества M, так и точки множества $F-M$, т. е. эта опорная плоскость — особая. Поэтому из леммы 4 следует, что множество $M^*(F-M)^*$ имеет меру нуль. Вместе с тем, по предположению, M^* измеримо, а потому и дополнение его $(S-M^*)$ тоже измеримо. Таким образом, формула (4) даёт представление множества $(F-M)^*$ в виде суммы двух измеримых множеств. Следовательно, самое это множество измеримо, что и требовалось доказать.

Более того, мера множества $M^*(F-M)^*$ равна нулю, а площадь всей единичной сферы равна 4π; поэтому из формулы (4) вытекает, что

$$\psi(F-M) = 4\pi - \psi(M).$$

Так как дополнение замкнутого множества есть открытое множество, то отсюда, в частности, следует, что всякое открытое множество G имеет определённую площадь сферического изображения и что $\psi(G) = 4\pi - \psi(F-G)$.

3) Пусть сферические изображения M_n^* множеств M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ измеримы. Сферическое изображение суммы множеств есть, очевидно, сумма их сферических изображений, т. е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right)^* = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^*.$$

А так как сумма счётного числа измеримых множеств измерима, то множество $\left(\sum_{n=1}^{\infty} M_n\right)^*$ измеримо, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ имеето пределённую площадь сферического изображения.

Борелевские множества порождаются из замкнутых путём операций суммирования и пересечения последовательностей множеств. Поэтому для того, чтобы доказать, что не только замкнутые множества, но и все борелевские множества имеют площадь сферического изображения, остаётся показать, что если множества $M_1, M_2, \ldots$ имеют площадь сферического изображения, то их пересечение $\prod_{n=1}^{\infty} M_n$ тоже её имеет.

Для этого отметим очевидное соотношение

$$\prod_{n=1}^{\infty} M_n = F - \sum_{n=1}^{\infty} (F - M_n),$$

где F — замкнутая поверхность, на которой лежат множества M_n. Мы доказали, что если M_n имеют площадь сферического изображения, то и их дополнения $F-M_n$ её имеют; а тогда, по доказанному, её имеют их сумма $\sum_{n=1}^{\infty}(F-M_n)$ и её дополнение $F - \sum_{n=1}^{\infty}(F-M_n)$, т. е. $\prod_{n=1}^{\infty} M_n$ имеет определённую площадь сферического изображения.

Итак, мы доказали, что все борелевские множества на выпуклой поверхности имеют определённую площадь сферического изображения.

Докажем теперь, что площадь сферического изображения $\psi(M)$ есть аддитивная функция множества.

Пусть M_1 и M_2 — два множества на поверхности F, не имеющие общих точек. Пусть их сферические изображения имеют определённые площади $\psi(M_1)$ и $\psi(M_2)$. Так как M_1 и M_2 не имеют общих точек, то общие точки их сферических изображений являются концами нормалей к особым опорным плоскостям. Поэтому из леммы 4 следует, что общая часть сферических изображений множеств M_1 и M_2 имеет меру нуль. Отсюда следует, что площадь суммы сферических изображений множеств M_1 и M_2 равна сумме площадей этих сферических изображений. А так как сумма сферических изображений есть, очевидно, сферическое изображение суммы множеств, то

$$\psi(M_1+M_2)=\psi(M_1)+\psi(M_2),$$

т. е. $\psi(M)$ есть аддитивная функция.

Остаётся доказать, что она вполне аддитивна; для этого достаточно показать, что она непрерывна, т. е. что для всякой исчезающей последовательности множеств M_n

$$\lim_{n\to\infty}\psi(M_n)=0.$$

Пусть множества M_n образуют исчезающую последовательность, т. е. M_{n+1} содержится в M_n и пересечение всех M_n пусто. Тогда сферические изображения M_n^* этих множеств также последовательно содержатся одно в другом. Если пересечение всех M_n^* пусто, то, как известно из теории меры, предел их мер равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(M_n)=0$. Если же пересечение всех M_n^* не пусто, то точка N, принадлежащая их пересечению, есть конец нормали, соответствующей каким-то точкам X_n каждого из множеств M_n. Эти точки X_n не могут совпадать, так как иначе пересечение всех M_n не было бы пустым. Поэтому точка N является концом нормали, соответствующей разным точкам поверхности. Согласно лемме 4, множество всех таких точек имеет меру нуль, и потому пересечение всех M_n^* имеет меру нуль. А так как M_n^* последовательно включаются одно в другое, то предел их мер равен мере их пересечения, и следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(M_n)=0$.

До сих пор мы имели в виду только множества на ограниченных выпуклых поверхностях. Однако не представляет труда обобщить теорему 1 также на случай бесконечных выпуклых поверхностей. Заметим, прежде всего, что площадь сферического изображения всякой бесконечной выпуклой поверхности не может превосходить 2π. Действительно, бесконечную выпуклую поверхность можно дополнить до полной бесконечной выпуклой поверхности F. Тело, ограниченное такой поверхностью, содержит хотя бы одну полупрямую L (см. Дополнение, § 4). Поэтому для всякой плоскости, опорной к F, существует параллельная ей плоскость, опорная к полупрямой L. Отсюда следует, что сферическое изображение поверхности F содержится в сферическом изображении полупрямой, т. е. в полусфере, и потому площадь его не больше 2π. (Легко показать также, что сферическое изображение полной выпуклой поверхности есть всегда сферически выпуклое множество.)

Пусть F — бесконечная выпуклая поверхность. Построим последовательность бесконечно расширяющихся шаров S_n и рассмотрим поверхности F_n, отсекаемые от F шарами S_n.

Пусть M — борелевское множество на F, M_n — часть его, содержащаяся в шаре S_n, M^*, M_n^* — сферические изображения этих множеств. Тогда, очевидно, $M_n \subset M_{n+1}$ и $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, а потому также M_n^* с M_{n+1}^* и $M^* = \sum_{n=1}^{\infty} M_n^*$. Множества M_n, очевидно борелевские и, следовательно, по доказанному в теореме 1, множества M_n^* измеримы. Поэтому, в силу известной теоремы о мере, M^* также измеримо и его мера равна пределу мер множеств M_n^*. Это значит, во-первых, что *всякое неограниченное борелевское множество M имеет определенную площадь сферического изображения*, и, во-вторых, она равна пределу площадей сферических изображений ограниченных множеств M_n, т. е. $\psi(M) = \lim_{n \to \infty} \psi(M_n)$. Поэтому аддитивность площади сферического изображения $\psi(M)$ для неограниченных множеств получается простым предельным переходом. Непрерывность же её доказывается также просто. Действительно, пусть множества M^i образуют исчезающую последовательность. Зададим $\varepsilon > 0$ и возьмём такую поверхность F_n, отсекаемую от F шаром S_n, что $\psi(F - F_n) < \varepsilon$. (Это возможно, так как, по доказанному, $\psi(F) = \lim_{n \to \infty} \psi(F_n)$.) По аддитивности ψ мы имеем $\psi(M^i) = \psi(M^i F_n) + \psi(M^i(F - F_n))$. Здесь множества $M^i F_n$ ограничены и при данном n образуют исчезающую последовательность, так что согласно теореме 1 $\lim_{n \to \infty} \psi(M^i F_n) = 0$. Множества же $M^i(F - F_n)$ содержатся в $F - F_n$ и потому $\psi(M^i(F - F_n)) < \varepsilon$. Следовательно, $\overline{\lim_{i \to \infty}} \psi(M^i) \leqslant \varepsilon$; а так как ε произвольно, то $\lim_{i \to \infty} \psi(M^i) = 0$, что доказывает непрерывность ψ также для случая бесконечных выпуклых поверхностей.

Теорема 2. *Если последовательность замкнутых выпуклых поверхностей F_n сходится к поверхности F и последовательность замкнутых множеств M_n, лежащих на поверхностях F_n, сходится к замкнутому множеству M на поверхности F, то —*

$$\psi(M) \geqslant \lim_{n \to \infty} \psi(M_n).$$

Заметим, что $\psi(M)$ заведомо может не равняться $\lim_{n \to \infty} \psi(M_n)$. Например, если M есть вершина многогранника, то $\psi(M) \neq 0$, и если M_n суть сходящиеся к M точки на гладких поверхностях, то $\psi(M_n) = 0$ при всех n; значит $\psi(M) > \lim_{n \to \infty} \psi(M_n)$. Точно так же самый предел $\lim_{n \to \infty} \psi(M_n)$ может не существовать. Например, если множества M и M_n определены, как в приведённом примере, то последовательность $M_1, M, M_2, M, \ldots$ сходится к M, но предел площадей сферических изображений этих множеств несуществует.

Доказательство теоремы 2. Пусть M^* — сферическое изображение замкнутого множества M на выпуклой поверхности F. Возьмём на единичной сфере S открытое множество G, содержащее M^* и такое, что его площадь превосходит площадь M^* меньше, чем на какое-либо данное $\varepsilon > 0$:

$$\sigma(G) < \sigma(M^*) + \varepsilon, \tag{5}$$

где σ означает площадь.

Пусть множества M_n на выпуклых поверхностях F_n, сходящихся к F, сходятся к M. Докажем, что при достаточно больших n сферические изображения M_n^* множеств M_n содержатся в G. Для доказательства допустим противное. Тогда мы будем иметь такую последовательность индексов $n_1, n_2, \ldots$, что в множествах $M_{n_1}^*$ $M_{n_2}^*, \ldots$ будут содержаться точки $N_{n_1}, N_{n_2}, \ldots$, лежащие вне G. Не ограничивая общности, можно считать, что эти точки сходятся к некоторой точке N, а так как все N_{n_i} лежат вне G, то N заведомо не принадлежит M^*.

Точки N_{n_i} являются концами нормалей, соответствующих каким-то точкам X_{n_i} поверхностей F_{n_i}, принадлежащим множествам M_{n_i}. Так как эти множества сходятся к множеству M, то можно считать, что точки X_{n_i} сходятся к какой-то точке X этого множества, иначе из них можно выбрать сходящуюся последовательность и ограничиться её рассмотрением). Тогда, по лемме 1, предел всякой сходящейся последовательности нормалей в точках X_{n_i} есть нормаль в точке X. Следовательно, точка N — предел концов нормалей N_{n_i}, соответствующих точкам X_{n_i} — есть конец нормали, соответствующей точке X. Так как X принадлежит M, то N принадлежит M^*, что, однако, противоречит установленному выше. Следовательно, наше предложение неверно, и тем самым при n, превосходящих какое-то n_0, M_n содержатся в открытом множестве G.

Но тогда площадь каждого из этих M_n^* не больше площади G:

$$\sigma(M_n^*) \leqslant \sigma(G) \qquad (n \geqslant n_0).$$

Поэтому из (5) следует, что $\sigma(M_n^*) < \sigma(M^*) + \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$, или, согласно принятому нами обозначению площади сферического изображения,

$$\psi(M_n) < \psi(M) + \varepsilon \qquad (n \geqslant n_0).$$

Из этой формулы ясно, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \psi(M_n) < \psi(M) + \varepsilon,$$

а так как ε произвольно, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \psi(M_n) \leqslant \psi(M),$$

что и требовалось доказать[1]).

Из теоремы 2 вытекает следующий результат, который нам понадобится при доказательстве обобщённой теоремы Гаусса.

---

[1]) Значение полученного свойства площадей сферических изображений состоит не только в том, что мы извлечём из него ряд важных следствий; оно важно также тем, что в нём заключается в конечном счёте полная и вместе с тем самая простая характеристика сходимости площадей сферических изображений множеств на сходящихся выпуклых поверхностях. Это можно видеть, например, из следующего. Пусть замкнутая выпуклая поверхность F не вырождается в дважды покрытую плоскую область. Возьмём внутри F точку O и описав вокруг O сферу S, спроектируем F на S. Тогда каждому множеству M на S соответствует число $\psi(M)$ — площадь сферического изображения того множества на F, проекцией которого является M. Рассмотрим замкнутые выпуклые поверхности F_n, также содержащие O внутри, и, проектируя их на ту же сферу S, определим аналогично числа $\psi_n(M)$. Тогда из теоремы 2 ясно, что если F_n сходятся к F, то для всякого замкнутого множества M на сфере S

$$\psi(M) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \psi_n(M). \qquad (6)$$

Очевидно, числа $\psi_n(M)$ не меняются при подобных преобразованиях поверхностей F_n с центром подобия в O. Поэтому мы нормируем все поверхности F_n так, чтобы все они, например, пересекали F. Тогда оказывается, что если для всякого замкнутого множества M на S $\psi(M) \geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \psi_n(M)$, то поверхности F_n сходятся к F, т. е. это свойство является необходимым и достаточным для сходимости поверхностей. Аналитический смысл этого свойства раскрывается следующей теоремой: Если на любом множестве на сфере S определены вполне аддитивные функции множества $\psi_n(M)$ и $\psi(M)$, то для того чтобы $\psi_n(M)$ слабо сходились к $\psi(M)$, т. е. чтобы для всякой непрерывной функции $f(X)$ на S было

$$\int f(X)\,\psi(dM) = \lim \int f(X)\,\psi_n(dM),$$

необходимо и достаточно, чтобы для всякого замкнутого M имели место соответствующие соотношения (6) и

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(S) = \psi(S).$$

Теорема 3. *Пусть последовательность замкнутых выпуклых поверхностей F_n сходится к поверхности F. Пусть G_n, G — области на поверхностях F_n, F, а $\overline{G}_n$, $\overline{G}$ — эти же области с включёнными границами. Допустим, что замкнутые области $\overline{G}_n$ сходятся к $\overline{G}$ и дополнения областей G_n, т. е. $F_n - G_n$ сходятся к дополнению области G, т. е. к $F - G$. Тогда, если площади сферических изображений границ областей G_n сходятся к площади сферического изображения границы области G, то площади сферических изображений самих областей G_n сходятся к площади сферического изображения области G.*

Доказательство. Дополнения областей G_n и G представляют собой замкнутые множества и потому из предыдущей теоремы следует, что

$$\psi(F - G) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(F_n - G_n). \tag{7}$$

Сферическое изображение замкнутой выпуклой поверхности покрывает всю единичную сферу, так что $\psi(F) = \psi(F_n) = 4\pi$. Вместе с тем, по аддитивности функции ψ,

$$\psi(F - G) = \psi(F) - \psi(G) \quad \text{и} \quad \psi(F_n - G_n) = \psi(F_n) - \psi(G_n).$$

Поэтому из (7) следует, что

$$\psi(G) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(G_n). \tag{8}$$

Площадь сферического изображения области равна разности площадей сферических изображений замкнутой области и её границы, так что имеем:

$$\left.\begin{aligned} \psi(G) &= \psi(\overline{G}) - \psi(\text{гр. } G), \\ \psi(G_n) &= \psi(\overline{G}_n) - \psi(\text{гр. } G_n). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

По условию,

$$\psi(\text{гр. } G) = \lim_{n\to\infty} \psi(\text{гр. } G_n),$$

а так как $\overline{G}_n$ сходятся к $\overline{G}$, то по предыдущей теореме

$$\psi(\overline{G}) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(\overline{G}_n).$$

Поэтому из формул (9) следует, что

$$\psi(G) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(G_n).$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (8), мы убеждаемся в том, что

$$\psi(G) = \lim_{n\to\infty} \psi(G_n),$$

и теорема доказана.

Следствие. *Если границы областей G_n сходятся к границе области G и площадь сферического изображения границы области G равна нулю, то площади сферических изображений границ областей G_n сходятся к нулю, и, следовательно (согласно только что доказанной теореме 3), площади сферических изображений областей G_n сходятся к площади сферического изображения области G.*

Доказательство. Пусть границы областей G_n сходятся к границе области G и площадь сферического изображения границы области G равна нулю. Так как граница есть замкнутое множество, то по теореме 2

$$\psi(\text{гр. } G) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(\text{гр. } G_n); \tag{10}$$

а так как $\psi(\text{гр. } G)=0$ и $\psi(\text{гр.} G_n)\geqslant 0$ (потому что площадь не может быть отрицательной), то из (10) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\text{гр. } G_n)=0.$$

Тем самым и вторая часть теоремы доказана.

Докажем, наконец, ещё одну простую лемму:

Лемма 5. *Пусть F — выпуклая поверхность и A — точка на ней. Пусть последовательность выпуклых многогранников P_n, вписанных в поверхность F, сходится к ней, причём точка A принадлежит всем этим многогранникам. Тогда площади сферических изображений точки A на многогранниках P_n сходятся к площади сферического изображения точки A на поверхности F, т. е., если $\psi_n(A)$ есть площадь сферического изображения точки A, рассматриваемой как точка многогранника P_n, а $\psi(A)$ есть площадь её сферического изображения, как точки поверхности F, то*

$$\psi(A)=\lim_{n\to\infty} \psi_n(A). \tag{11}$$

Доказательство. Так как многогранники P_n вписаны в поверхность F, то всякая опорная плоскость к поверхности F в точке A является опорной также к многогранникам P_n. Поэтому сферическое изображение точки A, как точки поверхности F, содержится в сферическом изображении точки A, рассматриваемой как точка многогранника P_n. Следовательно, при всяком n

$$\psi(A)\leqslant \psi_n(A). \tag{12}$$

Но так как точка есть замкнутое множество, то по теореме 2

$$\psi(A)\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi_n(A). \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), мы и получаем (11).

Можно заметить, что не только $\psi_n(A)$ сходятся к $\psi(A)$, но при условиях леммы многогранные углы в точке A многогранников P_n сходятся к касательному конусу поверхности F в этой точке.

§ 3. Обобщение теоремы Гаусса.

Теорема Гаусса утверждает, что площадь сферического изображения области на регулярной поверхности равна внутренней интегральной кривизне этой области. В § 1 мы определили кривизну «основных» множеств на выпуклой поверхности — открытых треугольников, открытых кратчайших и точек. Затем было введено понятие «элементарного» множества, являющегося суммой конечного числа основных множеств, не имеющих попарно общих точек. Кривизна элементарного множества определялась как сумма кривизн тех основных множеств, из которых оно составлено.

Открытый треугольник есть открытое множество на поверхности, точка есть замкнутое множество, открытая кратчайшая есть разность замкнутых множеств: самой кратчайшей минус совокупность её конечных точек. Поэтому каждое из этих основных множеств, а значит и всякое элементарное множество имеет определённую площадь сферического изображения. Вследствие этого обобщение теоремы Гаусса на любые выпуклые поверхности должно состоять в доказательстве того, что *площадь сферического изображения элементарного множества на выпуклой поверхности равна его кривизне*. Но как площадь сферического изображения, так и кривизна являются аддитивными функциями, поэтому теорему достаточно доказать для основных множеств. Таким образом, обобщение теоремы Гаусса сводится к трём теоремам:

Теорема 1. *Площадь сферического изображения точки на выпуклой поверхности равна её кривизне, т. е. 2π минус полный угол вокруг этой точки.*

Теорема 2. *Площадь сферического изображения открытой кратчайшей на выпуклой поверхности равна её кривизне, т. е. нулю.*

Теорема 3. *Площадь сферического изображения открытого треугольника на выпуклой поверхности равна его кривизне, т. е. сумме его углов минус π.*

Эти три теоремы и будут последовательно доказаны. Доказательство первой основано на следующей лемме о выпуклом конусе.

Лемма 1. *Площадь сферического изображения выпуклого конуса равна 2π минус полный угол при вершине конуса.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что сферическое изображение выпуклого конуса является выпуклым множеством на единичной сфере S. Центр сферы S удобно взять в вершине конуса. Если P_1 и P_2 — две опорные плоскости к конусу, то конус содержится в двугранном угле между половинами этих плоскостей, так что всякая плоскость P, опорная к этому двугранному углу, будет опорной также к конусу. Концы внешних нормалей к таким плоскостям P дают на сфере S меньшую из дуг большого круга, соединяющих концы внешних нормалей к плоскостям P_1 и P_2, а это и означает, что сферическое изображение конуса выпукло.

Теперь докажем нашу лемму в том случае, когда конус оказывается многогранным углом. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — плоские углы этого многогранного угла. Если вращать опорную плоскость к многогранному углу вокруг одного из рёбер, то конец внешней нормали будет зачерчивать дугу большого круга, соединяющую концы нормалей к граням, сходящимся в данном ребре. Отсюда видно, что сферическое изображение выпуклого многогранного угла является выпуклым многоугольником на сфере. Вершинами этого многоугольника являются концы нормалей к граням многогранного угла, и углы его равны $\pi - \alpha_i$, где α_i — углы на соответствующих гранях; это ясно из того, что при вращении опорной плоскости вокруг ребра нормаль к ней движется в плоскости, перпендикулярной ребру. Как известно, площадь n-угольника на единичной сфере равна сумме его углов без $(n-2)\pi$ [1]), т. е. равна

$$\sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) - (n-2)\pi = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Но сумма всех α_i есть полный угол при вершине многогранного угла и, следовательно, наша теорема для многогранного угла доказана.

Возьмём теперь любой выпуклый конус K и, выбрав на нём несколько образующих, впишем в него многогранный угол V с рёбрами на этих образующих. Если вокруг вершины конуса K описать сферу S единичного радиуса, то конус K пересечёт её по некоторой выпуклой кривой K_1, а многогранный угол — по вписанному в эту кривую выпуклому многоугольнику V_1. (Если конус K сводится к дважды покрытому плоскому углу, то кривая K_1 вырождается в дважды покрытую дугу большого круга; но этот случай можно не рассматривать, потому что такой конус есть многогранный угол с двумя гранями, а для многограниых углов теорема доказана.) Периметр многоугольника V_1 равен сумме плоских углов многогранного угла V, а длина кривой K_1 равна полному углу при вершине конуса K. Если увеличивать число рёбер угла V, уменьшая его плоские углы, то многоугольник V_1 будет сходиться к кривой K_1 и его периметр будет стремиться к длине этой кривой. Поэтому, полный угол θ при вершине конуса K равен пределу полных углов φ вписанных в него многогранных углов V.

[1]) Доказывается совсем просто для сферического треугольника; а если многоугольник разбить на треугольники, то простой подсчёт углов даст тот же результат для многоугольника. Речь идёт, конечно, о многоугольнике, гомеоморфном кругу.

С другой стороны, очевидно, что многогранный угол V лежит в конусе K, и потому всякая опорная плоскость к конусу K будет опорной к углу V. Следовательно, сферическое изображение конуса K содержится в сферическом изображении угла V. Когда число рёбер угла V безгранично увеличивается, его сферическое изображение уменьшается и сходится к сферическому изображению конуса K. Сферические изображения угла V и конуса K выпуклы, а по самому своему определению, площадь выпуклой области равна точной нижней границе площадей выпуклых многоугольников, содержащих эту область. По доказанному, площадь сферического изображения многогранного угла равна 2π минус полный угол φ вокруг его вершины, и предел углов φ есть полный угол θ при вершине конуса K. Поэтому площадь сферического изображения конуса K равна $2\pi - \theta$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Если через точку O на выпуклой поверхности F провести опорную плоскость P, то при подобном увеличении из точки O плоскость P остаётся опорной и в пределе оказывается опорной плоскостью к касательному конусу в этой точке. С другой стороны, касательный конус содержит поверхность F и потому всякая его опорная плоскость будет опорной плоскостью поверхности F в точке O. Следовательно, у касательного конуса и у поверхности все опорные плоскости в точке O — общие, и тем самым сферическое изображение точки O совпадает со сферическим изображением касательного конуса. Поэтому из доказанной только что леммы 1 следует, что площадь сферического изображения точки O равна 2π минус полный угол θ касательного конуса. Но в § 6 гл. IV было доказано, что полный угол касательного конуса в точке O равен полному углу вокруг точки O на самой поверхности. Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что множество точек на выпуклой поверхности, полный угол вокруг которых $< 2\pi$, не более чем счётно. Действительно, $2\pi - \theta$ равно площади сферического изображения точки, а площадь сферического изображения всей поверхности не может превосходить 4π. Следовательно, сумма чисел $2\pi - \theta$ конечна, что возможно лишь в том случае, когда их не более чем счётное множество.

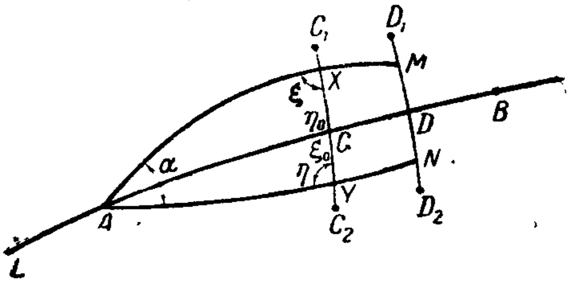
Доказательство двух других теорем, формулированных в начале параграфа, не столь просто: оно проводится методом предельного перехода от многогранников к любым выпуклым поверхностям. Поэтому нужно начать с рассмотрения сферического изображения выпуклого многогранника.

Сферическое изображение внутренности грани многогранника представляет точку, сферическое изображение ребра с исключёнными концами есть дуга большого круга, а сферическое изображение вершины есть выпуклый многоугольник. Если сферические изображения двух вершин имеют общие точки, то эти точки принадлежат сферическим изображениям рёбер или граней, на которых лежат обе данные вершины. Из сказанного видно, что площадь сферического изображения какого бы то ни было множества на выпуклом многограннике равна сумме площадей сферических изображений вершин, лежащих в этом множестве. Но мы знаем, что кратчайшая на выпуклом многограннике не может проходить через вершину, а потому площадь сферического изображения кратчайшей с исключёнными концами равна нулю. Этим кстати доказана для многогранников вторая из формулированных выше теорем, третья же заключается в следующей лемме:

Лемма 2. *Площадь сферического изображения внутренней области геодезического многоугольника на выпуклом многограннике равна кривизне этой области.*

Доказательство. Пусть Q — геодезический многоугольник на выпуклом многограннике P. Его, очевидно, можно разбить на треугольники, каждый из которых целиком лежит на одной грани многогранника P. Тогда кривизны внутренних областей всех этих треугольников равны нулю. По теореме 1 § 1, кривизна многоугольника Q, или, вернее, кривизна его внутренней области, равна сумме кривизн внутренних областей треугольников разбиения и кривизн их вершин, лежащих внутри Q. Но кривизны этих вершин, не являющихся вершинами многогранника, равны нулю, а потому кривизна внутренней области многоугольника Q равна сумме кривизн вершин многогранника, лежащих внутри Q. Кривизна вершины равна площади её сферического изображения, а площадь сферического изображения любой области на многограннике равна сумме площадей сферических изображений его вершин, лежащих в этой области. Следовательно, кривизна внутренней области многоугольника Q равна площади её сферического изображения.

Теперь, когда теорема Гаусса для выпуклых многогранников доказана, остаётся провести предельный переход к любым выпуклым поверхностям. В теореме фигурируют две величины: площадь сферического изображения и кривизна, причём кривизна определяется через углы между кратчайшими. Поэтому для проведения предельного перехода нам придётся воспользоваться, во-первых, результатами § 2, касающимися сходимости площадей сферических изображений множеств на сходящихся выпуклых поверхностях, и, во-вторых, — теоремами о сходимости углов между кратчайшими, доказанными в § 4 гл. IV.



Черт. 48.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать, что от всякой точки лежащей внутри кратчайшей, можно в обе стороны отложить по отрезку с площадью сферического изображения, равной нулю. Тогда кратчайшую с исключёнными концами можно будет покрыть счётным числом таких отрезков и площадь её сферического изображения тоже окажется равной нулю. Кроме того, можно, без ограничения общности, рассматривать кратчайшие на замкнутой выпуклой поверхности.

Возьмём на замкнутой выпуклой поверхности F кратчайшую L и внутри неё две точки A и B. Окрестность отрезка AB можно отобразить на плоскость так, что часть кратчайшей L, оказавшаяся в этой окрестности, перейдёт в прямую [1]). Поэтому для точек, лежащих вблизи отрезка AB, имеет смысл говорить, лежат ли они по одну или по разные стороны от кратчайшей L.

Возьмём внутри отрезка AB точку Z и вблизи неё две точки D_1 и D_2, лежащие по разные стороны от кратчайшей L. Если точки D_1 и D_2 сходятся к точке Z, то кратчайшая D_1D_2 тоже сходится к Z и потому можно выбрать точки D_1 и D_2 так, чтобы кратчайшая D_1D_2 пересекала отрезок AB в какой-то точке D (черт. 48). Кратчайшие AB и D_1D_2 не могут иметь более одной общей точки, а если D_1 и D_2 достаточно близки к точке Z, то кратчайшая D_1D_2 проходит вблизи этой точки. Отсюда ясно, что отрезки D_1D и D_2D кратчайшей D_1D_2 лежат по разные стороны от кратчайшей L.

Точно таким же образом можно провести кратчайшую C_1C_2 так, чтобы она пересекала отрезок AD в какой-то точке C и чтобы отрезки C_1C, C_2C лежали по разные стороны от кратчайшей L. Будем считать, что отрезки C_1C и D_1D лежат по одну сторону от L.

Возьмём теперь на кратчайших D_1D и D_2D переменные точки M и N и будем их двигать к точке D. Тогда кратчайшие AM и AN будут сходиться к AD (в силу следствия 4 теоремы § 3 гл. II). Ни одна из них не может пересекать кратчайшую L, так как две не налегающие кратчайшие, исходящие из одной точки, не могут пересекаться. Следовательно, если точки M и N достаточно близки к точке D, то кратчайшие AM и AN проходят каждая по свою

---

[1]) Возможность такого отображения вытекает из того, что кратчайшая гомеоморфна прямолинейному отрезку (§ 2, гл. II).

сторону от кратчайшей L. Так как они вместе с тем сходятся к отрезку AD, то если точки M и N будут достаточно близки к D, AM будет пересекать C_1C, а AN будет пересекать C_2C. Точки пересечения мы обозначим через X и Y. Когда M и N сходятся к D, то X и Y сходятся к C.

Мы получаем треугольник AXY, ограниченный кратчайшими AX, AY и XY [1]). Пусть α, ξ, η — его углы соответственно при вершинах A, X, Y. Из того, что кратчайшие AX и XY продолжаются за точку X, ясно, что угол ξ меньше π и является углом между этими кратчайшими (а не дополнительным до полного угла 2π вокруг точки X). Точно так же угол η является углом между AY и XY.

Когда точка X сходится к C, то AX и XC_2 сходятся к AC и CC_2. Через точку C проходят кратчайшие и потому полный угол вокруг неё равен 2π. Следовательно, по теореме 5 § 4 гл. IV угол ξ между AX и XY сходится к углу ξ_0 между AC и CC_2. По той же причине угол η сходится к углу η_0 между AC и CC_1. Но $\xi_0+\eta_0=\pi$ и поэтому можно взять точки X и Y настолько близко к точке C, что

$$\xi+\eta<\pi+\frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

где ε наперёд заданное положительное число. (Строго говоря, мы выбираем не точки X и Y, а выбираем точки M и N так близко к D, чтобы AM и AN пересекали CC_1 и CC_2 в точках X и Y, достаточно близких к C.)

Так как кратчайшие AX и AY сходятся к кратчайшей AC, то угол α между ними стремится к нулю (в силу той же теоремы 5 § 4). Поэтому если точки X и Y достаточно близки к точке C, то

$$\alpha<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Если X и Y взяты так, что выполнены оба неравенства (1) и (2), то кривизна треугольника AXY будет

$$\omega(AXY)=\alpha+\xi+\eta-\pi<\varepsilon. \tag{3}$$

(Для краткости мы говорим о кривизне треугольника, имея в виду всюду кривизну его внутренней области.)

Построим теперь последовательность замкнутых выпуклых многогранников P_n, сходящихся к нашей поверхности F. На этих многогранниках мы берём точки A_n, X_n, Y_n, сходящиеся к точкам A, X, Y. Так как кратчайшие AX, AY и XY являются только частями других кратчайших AM, AN и C_1C_2, то они — единственные кратчайшие, соединяющие точки A, X, Y. Поэтому кратчайшие, соединяющие на многогранниках P_n точки A_n, X_n, Y_n, будут к ним сходиться. А тогда треугольники $A_nX_nY_n$ будут сходиться к треугольнику AXY (доказательство дано в Дополнении к § 4 гл. IV). Точнее, на всякой замкнутой поверхности три кратчайшие с попарно общими концами ограничивают два треугольника. Треугольники $A_nX_nY_n$ — это те, которые сходятся именно к рассмотренному выше треугольнику AXY.

Пусть α_n, ξ_n, η_n — углы в треугольниках $A_nX_nY_n$ соответственно при вершинах A_n, X_n, Y_n. Так как через точки A, X, Y проходят кратчайшие (например, через X и Y проходит кратчайшая C_1C_2), то полные углы вокруг этих точек равны 2π. Поэтому по теореме 3 § 4 гл. IV углы α_n, ξ_n, η_n сходятся соответственно к углам α, ξ, η и тем самым кривизны треугольников $A_nX_nY_n$ сходятся к кривизне треугольника AXY, т. е.

$$\omega(AXY)=\lim_{n\to\infty}\omega(A_nX_nY_n);$$

[1]) Замкнутая поверхность разбивается, собственно, на два треугольника, и мы берём тот, который содержит отрезок AC кратчайшей L.

а так как по формуле (3) $\omega(AXY) < \varepsilon$, то

$$\lim_{n\to\infty} \omega(A_nX_nY_n) < \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть теперь $\psi(A_nX_nY_n)$ и $\psi(AXY)$ — площади сферических изображений внутренних областей треугольников $A_nX_nY_n$ и AXY. Так как для многогранников теорема Гаусса доказана, то $\psi(A_nX_nY_n) = \omega(A_nX_nY_n)$, и из неравенства (4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi(A_nX_nY_n) < \varepsilon. \tag{5}$$

Площади сферических изображений замкнутых областей, дополнительных к треугольникам $A_nX_nY_n$ и AXY, равны соответственно

$$4\pi - \psi(A_nX_nY_n) \text{ и } 4\pi - \psi(AXY).$$

Замкнутые области, дополнительные к треугольникам $A_nX_nY_n$, сходятся к замкнутой области, дополнительной к треугольнику AXY. Поэтому, применяя теорему 2 § 2, мы получаем, что

$$4\pi - \psi(AXY) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \{4\pi - \psi(A_nX_nY_n)\},$$

или

$$\psi(AXY) \leqslant \lim_{n\to\infty} \psi(A_nX_nY_n).$$

А на основании неравенства (5) отсюда следует, что

$$\psi(AXY) < \varepsilon. \tag{6}$$

Треугольник AXY содержит внутри себя отрезок AC кратчайшей L, если из отрезка AC исключить его концы. Поэтому площадь сферического изображения отрезка AC с исключёнными концами не больше ε. Но так как через точки A и C проходит кратчайшая, то полные углы вокруг них равны 2π и, следовательно, площади их сферических изображений равны нулю. Поэтому и для всего отрезка AC

$$\psi(AC) \leqslant \psi(AXY)$$

и вследствие неравенства (6)

$$\psi(AC) < \varepsilon.$$

Но так как ε было взято нами произвольно, то отсюда следует, что

$$\psi(AC) = 0.$$

Мы получаем, таким образом, отрезок AC, отложенный от точки A, с площадью сферического изображения, равной нулю. Счётным множеством таких отрезков, откладываемых от разных точек, можно покрыть всю кратчайшую с исключёнными концами, так что площадь сферического её изображения тоже равна нулю.

Теорема 3. *Площадь сферического изображения внутренней области треугольника равна её кривизне.* (В доказательстве мы будем называть треугольником именно внутреннюю его область.)

Доказательство. Пусть T — треугольник на выпуклой поверхности F. Если каждую сторону треугольника T разделить пополам, то полученные половины будут единственными кратчайшими между их концами. Поэтому, объявив середины сторон треугольника T вершинами, мы превратим его в шестиугольник T, у которого все стороны являются единственными кратчайшими между их концами.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_6$ — вершины шестиугольника T, перенумерованные в порядке их расположения, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ — углы при них. Здесь $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \pi$, и кривизна T равна

$$\omega(T) = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 - \pi = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i - 4\pi. \tag{7}$$

Построим последовательность выпуклых многогранников P_n, вписанных в поверхность F так, что точки $A_1, \ldots, A_6$ лежат на этих многогранниках (они будут, вообще говоря, их вершинами). Тогда по лемме 5 § 2 для каждой точки A_j

$$\psi(A_j) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(A_j^n), \tag{8}$$

где индекс n указывает, что точка A_j рассматривается как точка n-го многогранника.

Так как стороны шестиугольника T — единственные кратчайшие между их концами, то кратчайшие $A_1^nA_2^n, \ldots, A_6^nA_1^n$ сходятся к $A_1A_2, \ldots, A_6A_1$. Поэтому шестиугольники Q_n, ограничиваемые кратчайшими $A_1^nA_2^n, \ldots, A_6^nA_1^n$ на многогранниках P_n, сходятся к шестиугольнику T [1]).

Так как $\psi_n(A_j^n)$ сходятся к $\psi(A_j)$, то полные углы вокруг точек A_j^n сходятся к полным углам вокруг точек A_j. Поэтому из теоремы 3 § 4 гл. IV следует, что углы шестиугольников Q_n сходятся к соответствующим углам шестиугольника T.

Тем самым кривизны шестиугольников Q_n сходятся к кривизне шестиугольника T:

$$\omega(T) = \lim_{n \to \infty} \omega(Q_n). \tag{9}$$

Сферическое изображение границы многоугольника слагается из сферических изображений вершин и сторон. Площади сферических изображений сторон с исключёнными концами равны нулю, а, по формуле (8), площади сферических изображений вершин шестиугольников Q_n сходятся к площадям сферических изображений вершин шестиугольника T. Следовательно, площади сферических изображений границ шестиугольников Q_n сходятся к площади сферического изображения границы шестиугольника T. Отсюда, на основании теоремы 3 § 2, следует, что

$$\psi(T) = \lim_{n \to \infty} \psi(Q_n). \tag{10}$$

Так как для многогранников теорема Гаусса доказана, то

$$\psi(Q_n) = \omega(Q_n),$$

и потому из (9) и (10) следует, что

$$\psi(T) = \omega(T),$$

и теорема доказана.

§ 4. Кривизна борелевских множеств.

До сих пор кривизна была определена только для элементарных множеств; теперь мы определим её для любых борелевских множеств на выпуклой поверхности и докажем, что так определённая кривизна всякого борелевского множества равна площади его сферического изображения. Важно иметь в виду, что, по идее, кривизна есть внутренне геометрическое понятие, и потому её определение должно быть внутренне геометрическим. Сначала мы определяем кривизну для

[1]) На замкнутых многогранниках замкнутые ломаные $A_1^n \ldots A_6^n$ ограничивают по два шестиугольника. Одни из них сходятся к T. То, что такие шестиугольники, сходящиеся к T, действительно имеются, доказано в Дополнении к § 4 гл. IV.

ограниченных замкнутых множеств, исходя из уже определённого понятия кривизны элементарного множества:

Кривизну ограниченного замкнутого множества на выпуклой поверхности мы принимаем равной точной нижней границе кривизн содержащих его элементарных множеств. Кривизну же любого борелевского множества на выпуклой поверхности мы принимаем равной точной верхней границе кривизн содержащихся в нём ограниченных замкнутых множеств[1]).

Для того чтобы данное определение кривизны любого борелевского множества не вступало в противоречие с данным её определением для замкнутых множеств, нужно доказать, что для борелевского множества, являющегося замкнутым, оба определения дают одно и то же, т. е. что кривизна замкнутого множества равна точной верхней границе кривизны содержащихся в нём замкнутых множеств. А для того, чтобы данное определение не противоречило ранее введённому определению кривизны элементарных множеств, нужно доказать, что для борелевского множества, являющегося элементарным, оба определения дают один и тот же результат. Эти два обстоятельства мы получим как следствие следующей теоремы, представляющей распространение теоремы Гаусса на все борелевские множества:

Теорема 1. *Кривизна всякого борелевского множества на выпуклой поверхности равна площади его сферического изображения.*

Вспоминая данное только что определение кривизны, эту теорему следует разделить на две:

Теорема 1a. *Для всякого ограниченного замкнутого множества на выпуклой поверхности его кривизна, т. е. точная нижняя граница кривизн содержащих его элементарных множеств, равна площади его сферического изображения.*

Теорема 1b. *Для всякого борелевского множества на выпуклой поверхности его кривизна, т. е. точная верхняя граница кривизн содержащихся в нём ограниченных замкнутых множеств, равна площади его сферического изображения.*

Так как площадь сферического изображения однозначно определена для всех борелевских множеств, и, по доказанному в § 3, для элементарных множеств равна кривизне, то из данных теорем действительно вытекает, что введённое нами определение кривизны непротиворечиво.

Докажем теорему 1a. Пусть M — ограниченное замкнутое множество на выпуклой поверхности F. Если точка X поверхности F не принадлежит M, то вокруг неё можно описать круг столь малого радиуса r, что он не будет пересекать M. Поэтому, обратно, описав вокруг всех точек множества M круги радиуса r, мы получим окрестность U_r множества M, не содержащую точку X. Отсюда следует, что замкнутое множество является пересечением всех таких его «r-окрестностей».

Каждую точку Y множества M можно окружить многоугольником, лежащим в круге радиуса r с центром в точке Y. Из этих многоугольников, согласно лемме Бореля, можно выбрать конечное число покрывающих всё множество M. Эти многоугольники образуют в своей сумме элементарное множество Q_r, содержащее множество M[2]).

[1]) Можно исходить из другого определения: кривизну открытого множества мы полагаем равной точной верхней границе кривизн содержащихся в нём элементарных множеств. Кривизну борелевского множества тогда определяем как точную нижнюю границу кривизн содержащих его открытых множеств. Оба определения относятся друг к другу так же, как известные определения внутренней и внешней меры, и так же, как в случае меры Лебега, для борелевских множеств они дают одно и то же.

[2]) Вследствие условия неналегания кратчайших, конечное число многоугольников разбивается на конечное число многоугольников, не имеющих общих внутренних точек и прилегающих друг к другу по конечному числу кратчайших и в конечном числе точек. Следовательно, они действительно образуют элементарное множество.

Так как M есть пересечение своих r-окрестностей U_r, то множества $U_r - M$ при r, стремящемся к нулю, образуют исчезающую последовательность, и про непрерывности функции ψ (лемма 1 и теорема 1 § 2) $\psi(U_r - M) \to 0$. А так как Q_r содержится в U_r и содержит M, то тем более $\psi(Q_r - M) \to 0$ и, следовательно,

$$\psi(M) = \lim_{r \to 0} \psi(Q_r). \tag{1}$$

С другой стороны, если какое-либо множество Q содержит M, то $\psi(Q) \geqslant \psi(M)$. Поэтому из (1) ясно, что $\psi(M)$ есть точная нижняя граница площадей сферических изображений элементарных множеств, содержащих M. Сравнивая этот результат с данным выше определением кривизны замкнутого множества, мы убеждаемся, что кривизна всякого ограниченного замкнутого множества равна площади его сферического изображения, и теорема 1a доказана.

Для того чтобы доказать теорему 1b, воспользуемся следующей леммой из общей теории меры:

Лемма. *Если $\varphi(M)$ есть вполне аддитивная неотрицательная функция, определённая для всех борелевских множеств, то для каждого борелевского множества M она равна точной верхней границе её значений для ограниченных замкнутых множеств, содержащихся в M.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что для того, чтобы $\varphi(M)$ равнялось точной верхней границе значений φ для ограниченных замкнутых множеств, содержащихся в M, достаточно, чтобы $\varphi(M)$ было не больше этой границы. Действительно, если $N \subset M$, то $\varphi(M) = \varphi(N) + \varphi(M - N)$ и по неотрицательности φ $\varphi(M - N) \geqslant 0$, т. е. $\varphi(M) \geqslant \varphi(N)$. Следовательно, $\varphi(M)$ не может быть меньше точной верхней границы значений φ для множеств N, содержащихся в M. Поэтому, если она не больше этой границы, то она равна ей.

Пусть A — совокупность всех тех борелевских множеств M, для которых $\varphi(M)$ не больше точной верхней границы значений φ для ограниченных замкнутых множеств, содержащихся в M. Согласно сделанному только что замечанию, это будут те борелевские множества M, для которых $\varphi(M)$ равно указанной верхней границе. Поэтому для того, чтобы доказать нашу лемму, нужно показать, что совокупность A содержит все борелевские множества.

Докажем сперва, что A содержит все ограниченные замкнутые множества. Действительно, если M замкнуто, то оно есть замкнутое множество, содержащееся в M. Поэтому, очевидно, $\varphi(M)$ не больше точной верхней границы значений φ для всех замкнутых множеств, содержащихся в M, а это значит, что M входит в A.

Докажем, что если множества $M_1, M_2, \ldots$ входят в A, то и их сумма $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ тоже входит в A. Так как функция φ вполне аддитивна, то

$$\varphi(M) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} M_i\Big) = \lim_{n \to \infty} \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} M_i\Big). \tag{2}$$

[Множества $\sum_{i=1}^{\infty} M_i - \sum_{i=1}^{n} M_i$ образуют исчезающую последовательность. Поэтому в силу свойства непрерывности (см. лемму 1 § 2), $\lim_{n \to \infty} \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} M_i - \sum_{i=1}^{n} M_i\right) = 0$, откуда, пользуясь аддитивностью, получаем формулу (2).]

Так как множества M_i, по условию, входят в A, то при всяком $\varepsilon > 0$ существуют такие ограниченные замкнутые множества $N_i \subset M_i$, что

$$\varphi(M_i) < \varphi(N_i) + \frac{\varepsilon}{2^i},$$

или $\varphi(M_i - N_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда при всяком n имеем:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} M_i - \sum_{i=1}^{n} N_i\right) \leqslant \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (M_i - N_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(M_i - N_i) < \varepsilon\ ^{1)},$$

или

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} M_i\right) < \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right) + \varepsilon. \tag{3}$$

Отсюда, в силу формулы (2), следует, что при достаточно большом n

$$\varphi(M) < \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right) + \varepsilon. \tag{4}$$

Сумма конечного числа замкнутых множеств N_i есть замкнутое множество, содержащееся в M. Поэтому в силу произвольности ε, из формулы (4), следует, что $\varphi(M)$ не больше верхней границы значений φ для замкнутых множеств, содержащихся в M, т. е. что M входит в совокупность A.

Докажем теперь, что если множества $M_1, M_2, \ldots$ входят в A, то и их пересечение $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$ входит в A. Так как множества M_i, по условию, входят в A, то при всяком $\varepsilon > 0$ существуют такие замкнутые множества $N_i \subset M_i$, что

$$\varphi(M_i) < \varphi(N_i) + \frac{\varepsilon}{2^i},$$

или $\varphi(M_i - N_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{\infty} M_i - \prod_{i=1}^{\infty} N_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(M_i - N_i) < \varepsilon\ ^{2)},$$

или

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{\infty} M_i\right) < \varphi\left(\prod_{i=1}^{\infty} N_i\right) + \varepsilon. \tag{5}$$

Но $\prod_{i=1}^{\infty} N_i$ есть пересечение замкнутых множеств, содержащихся в множествах M_i, а, следовательно, оно само есть замкнутое множество, содержащееся в их пересечении $\prod_{i=1}^{\infty} M_i$. Таким образом, вследствие произвольности ε, из формулы (5) вытекает, что $\varphi\left(\prod_{i=1}^{\infty} M_i\right)$ не больше точной верхней границы значений φ

---

[1]) Первое неравенство следует из того, что $\sum_{i=1}^{n} M_i - \sum_{i=1}^{n} N_i \subset \sum_{i=1}^{n} (M_i - N_i)$; второе следует из того, что $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (M_i - N_i)\right)$ равно сумме φ для множеств $M_1 - N_1$, $(M_2 - N_2) - (M_2 - N_2)(M_1 - N_1)$ и т. д.

[2]) Потому что, как легко проверить, $\prod_{i=1}^{\infty} M_i - \prod_{i=1}^{\infty} N_i \subset \sum_{i=1}^{\infty} (M_i - N_i)$, и, как уже было показано, при всяком n

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (M_i - N_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \varphi(M_i - N_i).$$

для замкнутых множеств, содержащихся в $\prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, т. е. что $\prod\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ входит в A.

Итак, совокупность A обладает следующими свойствами: 1) она содержит все ограниченные замкнутые множества, 2) вместе с множествами $M_1, M_2, \ldots$ она содержит их сумму и пересечение. Но по самому определению борелевских множеств они суть те множества, которые входят во всякую совокупность, обладающую указанными свойствами [1]). Следовательно, они входят в совокупность A, что и требовалось доказать.

Теперь мы легко докажем теорему 1b:

Кривизна всякого борелевского множества на выпуклой поверхности равна площади его сферического изображения.

Действительно, по определению, кривизна борелевского множества есть точная верхняя граница кривизн содержащихся в нём ограниченных замкнутых множеств. Но по теореме 1a кривизна ограниченного замкнутого множества равна площади его сферического изображения. Следовательно, кривизна $\omega(M)$ всякого борелевского множества M равна точной верхней границе площадей сферических изображений ограниченных замкнутых множеств, содержащихся в M. С другой стороны, в § 2 мы доказали, что площадь сферического изображения ψ есть неотрицательная вполне аддитивная функция, определённая для всех борелевских множеств. Следовательно, к ней приложима доказанная только что лемма. В применении к функции ψ эта лемма гласит: для всякого борелевского множества M $\psi(M)$ равно точной верхней границе площадей сферических изображений ограниченных замкнутых множеств, содержащихся в M. А так как мы только что показали, что эта граница равна кривизне $\omega(M)$ множества M, то тем самым $\omega(M) = \psi(M)$, т. е. для всякого борелевского множества кривизна равна площади сферического изображения.

В § 2 мы доказали (теорема 1), что площадь сферического изображения неотрицательна и вполне аддитивна, а так как она равна кривизне, то и эта последняя обладает теми же свойствами, т. е. имеет место теорема:

Теорема 2. *Кривизна есть неотрицательная вполне аддитивная функция борелевского множества.*

Кроме этих свойств кривизны можно отметить, что ни для какой выпуклой поверхности она не может превосходить 4π, а для бесконечных выпуклых поверхностей она даже не больше 2π. Наконец, для одной точки она всегда меньше 2π. Возникает естественный вопрос, не обладает ли кривизна ещё какими-нибудь характерными свойствами. Этот вопрос имеет по существу отрицательный ответ, как видно, например, из следующей теоремы:

Пусть на плоскости E задана какая-либо функция множества $\varphi(M)$, обладающая следующими свойствами: 1) $\varphi(M)$ *определена для всех борелевских множеств,* 2) $\varphi(M)$ *не принимает отрицательных значений,* 3) $\varphi(M)$ *вполне аддитивна,* 4) *если M есть одна точка, то $\varphi(M) < 2\pi$,* 5) *значение этой функции для всей плоскости E не превосходит 2π. Тогда существует такая бесконечная полная выпуклая поверхность F, что для всякого множества M на плоскости E $\varphi(M)$ есть кривизна того множества на поверхности F, ортогональной проекцией которого является множество M* [2]).

---

[1]) В определении борелевских множеств требование ограниченности на замкнутые множества не налагается. Однако это не меняет дела, потому что всякое неограниченное замкнутое множество есть сумма счётного числа ограниченных замкнутых множеств.

[2]) См. А. Д. Александров, Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной. Доклады Академии Наук СССР, т. XXXV, № 5 (1942), стр. 143—147. Доказательство аналогичной теоремы для замкнутых поверхностей см. в работе А. Д. Александрова, Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования, Известия Академии Наук СССР, серия матем., 1939 г. № 3, стр. 244—255.

§ 5. Множество направлений, в которых нельзя провести кратчайшую.

Установленное в предыдущем параграфе свойство полной аддитивности кривизны является существенным не только само по себе, но также по тем важным следствиям, которые из него вытекают для внутренней геометрии выпуклых поверхностей. Здесь мы выведем из него одну теорему об углах между кратчайшими, в известном смысле завершающую исследование общих свойств угла. Однако, как мы уже имели случай отметить, в приложениях часто удобнее пользоваться не самой полной аддитивностью, а эквивалентным ей свойством непрерывности: если множества M_n, имеющие определённую кривизну $\omega(M_n)$, образуют исчезающую последовательность, т. е. если $M_n \subset M_{n+1}$ и пересечение всех M_n пусто, то $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(M_n) = 0$. Строго говоря, полная аддитивность эквивалентна совокупности двух свойств: аддитивности и непрерывности (см. лемму 1 § 2). Само собою разумеется, аддитивность, а также неотрицательность кривизны имеют не меньшее значение.

Угол между полупрямыми на плоскости обладает тем важным свойством, что по каждую сторону от любой полупрямой можно отложить угол, равный данному. Тем же свойством обладают углы между геодезическими на регулярных поверхностях, потому что из каждой точки на такой поверхности можно во всяком направлении провести геодезическую.

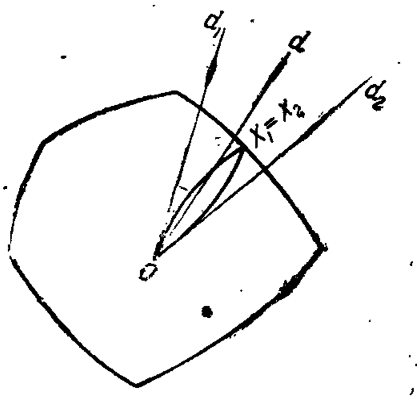
Кратчайшая на выпуклой поверхности, исходящая из точки O, имеет в этой точке касательную, являющуюся образующей касательного конуса в точке O, и угол между кратчайшими равен углу между их касательными, измеренному на касательном конусе (см. § 6 гл. IV). Мы говорим, что кратчайшая исходит из точки O в направлении касательной к ней образующей. Так как угол между кратчайшими не может равняться нулю, то в данном направлении из данной точки исходит только одна кратчайшая. Если бы кроме этой теоремы единственности имела бы место и соответствующая теорема существования, т. е. если бы каждая образующая касательного конуса была бы касательной к какой-нибудь кратчайшей, то тогда от каждой кратчайшей можно было бы отложить угол, равный любому данному (отвлекаясь, конечно, от того тривиального факта, что угол между кратчайшими, исходящими из точки O, не может быть больше половины полного угла вокруг точки O).

Но не на всякой выпуклой поверхности из каждой точки можно провести кратчайшую во всяком направлении, как это было подробно выяснено на примерах в § 10 гл. I. Следовательно, *на выпуклой поверхности, вообще говоря, не для всякой кратчайшей L, исходящей из данной точки O, найдётся исходящая из O кратчайшая, образующая с L угол, равный данному*. В этом состоит основная особенность углов между кратчайшими, отличающая их от углов между полупрямыми на плоскости. Всё же, тех направлений, в которых из данной точки можно провести кратчайшие, — в некотором смысле подавляющее большинство. Точное выражение этого важного обстоятельства даётся следующей теоремой:

Теорема. *Для всякой точки выпуклой поверхности множество тех направлений, в которых из этой точки не исходят кратчайшие, имеет угловую меру нуль* (т. е. множество образующих касательного конуса, не являющихся касательными к кратчайшим, имеет угловую меру нуль). Иными словами, *множество углов, которые нельзя отложить от данной кратчайшей, имеет меру нуль*.

Доказательство. Опишем вокруг точки O на выпуклой поверхности простую замкнутую кривую L и будем двигать по ней точку X. Для удобства примем за кривую L ломаную, ограничивающую малый выпуклый многоугольник P, содержащий точку O внутри (такой существует по теореме, доказанной в § 4 гл. II). Если точка X стремится к какой-нибудь точке X_0, то по теореме о сходимости углов (теорема 6 § 4, гл. IV) угол между кратчайшей OX и предельной кратчайшей OX_0 стремится к нулю. Следовательно, касательная к OX сходится к касательной к кратчайшей OX_0. Поэтому множество M тех образующих касательного конуса, которые являются касательными к кратчайшим OX, идущим в точки ломаной L, замкнуто.

Пусть d — особое направление в точке O, т. е. такая образующая касательного конуса, которая не является касательной никакой кратчайшей, исходящей из O. Так как множество M образующих, касающихся кратчайших OX, замкнуто и не содержит d, то в нём имеются две такие образующие d_1 и d_2, что ограниченный ими сектор (d_1, d_2) является наименьшим из всех секторов, ограниченных образующими из M и содержащих образующую d. Пусть OX_1 и OX_2 — кратчайшие, касающиеся этих образующих и идущие в точки X_1 и X_2 ломаной L. Покажем, что точки X_1 и X_2 должны совпадать (черт. 49).



Черт. 49.

Допустим, что точки X_1 и X_2 не совпадают. Так как L ограничивает выпуклый многоугольник, то OX_1 и OX_2 проходят внутри этого многоугольника и делят его на два сектора. Если точки X_1 и X_2 не совпадают, то внутри обоих секторов можно провести кратчайшие до точек на ломаной L. Но один из этих секторов соответствует сектору (d_1, d_2), содержащему образующую d, и касательные к проходящим в нём кратчайшим составляют с d углы, меньшие чем образующие d_1 и d_2. Это противоречит определению сектора (d_1, d_2). Следовательно, точки X_1 и X_2 представляют собою одну и ту же точку X. Две кратчайшие OX, идущие в эту точку, имеют касательные d_1 и d_2 и ограничивают двуугольник, который охватывает особое направление d. Этим мы хотим только сказать, что соответствующий сектор (d_1, d_2) содержит направление d.

Результат, к которому мы пришли, состоит, следовательно, в том, что все особые направления, исходящие из точки O, содержатся в двуугольниках с общей вершиной O и с вершинами в некоторых точках X ломаной L. Поэтому угловая мера множества M этих направлений не больше суммы углов этих двуугольников [1]).

Но сумма углов одного двуугольника равна кривизне его внутренней области (приняв точку на стороне двуугольника за вершину, превращаем его в треугольник с одним углом, равным π, откуда следует, что кривизна внутренности двуугольника равна сумме его углов). А сумма кривизн внутренностей всех двуугольников не превосходит кривизны содержащей их области $P - O$, которая получается из многоугольника P путём исключения точки O.

Так как многоугольник P можно взять сколь угодно малым, то можно построить последовательность таких многоугольников P_n, стягивающихся к точке O; тогда области $P_n - O$ образуют, очевидно, исчезающую последовательность. Следовательно, их кривизны будут стремиться к нулю.

Беря ломаные L_n, ограничивающие многоугольники P_n, и проделывая для них проведённое выше рассуждение, мы получим в каждой области совокупность двуугольников, содержащих все особые направления, исходящие из точки O. Сумма кривизн, т. е. сумма углов этих двуугольников стремится к нулю вместе с кривизной областей $P_n - O$. Но при всяком n эти двуугольники содержат

---

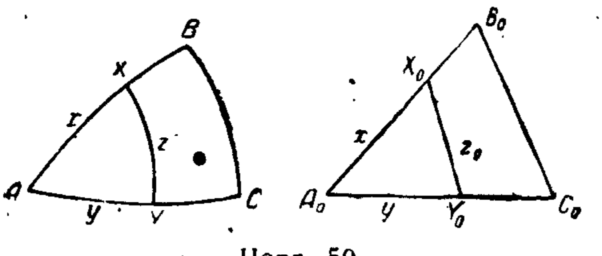
[1]) Наглядно можно представлять себе дело таким образом. При движении точки X по ломаной L кратчайшие OX не могут касаться особых направлений; они должны через них перескакивать и в местах скачков образуют двуугольники, содержащие все особые направления.

все особые направления, и, следовательно, угловая мера множества особых направлений равна нулю [1]).

Отсюда, следует, в частности, что если от данной кратчайшей, может быть, и нельзя отложить угол, равный данному, то угол, сколь угодно близкий к данному, отложить всегда возможно, и окрестность любой точки на выпуклой поверхности всегда можно разбить на секторы со сколь угодно малыми углами. Условия, при которых из данной точки на выпуклой поверхности можно провести кратчайшую в любом направлении, будут найдены в главе XI, § 1, теорема 1.

§ 6. Кривизна как мера неэвклидовости метрики поверхности.

Ещё вводя понятие о кривизне, мы говорили, что кривизна служит как бы мерой неэвклидовости внутренней геометрии поверхности, т. е. мерой её отклонения от геометрии на плоскости. Это видно, до известной степени, из самого определения кривизны, потому что кривизна открытого треугольника определяется как разность сумм его углов и углов плоского треугольника, а кривизна точки определяется как разность полного угла вокруг точки на плоскости, т. е. 2π, и полного угла вокруг точки на поверхности. Значение кривизны, как меры «неэвклидовости» метрики поверхности, выступает во многих теоремах внутренней геометрии. В этом параграфе мы приведём несколько примеров таких теорем и, в частности, докажем, что на выпуклой поверхности, кривизна которой равна нулю, имеет место эвклидова геометрия.



Черт. 50.

Теорема 1. *Если α, β, γ — углы треугольника на выпуклой поверхности, ω — кривизна его внутренней области, α_0, β_0, γ_0 — углы плоского треугольника со сторонами той же длины, то*

$$0 \leqslant \alpha - \alpha_0 \leqslant \omega, \quad 0 \leqslant \beta - \beta_0 \leqslant \omega, \quad 0 \leqslant \gamma - \gamma_0 \leqslant \omega. \tag{1}$$

Действительно, углы треугольника на выпуклой поверхности не меньше углов плоского треугольника со сторонами той же длины. Поэтому все разности $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0$, $\gamma - \gamma_0$ неотрицательны. С другой стороны, по самому определению кривизны внутренней области треугольника

$$(\alpha - \alpha_0) + (\beta - \beta_0) + (\gamma - \gamma_0) = \omega.$$

Следовательно, каждая из этих разностей не больше ω. Так как углы между сторонами треугольника не больше его углов α, β, γ, но всё же не меньше α_0, β_0, γ_0, то для них имеют место те же оценки.

Было бы интересно уточнить оценку разности $\alpha - \alpha_0$ в зависимости от распределения кривизны внутри треугольника. На примере треугольника на конусе можно убедиться, что такая зависимость должна существовать. Однако сколько-нибудь точное её выражение нам неизвестно.

[1]) Можно заметить, что, доказывая теорему о множестве особых направлений, мы выяснили также структуру этого множества. Мы доказали, что множество M_n направлений, касающихся кратчайших, идущих из O в точки X ломаной L_n, замкнуто; и так будет для всех ломаных L_n. Поэтому множество M особых направлений представляет собою пересечение открытых множеств дополнительных к замкнутым множествам M_n, следовательно, множество M есть множество типа G_δ, т. е. пересечение счётного числа открытых множеств. Представляется вероятным, что всякое множество типа G_δ, имеющее меру нуль, может быть множеством особых направлений из какой-нибудь точки на выпуклой поверхности. Было бы интересно доказать (или опровергнуть) это утверждение.

Теорема 2. *Пусть ABC — выпуклый треугольник на выпуклой поверхности и X, Y — две точки на его сторонах AB и AC. Пусть x, y — длины отрезков AX и AY сторон AB и AC, а z — расстояние от X до Y* (черт. 50). *Построим плоский треугольник $A_0B_0C_0$ со сторонами той же длины, т. е. $A_0B_0 = AB$ и т. д. На его сторонах возьмём точки X_0 и Y_0 так, чтобы $A_0X_0 = x$, $A_0Y_0 = y$ и пусть $X_0Y_0 = z_0$. Тогда, если ω — кривизна треугольника ABC*[1]) *и d — длина его наибольшей стороны, то*

$$|z - z_0| \leqslant 4\sqrt{xy}\sin\frac{\omega}{4} \leqslant \omega d.$$

Доказательство. Обозначим через γ_0 угол при вершине A_0 в треугольнике $A_0B_0C_0$, а через γ_1 — угол в плоском треугольнике со сторонами x, y, z, лежащий против стороны z. Тогда

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma_1 = (x-y)^2 + 4xy\sin^2\frac{\gamma_1}{2},$$

$$z_0^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma_0 = (x-y)^2 + 4xy\sin^2\frac{\gamma_0}{2}.$$

Из этих равенств следует, во-первых, что

$$z^2 - z_0^2 = 4xy\left(\sin^2\frac{\gamma_1}{2} - \sin^2\frac{\gamma_0}{2}\right), \tag{2}$$

а, во-вторых, что

$$z \geqslant 2\sqrt{xy}\sin\frac{\gamma_1}{2}, \quad z_0 \geqslant 2\sqrt{xy}\sin\frac{\gamma_0}{2},$$

и тем самым

$$z + z_0 \geqslant 2\sqrt{xy}\left(\sin\frac{\gamma_1}{2} + \sin\frac{\gamma_0}{2}\right). \tag{3}$$

Беря модули в обеих частях равенства (2) и деля на (3), мы получим, что

$$|z - z_0| \leqslant 2\sqrt{xy}\left|\sin\frac{\gamma_1}{2} - \sin\frac{\gamma_0}{2}\right|,$$

и так как

$$\sin\frac{\gamma_1}{2} - \sin\frac{\gamma_0}{2} = 2\cos\frac{\gamma_1+\gamma_0}{4}\sin\frac{\gamma_1-\gamma_0}{4},$$

то тем более

$$|z - z_0| \leqslant 4\sqrt{xy}\sin\frac{\gamma_1-\gamma_0}{4}. \tag{4}$$

Согласно неравенствам (1)

$$\gamma - \omega \leqslant \gamma_0 \leqslant \gamma, \tag{5}$$

где γ — угол при вершине A в треугольнике ABC. Далее, так как треугольник ABC — выпуклый, то в нём проходит кратчайшая XY, которая отсекает от него выпуклый треугольник AXY. Если обозначим через ω_1 кривизну треугольника AXY, то точно так же сравнивая этот треугольник с плоским треугольником со сторонами той же длины x, y, z, мы получим

$$\gamma - \omega_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma. \tag{6}$$

Кривизна треугольника ABC равна сумме кривизн треугольника AXY и четырёхугольника $XYCB$. А так как кривизна этого четырёхугольника неотрицательна, то

$$\omega_1 \leqslant \omega.$$

[1]) Здесь и всюду дальше, говоря «кривизна треугольника», «кривизна многоугольника», мы имеем в виду кривизны их внутренних областей.

Поэтому из (5) и (6) следует, что

$$|\gamma_1-\gamma_0|\leqslant\omega.$$

Так как углы выпуклого треугольника не превосходят π, то $\omega\leqslant 2\pi$ и, следовательно,

$$\frac{|\gamma_1-\gamma_0|}{4}\leqslant\frac{\omega}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\sin\frac{|\gamma_1-\gamma_0|}{4}\leqslant\sin\frac{\omega}{4}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, мы вместо неравенства (4) получим:

$$|z-z_0|\leqslant 4\sqrt{xy}\sin\frac{\omega}{4}\leqslant\omega d, \tag{7}$$

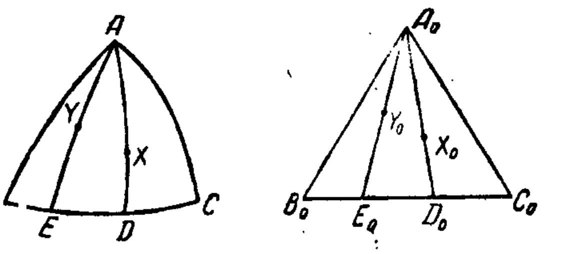
потому что, если d — длина наибольшей стороны треугольника ABC, то $\sqrt{xy}\leqslant d$. Теорема доказана.

Этот результат можно уточнить. По условию выпуклости $\gamma\geqslant\gamma_0$ и потому $z\geqslant z_0$. Следовательно, вместо (7) можно написать

$$0\leqslant z-z_0\leqslant 4\sqrt{xy}\sin\frac{\omega}{4}\leqslant\omega_1.$$

Теорема 3. *Если кривизна выпуклого треугольника на выпуклой поверхности равна нулю, то этот треугольник изометричен плоскому треугольнику.*

Доказательство. Пусть ABC — треугольник, удовлетворяющий условиям теоремы, а $A_0B_0C_0$ — плоский треугольник, со сторонами той же длины (черт. 51). Возьмём на стороне BC произвольную точку D и проведём в треугольнике ABC кратчайшую AD. Вместе с тем возьмём на стороне B_0C_0 треугольника $A_0B_0C_0$ точку D_0 так, чтобы длины отрезков BD и B_0D_0 были равны. Разность длин кратчайшей AD и отрезка A_0D_0 можно оценить на основании предыдущей теоремы. Так как, по условию, кривизна треугольника ABC равна нулю, то оказывается, что длины AD и A_0D_0 равны.



Черт. 51.

Теперь установим следующее отображение треугольника $A_0B_0C_0$ в треугольник ABC. Берём в треугольнике $A_0B_0C_0$ точку X_0 и проводим через неё из вершины A_0 отрезок A_0D_0 до его пересечения со стороною B_0C_0 в точке D_0. Возьмём теперь точку D на стороне BC треугольника ABC так, чтобы отрезок BD этой стороны был равен отрезку B_0D_0. Это всегда возможно, так как BC и B_0C_0 равны. Проведём в треугольнике ABC кратчайшую AD и на ней возьмём точку X так, чтобы отрезок AX этой кратчайшей был равен отрезку A_0X_0. Это возможно, так как, по доказанному, $AD=A_0D_0$. Точку X мы сопоставляем точке X_0 [1]).

Докажем, что полученное таким образом отображение — изометрическое. Пусть X_0 и Y_0 — две любые точки из треугольника $A_0B_0C_0$, а A_0D_0, A_0E_0 — проходящие через них отрезки, продолженные до стороны B_0C_0. Пусть X и Y — соответствующие точки в треугольнике ABC, а AD и AE — соответствующие кратчайшие. По доказанному $AD=A_0D_0$ и $AE=A_0E_0$. Кроме того, $DE=D_0E_0$, так как, по определению, нашего отображения $BD=B_0D_0$ и $BE=B_0E_0$.

[1]) Кратчайшая AD — только одна. Если бы было две кратчайшие AD в треугольнике ABC, то они ограничивали бы двуугольник, содержащийся в ABC. Но двуугольник имеет положительную кривизну, равную сумме его углов. А это противоречило бы тому, что кривизна всего треугольника равна нулю.

Следовательно, мы получаем два треугольника ADE и $A_0D_0E_0$ с равными сторонами. На сторонах AD и AE, A_0D_0 и A_0E_0 этих треугольников мы имеем точки X и Y, X_0 и Y_0, отсекающие на них соответственно равные отрезки: $A_0X_0 = AX$, $A_0Y_0 = AY$. Треугольник ADE — выпуклый, так как он выделяется из выпуклого треугольника ABC двумя кратчайшими (см. теорему 4 § 5 гл. II). Кривизна треугольника ADE равна нулю, так как кривизна всего треугольника ABC равна нулю. Поэтому, применяя теорему 1, мы убеждаемся в том, что отрезки XY и X_0Y_0 равны. Этим доказано, что определённое нами отображение — изометрическое.

Для того чтобы убедиться в том, что треугольник ABC изометричен треугольнику $A_0B_0C_0$, нужно ещё доказать, что наше отображение есть отображение на весь треугольник, т. е. что всякая точка X треугольника ABC оказывается образом какой-нибудь точки треугольника $A_0B_0C_0$. Это, однако, очевидно, так как наше отображение, будучи изометричным, является гомеоморфным, и, кроме того, оно переводит границу треугольника $A_0B_0C_0$ в границу треугольника ABC. А известно (и легко доказывается), что при гомеоморфном (и даже просто непрерывном) отображении одного треугольника в другой, переводящем границу в границу, все точки одного треугольника оказываются образами точек другого.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для того чтобы область G на выпуклой поверхности была локально изометрична плоскости, т. е. чтобы всякая её точка имела окрестность, изометричную части плоскости, необходимо и достаточно, чтобы кривизна всякого треугольника в области G равнялась нулю, или, что эквивалентно этому, — чтобы кривизна всей области была равна нулю.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Для доказательства его достаточности возьмём вокруг какой-нибудь точки O области G окрестность, являющуюся выпуклым геодезическим многоугольником, (существование такой окрестности было доказано в § 4 гл. II). Этот многоугольник можно разбить на выпуклые треугольники, проводя в нём диагонали. Если кривизны этих треугольников равны нулю, то, в силу предыдущей теоремы, все они изометричны плоским треугольникам. Тогда, если точка O лежит внутри одного из них, то этот треугольник и есть её окрестность, изометричная части плоскости. Если же O лежит на общей стороне двух треугольников, то они вместе образуют её окрестность, изометричную плоскому четырёхугольнику. Теорема доказана.

Заметим, что равенство нулю кривизны области G заведомо недостаточно для того, чтобы область G была вся в целом изометрична плоской области. Это показывает пример боковой поверхности цилиндра. Поэтому из равенства нулю кривизны области G следует только то, что в этой области осуществляется эвклидова геометрия «в малом».

Приведём без доказательства ещё несколько примеров теорем, где кривизна выступает как мера «неэвклидовости».

Основную часть учения о треугольниках в эвклидовой геометрии представляют теоремы, устанавливающие какие-либо зависимости между углами и длинами сторон. Таковы все формулы тригонометрии. Таковы, например, теоремы: если у двух треугольников стороны равны, то и соответственные углы равны; биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам, и т. д. и т. п.

Отличие углов треугольника на выпуклой поверхности от углов плоского треугольника с такими же сторонами оценивается, согласно формулам (1), через кривизну. Поэтому всякой теореме, касающейся связи углов и сторон в плоских треугольниках, должна соответствовать общая теорема о треугольниках на выпуклых поверхностях; она должна включать кривизну треугольников, как величину, оценивающую возможное отклонение соотношений в этих треугольниках от соотношений в плоских треугольниках. Например, если у двух треугольников на выпуклых поверхностях стороны равны, то модуль разности любых двух их соответственных углов не может превосходить суммы их кривизн. Эта теорема, очевидно, следует из неравенств (1). Читатель может взять наугад любую теорему о треугольниках из курса геометрии или тригонометрии и попытаться формулировать и доказывать соответствующую теорему для треугольников на выпуклых поверхностях.

Всё это относится к треугольникам, стороны которых являются кратчайшими. Оказывается, что те же результаты имеют место для более широкого класса «нормальных» треугольников. Треугольник мы называем *нормальным*, если его стороны — геодезические и в треугольнике ни для какой пары вершин нет соединяющей их линии более короткой, чем соединяющая их сторона. Короче, нормальный — это такой геодезический треугольник, стороны которого — кратчайшие в нём (но не обязательно кратчайшие на всей поверхности). Например, на конусе с полным углом $<2\pi$ имеются нормальные треугольники, стороны которых не являются кратчайшими. Можно доказать следующую теорему: Пусть X, Y — точки на сторонах AB и AC нормального треугольника ABC; x, y — длины отрезков AX и AY этих сторон, $z = z(x, y)$ — длина линии XY, самой короткой из всех линий, соединяющих точки X и Y и проходящих в треугольнике. Пусть $\gamma(x, y)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами x, y, z, лежащий против стороны z. Тогда $\gamma(x, y)$ есть невозрастающая функция x и y. Доказательство этой теоремы мы оставляем читателю. Оно может быть проведено тем же методом, каким доказывалось условие выпуклости в многогранной метрике положительной кривизны. Теперь, когда мы сильно подвинулись в изучении внутренней геометрии выпуклых поверхностей, это уже не так трудно осуществить. Представляет затруднение то обстоятельство, что линия XY, о которой идёт речь в теореме, может проходить через вершины треугольника, если углы в этих вершинах $>\pi$.

Из приведённой теоремы сразу следует, что углы нормального треугольника на выпуклой поверхности не меньше углов плоского треугольника со сторонами той же длины. Таким образом, все результаты, основанные на этом свойстве треугольников с кратчайшими сторонами, переносятся также на нормальные треугольники. Любые же геодезические треугольники трудно сравнивать с плоскими, потому что, например, сумма двух сторон геодезического треугольника может быть больше третьей. Единственное, что мы можем сказать о них общего, это что у них сумма углов также не меньше π.

Другому отделу элементарной геометрии — учению об окружности — также соответствует ряд теорем об окружности на выпуклой поверхности, в которых степень «неэвклидовости» опять-таки оценивается кривизной. Примеры таких теорем будут даны в главе IX в § 6, специально посвящённом окружности.

Рассмотрим ещё в общих чертах свойства метрики выпуклой поверхности в малых областях с той же точки зрения кривизны, как меры неэвклидовости метрики.

В § 5 главы IV было доказано, что метрика в малой окрестности точки O на выпуклой поверхности F приближённо изображается метрикой на касательном конусе K в этой точке. Именно при всяком $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что как только $\rho_F(Ox)$, $\rho_F(OY) < \delta$, так

$$|\rho_F(XY) - \rho_K(X'Y')| < \varepsilon \max \cdot [\rho_F(OX)\, \rho_F(OY)], \tag{8}$$

где ρ_F и ρ_K — расстояния на поверхности F и на конусе K, а X', Y' — проекции точек X и Y на конус в произвольно данном направлении, проходящем внутри него. Оценка разности расстояний в треугольниках на выпуклой поверхности и на плоскости, даваемая теоремой 2, в соединении со свойством непрерывности кривизны приводит к более глубокому пониманию этого соотношения между метриками поверхности и касательного конуса.

По непрерывности кривизны, при всяком $\varepsilon > 0$ найдётся такая окрестность U точки O, что кривизна ω области $U - O$ будет меньше ε. В качестве U удобно взять выпуклый многоугольник. Углы всякого треугольника, внутренняя область которого содержится в области U, будут отличаться от углов плоского треугольника с такими же сторонами меньше, чем на ε. И, согласно оценке, даваемой в теореме 2, расстояния в этих треугольниках будут отличаться меньше, чем на εd, где d — длина наибольшей стороны [1]. Следовательно, в области U метрика оказывается эвклидовой с точностью до величин порядка εd.

Возьмём, например, треугольник OAB с вершиной в точке O, и пусть X и Y — точки на его сторонах OA и OB. Возьмём плоский треугольник $O_0A_0B_0$ со сторонами той же длины и на его сторонах O_0A_0 и O_0B_0 — точки X_0, Y_0 так, что $\rho_0(O_0X_0) = \rho_F(OX)$, $\rho_0(O_0Y_0) = \rho_F(OY)$, где ρ_0 и ρ_F — метрики плоскости и данной поверхности. Тогда по теореме 2

$$|\rho_F(XY) - \rho_0(X_0Y_0)| \leqslant \omega \sqrt{\rho_F(OX)\,\rho_F(OY)},$$

и тем самым

$$|\rho_{F_1}(XY) - \rho_0(X_0Y_0)| \leqslant \omega \max[\rho_F(OX),\ \rho_F(OY)]. \tag{9}$$

На конусе с исключённой вершиной имеет место эвклидова геометрия и, следовательно, связь метрики поверхности с метрикой касательного конуса, даваемая формулой (8). представляет собою по существу ту же связь с эвклидовой метрикой, которая даётся формулой (9). Более того, неопределённое ε, стоящее в формуле (8), заменено в формуле (9) величиной ω, которая есть кривизна области $U - O$.

С точки зрения внутренней метрики, касательный конус в точке O характеризуется тем, что его полный угол равен полному углу θ вокруг точки O. Формула (9) даёт основание думать, что окрестность U точки O можно так отобразить на окрестность вершины конуса K с полным углом θ, что для всяких точек X, Y из O будет

$$|\rho_F(XY) - \rho_K(X'Y')| \leqslant \omega(U - O) \max[\rho_F(OX),\ \rho_F(OY)], \tag{10}$$

где X', Y' — образы точек X и Y на конусе K, причём такое отображение должно переводить точку O в вершину конуса. Углы треугольников в области $U - O$ и на плоскости отличаются не более чем на $\omega(U - O)$, и это наводит на мысль, что указанное отображение можно сделать таким, чтобы углы в соответственных треугольниках XYZ и $X'Y'Z'$ на поверхности и на конусе отличались не более чем на $\omega(U - O)$. Было бы интересно строго доказать, что отображение, обладающее обоими этими свойствами, существует [2]. Если

---

[1]) В теореме 2 речь идёт о выпуклом треугольнике, но это нужно лишь для того, чтобы существовала кратчайшая XY и чтобы кривизна треугольника OXY была не больше ω. Но в наших условиях существование кратчайшей XY обеспечено малостью окрестности U, а кривизна треугольника OXY не больше ω, потому что он содержится в U.

[2]) Это отображение определяется следующим образом. Проводим из O какую-либо кратчайшую L и задаём вокруг O направление обхода. Через точку X в малой окрестности U точки O проводим окружность C_X с центром в O. Пусть X_1 — точка пересечения окружности C_X с кратчайшей L, а XX_1 — та дуга окружности C_X между X_1 и X, которая проходится от X_1 к X в заданном направлении. Пусть λ — отношение длины дуги XX_1 к длине всей окружности C_X, а r — расстояние $\rho_F(OX)$. Числа λ, r представляют собою координаты в окрестности точки O. На конусе K можно ввести такие же координаты (они будут полярными координатами с точностью до множителя $\frac{1}{\theta}$ при угле). Если теперь каждой точке X из окрестности U сопоставить точку X' на конусе K с теми же координатами λ, r, то получится отображение, для которого имеет место формула (11). Величина ε_1, стоящая в этой формуле, зависит от кривизны ω области $U - O$, но вопрос об оценке ε_1 через ω остаётся пока открытым.

в точке O касательный конус сводится к плоскости K, то неравенство (8) можно заменить более сильным:

$$|\rho_F(XY)-\rho_K(X'Y')|\leqslant\varepsilon_1\ \rho\ (XY), \tag{11}$$

где ε_1 точно так же, — бесконечно малое вместе с $\max\ [\rho_F(OX),\ \rho_F(OY)]$. Здесь под X', Y' следует понимать проекции точек X, Y на касательную плоскость K. Из этого неравенства следует, что не только расстояния, но и углы мало меняются при проектировании малой окрестности U точки O с поверхности на касательную плоскость. Если в точке O нет касательной плоскости, то проектирование на касательный конус не даёт, вообще говоря, такого результата. Однако, В. А. Залгаллер указал такое отображение малой окрестности точки O на касательный конус K, для которого формула (11) всегда имеет место, каков бы ни был касательный конус K в точке O. Во всяком случае, становится совершенно ясным, что оценка отклонения метрики поверхности от метрики касательного конуса есть тоже оценка «неэвклидовости» метрики малой области $U-O$ и что это отклонение зависит от кривизны этой области.

ГЛАВА VI.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА С ДАННОЙ МЕТРИКОЙ.

§ 1. О задании метрики посредством развёртки.

Эта глава посвящена доказательству теоремы:

Всякая многогранная метрика положительной кривизны, заданная на сфере, реализуема посредством замкнутого выпуклого многогранника.

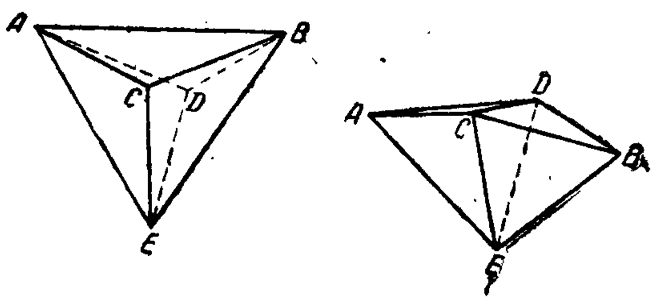
К замкнутым выпуклым многогранникам мы причисляем также дважды покрытые выпуклые многоугольники; их мы будем называть *вырожденными многогранниками*. Так как мы будем иметь дело только с замкнутыми выпуклыми многогранниками, то, если не будет оговорено противное, слово «многогранник» всегда будет обозначать замкнутый выпуклый многогранник, вырожденный или не вырожденный. По аналогичной причине слово «метрика» будет всегда обозначать многогранную метрику положительной кривизны, заданную на сфере.

В § 4 гл. I было показано, что всякую многогранную метрику на сфере можно задать посредством развёртки, состоящей из треугольников, и обратно, всякая такая развёртка, гомеоморфная сфере, задаёт на сфере многогранную метрику. Мы будем иметь дело только с развёртками, составленными из треугольников. *Вершинами метрики* мы называем точки, полный угол вокруг которых не равен 2π. Метрика положительной кривизны характеризуется тем, что полный угол вокруг каждой её вершины меньше 2π. Конечно, заранее заданная развёртка может иметь лишние вершины с полным углом, равным 2π, но мы покажем, что всякую метрику можно задать развёрткой, не имеющей таких лишних вершин.

Задание метрики посредством развёртки позволяет придать нашей теореме реализуемости совершенно элементарную форму, как это уже было указано в § 4 гл. I. Вместо функции двух точек сферы, какой является метрика, развёртка представляет собою образование, которое задаётся конечным числом данных, потому что каждый треугольник развёртки определяется длинами его сторон. Однако задание метрики посредством развёртки также таит в себе некоторые трудности. Во-первых, одну и ту же метрику можно задавать бесконечным числом разных развёрток. Во-вторых, если из данной развёртки можно склеить многогранник, то всё же эта развёртка может иметь очень мало общего с естественной развёрткой многогранника, образованной его гранями. Задача — дать способ по данной развёртке найти естественную развёртку склеенного из неё многогранника — представляется безнадёжно трудной. Она едва ли допускает какое-либо удовлетворительное общее решение. Простой пример развёртки тетраэдра, приведённый в § 4 гл. I, уже до некоторой степени подтверждает это; что же можно ожидать в случае многогранников с большим числом вершин? Наконец, с непрерывным изменением многогранника метрика его меняется непрерывно, а естественная развёртка может меняться скачком, как видно из следующего простого примера.

Возьмём многогранник, изображённый на чертеже 52, *a* и будем его непрерывно деформировать, опуская вершины A и B. Его строение будет оставаться неизменным, пока вершины A, B, C, D не окажутся в одной плоскости. После этого дальнейшее опускание вершин A и B поведёт к тому, что многогранник переломится по ребру CD (иначе он не оставался бы выпуклым!) и примет форму, изображённую на черт. 52*b*. Его естественная развёртка изменяет своё строение в тот момент, когда вершины A, B, C, D оказываются в одной плоскости. В случае многогранников с бо́льшим числом вершин предоставляется ещё больше возможностей для подобных скачков в строении естественной развёртки. Совершенно так же не всякое непрерывное изменение метрики можно осуществить непрерывным изменением одной и той же развёртки.

Указанные трудности заставляют нас, во-первых, уточнить связь между разными развёртками, задающими одну и ту же метрику, и выбрать из них некоторые по возможности наиболее простые. Во-вторых, они заставляют также выяснить, как с изменением одной развёртки будут меняться другие, задающие ту же метрику. Решением этих вопросов в той мере, в какой это окажется нужным для даваемого дальше доказательства теоремы реализуемости, мы теперь и займёмся.



Черт. 52.

Пусть на сфере S задана многогранная метрика положительной кривизны с e вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_e$. Число вершин не может быть меньше трёх; это видно хотя бы из того, что кривизна всей сферы, при любой заданной на ней метрике, равна 4π, а кривизна одной вершины всегда меньше 2π. Проведём из вершины A_1 кратчайшие $A_1A_2, \ldots, A_1A_e$ во все другие вершины. Так как кратчайшая не может проходить через вершину и две кратчайшие, исходящие из одной точки, не могут пересекаться (как это доказано в § 2 гл. III), то кратчайшие $A_1A_2, \ldots, A_1A_e$ не имеют общих точек кроме вершины A_1. Поэтому, разрезав сферу S по этим кратчайшим, мы получим некоторый многоугольник Q [1]), у которого $e-1$ вершин, совпадают с A_1 и ещё $e-1$ вершин суть вершины $A_2, \ldots, A_e$. Стороны этого многоугольника попарно равны: каждая пара сторон, исходящих из одной вершины A_i $(i \neq 1)$, склеивается в одну кратчайшую A_1A_i. Так как многоугольник Q гомеоморфен кругу и не содержит внутри себя вершин метрики, то его можно развернуть на плоскость. Следовательно, всякую метрику положительной кривизны на сфере можно задать развёрткой, состоящей из одного многоугольника с попарно склеиваемыми соседними сторонами. Однако, это для нас не существенно и потому мы оставим сделанное замечание без доказательства [2]).

Многоугольник Q мы разобьём на треугольники посредством диагоналей. Такое разбиение можно осуществить следующим образом. Пусть B_1, $B_2, \ldots, B_n$ — вершины многоугольника Q, перенумерованные в порядке их расположения на его границе. Здесь $n = 2e-2$ и вершины B_i суть вершины метрики: A_1, A_2, A_1, $A_3, \ldots, A_1, A_e$. Так как многоугольник Q не содержит внутри себя вершин метрики, то сумма его углов β_i выражается

---

[1]) Разрезать S по линии AB означает взять метрическое пространство S', имеющее две линии $\overline{A'B'}$ $\overline{\overline{A'B'}}$, при отождествлении которых получается S.

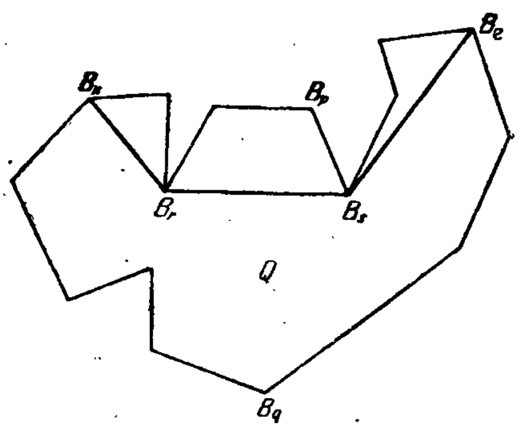
[2]) Мы сейчас покажем, что многоугольник Q можно разбить диагоналями на треугольники. Разворачивая их на плоскость, развернём весь многоугольник Q. Конечно, многоугольник Q при развёртывании может накрывать сам себя.

обычной формулой

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = (n-2)\pi.$$

Поэтому у многоугольника Q имеются по крайней мере три вершины, углы при которых меньше π. (Действительно, если при $n-2$ вершинах углы $\geqslant \pi$, то сумма одних этих углов была бы $\geqslant (n-2)\pi$.) Следовательно, у многоугольника Q имеются две несмежные вершины B_p и B_q с углами, меньшими π.

Возьмём какие-нибудь две вершины B_k и B_e, разделённые вершинами B_p и B_q. Проведём линию B_kB_e, кратчайшую в многоугольнике Q (черт. 53). Как было показано ещё в § 2 гл. II, такая линия существует и представляет собою геодезическую ломаную с вершинами в вершинах многоугольника Q. Но если бы эта линия проходила через вершину с углом, меньшим π, то её, очевидно, можно было бы сократить, срезая угол между её звеньями, сходящимися в такой вершине. Поэтому наша линия B_kB_e не может проходить ни через вершину B_p, ни через вершину B_q. А так как эти вершины разделяются концами линии B_kB_e, то тем самым эта линия хотя бы отчасти проходит внутри многоугольника Q: отходя от его границы в какой-то вершине B_r она подходит к ней опять в какой-то вершине B_s, а на отрезке B_rB_s представляет собою геодезическую линию. Эта геодезическая B_rB_s есть диагональ многоугольника Q и разбивает его на два многоугольника Q_1, Q_2, каждый из которых имеет уже меньше вершин, чем Q. Применяя к многоугольникам Q_1, Q_2 то же рассуждение, мы разобьём их на многоугольники с ещё меньшим числом вершин и т. д. до тех пор, пока не придём к тому, что весь многоугольник Q окажется разбитым на треугольники.



Черт. 53.

Так как эти треугольники не содержат внутри себя вершин метрики и, следовательно, кривизны их равны нулю, то каждый из них можно развернуть на плоскость. Действительно, пусть ABC — один из таких треугольников. Так как его кривизна равна нулю, то углы его меньше π. Поэтому кратчайшая в нём линия AX, соединяющая вершину A с точкой X на стороне BC, проходит внутри него. Кроме того, при данной точке X такая линия только одна, потому что две геодезические AX образовывали бы двуугольник, а кривизна двуугольника положительна (она равна сумме его углов, что следует из общей формулы для кривизны n-угольника $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi$.) Но ещё в § 2 гл. III мы доказали, что окрестность геодезической в многогранной метрике положительной кривизны можно развернуть на плоскость [1]). Заставляя точку X пробегать всю сторону BC и разворачивая последовательно окрестности геодезической AX на плоскость мы развернём весь треугольник ABC. (Конечно, это рассуждение требует уточнения, что легко сделать используя лемму Бореля о выборе конечного числа окрестностей.)

Итак, мы разбили многоугольник Q на треугольники, изометричные плоским треугольникам. Этим самым получена некоторая развёртка данной метрики. Дальше, рассматривая абстрактно заданную метрику, — в отличие от метрики данного многогранника, — мы будем задавать её развёртками, полученными только что проведённым построением. Так как такая развёртка не

[1]) В § 2 гл. III было доказано для кратчайших, но так как геодезическую можно покрыть конечным числом кратчайших, то то же верно для геодезических.

имеет других вершин, кроме вершин данной метрики, то можно высказать следующее утверждение:

Лемма 1. *Всякую многогранную метрику положительной кривизны на сфере можно задать посредством развёртки, составленной из плоских треугольников и не имеющей других вершин, помимо вершин самой метрики.*

Основываясь на этой лемме, мы будем дальше иметь дело только с такими развёртками. Стороны треугольников, образующих развёртку, мы будем называть рёбрами развёртки, считая склеиваемые стороны за одно ребро. Склеиваемые вершины треугольников дают одну вершину развёртки, или — что для рассматриваемых развёрток то же самое — одну вершину данной метрики.

Мы уже указали, что многогранная метрика на сфере не может иметь менее трёх вершин. Рассмотрим простейший случай метрики с тремя вершинами A_1, A_2, A_3. Соединив эти вершины кратчайшими, мы разобьём сферу на два треугольника, которые не будут содержать вершин метрики и потому могут быть развёрнуты на плоскость. Так как эти треугольники имеют попарно склеенные стороны, то они равны. Поэтому, развернув их на плоскость и наложив друг на друга, мы получим дважды покрытый треугольник. Этим доказана

Лемма 2. *Многогранная метрика на сфере, имеющая только три вершины, реализуется посредством дважды покрытого треугольника.*

Поэтому в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением только таких метрик, которые имеют более трёх вершин.

Важную роль в наших рассуждениях будет играть понятие об одинаковом строении развёрток. Мы говорим, что две развёртки R_1 и R_2 имеют *одинаковое строение*, если можно установить такое взаимно однозначное соответствие между их элементами: треугольниками, рёбрами и вершинами, которое сохраняет отношения инцидентности (принадлежности) между этими элементами. Говоря подробнее, это соответствие должно обладать следующими свойствами:

1. Треугольнику, ребру или вершине из развёртки R_1 отвечает, соответственно, треугольник, ребро или вершина из R_2 и обратно.

2. Если в развёртке R_1 ребро a_1 принадлежит треугольнику T_1, то в развёртке R_2 соответствующее ребро a_2 принадлежит соответствующему треугольнику T_2, и обратно.

3. Если в развёртке R_1 вершина A_1 принадлежит ребру a_1 (или треугольнику T_1), то в развёртке R_2 соответствующая вершина A_2 принадлежит соответствующему ребру a_2 (или соответствующему треугольнику T_2), и обратно.

Сохраняя строение развёртки, можно ещё менять длины её рёбер. Точно говоря, это обозначает следующее: мы говорим, что развёртка R получается из развёртки R_0 путём изменения длин рёбер, если обе развёртки имеют одинаковое строение, но длины соответственных рёбер в них различны. Вообще говоря, между элементами двух развёрток можно установить несколько разных соответствий, в силу которых окажется, что они имеют одинаковое строение. Однако мы всегда будем иметь в виду одно какое-нибудь определённое соответствие. Тогда соответственные элементы всех развёрток одинакового строения можно обозначить одними и теми же буквами. При этом условии мы говорим, что развёртка непрерывно изменяется, если длина каждого её ребра меняется непрерывно. (В процессе изменения длин рёбер соответствие между рёбрами, треугольниками и вершинами должно сохраняться.) При данном строении развёртка полностью определяется длинами своих рёбер, потому что каждый треугольник полностью определяется длинами своих сторон.

Лемма 3. *Если k — число рёбер развёртки, а e — число её вершин, то* $k=3e-6$. Следовательно, число переменных, задающих развёртку данного строения, одно и то же для всех развёрток с данным числом вершин.

Действительно, если f — число треугольников развёртки, то по теореме Эйлера

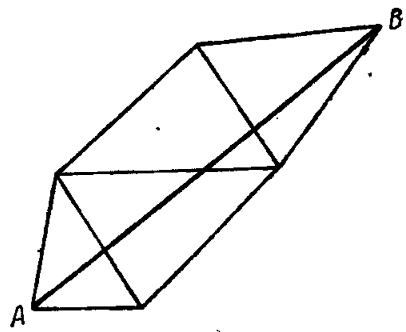
$$f-k+e=2.$$

Каждый треугольник имеет три стороны, и стороны склеены попарно. Поэтому

$$3f = 2k.$$

Умножая первое равенство на три и подставляя в него $2k$ вместо $3f$, получим, что $k = 3e - 6$.

Если две развёртки R_1 и R_2 задают одну и ту же метрику, то треугольники одной из них состоят, очевидно, из кусков треугольников другой, и обратно. Вершины обеих развёрток совпадают, потому что они являются вершинами метрики. Но рёбра развёрток могут не совпадать и в разных развёртках могут соединять разные вершины. Какое-нибудь ребро AB развёртки R_1, исходя из вершины A, будет проходить по треугольникам развёртки R_2, пересекая её рёбра в некоторой последовательности, пока не дойдёт до вершины B. В каждом треугольнике отрезок ребра AB будет прямолинейным, а при переходе через ребро он попадёт в соседний треугольник так, что при развёртывании на плоскость также получается прямолинейный отрезок. Поэтому при последовательном развёртывании на плоскость всех треугольников T_i, по которым проходит ребро AB, оно превращается в прямолинейный отрезок. Это — диагональ того многоугольника P, который покрывают последовательно развёрнутые треугольники T_i (черт. 54). Конечно, ребро AB может пересекать один и тот же треугольник неоднократно и тогда этот треугольник появляется в многоугольнике P соответствующее число раз[1]).



Черт. 54.

Мы будем говорить, что задано *расположение развёртки R_1 в развёртке R_2*, если указано, какие рёбра соединяют вершины развёртки R_1 и какие рёбра развёртки R_2 и в каком порядке пересекает каждое ребро развёртки R_1; в частности, оно может совпадать с ребром развёртки R_2.

Лемма 4. *Пусть две развёртки R_0 и S_0 определяют одну и ту же метрику и имеют одинаковые вершины. Меняя длины рёбер развёртки R_0, мы будем получать новые развёртки R того же строения. Тогда, если изменения длин всех рёбер достаточно малы, метрика, задаваемая развёрткой R, может быть задана, и притом единственным образом, посредством развёртки S, расположенной в R так же, как S_0 расположена в R_0. Развёртки S и S_0 имеют одинаковое строение.*

Доказательство. Возьмём какое-нибудь ребро развёртки S_0. Если оно совпадает с ребром развёртки R_0, то в качестве соответствующего ребра изменённой развёртки S мы берём то же ребро в изменённой разёртке R.

Пусть ребро AB развёртки S_0 не совпадает ни с каким ребром развёртки R_0. Этому ребру в R_0 соответствует определённый отрезок, проходящий по каким-то треугольникам развёртки R_0 и соединяющий две её вершины A и B, потому что, по условию, вершины развёрток R_0 и S_0 соответствуют друг другу. Развернув на плоскость все последовательные треугольники, по которым проходит этот отрезок, мы получим некоторый многоугольник P с диагональю AB (см. черт. 54). Когда длины рёбер развёртки R непрерывно изменяются, то и многоугольник P соответственно непрерывно изменяется. Поэтому найдётся

---

[1]) Ребро AB пересекает каждый треугольник конечное число раз. Действительно, если ребро AB пересекает треугольник T_i бесконечное число раз, то длины его отрезков, заключённые в T_i должны стремиться к нулю, иначе ребро AB было бы бесконечной длины. Но отрезки между точками на сторонах треугольника могут стремиться к нулю только когда они сгущаются в вершине треугольника. Следовательно, вершина треугольника T_i должна лежать на ребре AB. Но тогда она есть один из его концов и ребро AB выходит из неё в виде одного прямолинейного отрезка, так что отрезков не может быть бесконечно много.

такое $\varepsilon_{AB} > 0$, что при любом изменении длин рёбер, меньшем чем ε_{AB}, диагональ AB будет всё ещё проходить внутри многоугольника P. Диагональ изменённого многоугольника P мы можем принять тогда за ребро AB в изменённой развёртке S. Никакого другого отрезка, соединяющего вершины A и B и пересекающего те же рёбра развёртки R в том же порядке, не существует. Поэтому ребро AB в изменённой развёртке S определяется однозначно. Кроме того, при непрерывной деформации многоугольника P ребро AB меняется непрерывно. Проведя то же рассуждение для всех рёбер развёртки и взяв ε меньше всех соответствующих ε_{AB}, ε_{CD} и т. д., мы убеждаемся, что при всяком изменении длин рёбер развёртки R_0, меньшем ε, можно будет взять соответственно изменённые рёбра развёртки S_0. Они будут соединять те же вершины и проходить по тем же треугольникам развёртки R. Если ε достаточно мало, то длины их будут мало отличаться от начальных значений. Разрезая по ним развёртку R и производя склеивание кусков треугольников этой развёртки, мы получим изменённую развёртку S. Из этого построения ясно, что развёртка S имеет то же строение, что исходная развёртка S_0. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть одна и та же метрика представляется двумя развёртками R и S, вершины которых соответствуют друг другу. Сохраняя строение развёртки R и расположение развёртки S в R, будем менять длины рёбер развёртки R. Тогда, по предыдущей лемме, коль скоро изменения длин рёбер достаточно малы, длины рёбер развёртки S оказываются однозначными функциями длин рёбер развёртки R. Мы утверждаем, что эти функции дифференцируемы.*

Доказательство. Если ребро развёртки S совпадает с каким-либо ребром развёртки R, то утверждение очевидно, так как длины обоих рёбер равны.

Если ребро AB развёртки S не совпадает с ребром развёртки R, то мы опять разворачиваем его на плоскость вместе со всеми треугольниками развёртки R, по которым оно проходит. Ребро AB оказывается диагональю многоугольника P, составленного из этих треугольников. Стороны многоугольника P суть рёбра развёртки R, а его углы являются суммами углов составляющих его треугольников и, следовательно, являются дифференцируемыми функциями длин их сторон, т. е. длин рёбер развёртки R. Но длина диагонали есть дифференцируемая функция сторон и углов многоугольника, а потому она оказывается также дифференцируемой функцией рёбер развёртки R. Этим лемма доказана.

Таким образом, многогранная метрика положительной кривизны, имеющая e вершин, задаётся развёртками, которые при данном строении определяются одним и тем же числом переменных: $k = 3e - 6$ длинами рёбер. Изменение рёбер одной развёртки влечёт однозначное и даже дифференцируемое изменение рёбер другой. Поэтому при рассмотрении как данной, так и переменной метрики, мы можем по произволу задавать её той или иной развёрткой. Все эти задания совершенно эквивалентны. Конечно, мы не забываем при этом о том принятом выше условии, что вершины развёртки лежат только в вершинах метрики.

Совокупность всех метрик с данным числом вершин можно превратить в пространство, или «многообразие метрик» следующим образом. Окрестностью метрики ρ_0 будем считать совокупность всех метрик ρ, которые можно задать такими развёртками R, что 1) они имеют то же строение, что некоторая развёртка R_0 метрики ρ_0 и 2) длины их рёбер отличаются от длин соответствующих рёбер развёртки R_0 меньше чем на какое-либо данное $\varepsilon > 0$. Длины рёбер $r_1, \ldots, r_k$ развёрток R представляют собою координаты в такой окрестности. Переходу от одних развёрток к другим соответствует преобразование координат. Леммы 4 и 5 утверждают, что это преобразование взаимно однозначно и дифференцируемо. Говоря о метриках, близких к данной, мы будем дальше иметь в виду метрики, принадлежащие некоторой окрестности указанного типа.

Понятие о сходимости метрик также определяется теперь как сходимость в пространстве метрик, т. е. мы говорим, что метрики ρ_n сходятся к метрикам ρ, если 1) начиная с некоторого номера все метрики ρ_n можно задать развёртками R_n того же строения, как некоторая развёртка R метрики ρ, и 2) длины рёбер развёрток R_n сходятся к длинам соответствующих рёбер развёртки R[1]). Указанное геометрическое представление совокупности метрик, близких к данной, оказывается удобным, и мы будем им дальше пользоваться.

§ 2. Идея доказательства теоремы реализуемости.

Доказательство существования многогранника, реализующего данную метрику, которое мы дадим здесь, оказывается очень длинным, если его проводить во всех деталях. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, оно опирается на одну теорему о многогранниках, имеющую не малое самостоятельное значение (теорема о жёсткости, §§ 4, 5), а во-вторых, в самой природе задачи имеется ряд трудностей, упомянутых ещё в начале главы, преодоление которых требует довольно кропотливых рассуждений. Самая же идея доказательства проста, и потому мы изложим её здесь в общих чертах, не заботясь пока о деталях. Вместе с тем, ссылаясь на те места данной главы, где доказывается то или иное высказанное здесь утверждение, мы дадим тем самым план всего доказательства [2]).

Выпуклый многогранник полностью определяется заданием своих вершин [3]). Если передвигать вершины многогранника, то многогранник будет деформироваться вполне определённым образом. Так как сам многогранник может двигаться как твёрдое тело, то не всякие смещения вершин вызывают его истинную деформацию, потому что равные многогранники можно считать просто за разные экземпляры одного и того же многогранника. Чтобы исключить такие ненастоящие деформации, сводящиеся к движению, мы берём на грани данного многогранника P три вершины A, B, C и, выбрав произвольную систему декартовых координат x, y, z, перемещаем многогранник P так, чтобы вершина A попала в начало, вершина B — на положительную полуось x, а потом вращаем многогранник так, чтобы вершина C оказалась в той части плоскости $z=0$, где $y>0$. Если расположение вершин A, B, C всегда подчинять этим условиям, то движение окажется исключённым. В дальнейшем многогранник, у которого три вершины одной грани подчинены этим условиям, мы будем называть *многогранником с исключённым движением.*

Если многогранник имеет e вершин, то имеется всего $3e$ их координат. Но у вершины A закреплены три координаты, у вершины B — две координаты, а у вершины C — одна координата; остаётся всего $3e-6$ переменных координат, меняя которые, мы будем получать новые многогранники. Следовательно, многогранник с e вершинами определяется заданием $3e-6$ переменных, если его движение исключено. При достаточно малой их величине смещения вершин могут быть совершенно произвольными. Поэтому в достаточно малых областях коор-

---

1) Метрика есть непрерывная функция $\rho(X, Y)$ точек X, Y сферы S, где задана метрика. Поэтому естественное и общее понятие о сходимости метрик есть понятие о сходимости функций. Можно показать, что введённое нами понятие сходимости многогранных метрик с данным числом вершин эквивалентно сходимости метрик как функций. Это, однако, нам не нужно. Наша цель состоит именно в том, чтобы вместо функций рассматривать совокупности конечного числа параметров $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$.

2) Первоначальное доказательство, данное мною в работе «Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой», Мат. сборник, т. 11 (1941), стр. 15—61, опирается на аналогичную, но менее элементарную идею и при детальном осуществлении встречает аналогичные трудности. Другое доказательство предложено Л. А. Люстерником, но оно основано на теореме Вейля-Леви о существовании выпуклой поверхности с данным линейным элементом.

3) См. § 5, Дополнения, где доказано, что выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин.

динаты вершин принимают произвольные значения. Однако при «больших» смещениях одна или несколько вершин могут попасть в выпуклую оболочку остальных вершин и перестанут быть вершинами многогранника. Следовательно, если рассматривать только многогранники с e вершинами, то координаты их могут меняться только в некоторой определённой области. Впрочем, вид этой области не имеет для нас никакого значения.

Каждый многогранник P имеет определённую метрику; вершины многогранника являются вершинами его метрики. Эту метрику можно задать посредством какой-нибудь развёртки R. Проще всего, конечно, взять ту развёртку, которую образуют сами грани многогранника, причём нетреугольные грани можно разбить на треугольники диагоналями. Такую развёртку многогранника мы называем естественной. Можно брать и какую-нибудь другую развёртку. Однако, мы рассматриваем только такие развёртки, вершины которых соответствуют вершинам метрик, т. е. вершинам многогранника.

При данном строении развёртка задаётся длинами её рёбер $r_1, \ldots, r_k$. Мы доказали (лемма 3 § 1), что число рёбер k связано с числом вершин e равенством

$$k = 3e - 6. \tag{1}$$

Следовательно, *число переменных, задающих многогранник, равно числу переменных, задающих развёртку при неизменном её строении.*

Если многогранник P деформируется вследствие движения его вершин, то данная его развёртка будет меняться. Однако, довольно очевидно, и будет доказано в § 3, что при малой деформации многогранника строение развёртки можно оставить неизменным, меняя только длины её рёбер. Следовательно, длины рёбер $r_1, \ldots, r_k$ оказываются однозначными функциями координат вершин $p_1, \ldots, p_k$, (переменных координат вершин при исключённом движении имеется $3e - 6$, т. е. тоже k в силу формулы (1)); таким образом в окрестности значений $p_1^0, \ldots, p_k^0$, соответствующих данному многограннику P_0, мы имеем

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = f_1(p_1, \ldots, p_k), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_k = f_k(p_1, \ldots, p_k). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Мы же хотим доказать, что, напротив, задавая развёртку, можно по ней построить многогранник. Эту задачу можно было бы трактовать как задачу об обращении функций (2), если распространить их на все многогранники, допускающие развёртки данного строения. Действительно, рассмотрим, с одной стороны, все развёртки R данного строения и, с другой стороны, — все многогранники P, допускающие развёртки такого строения. Относя каждому многограннику P определённую развёртку R, мы превращаем рёбра развёртки R в функции координат вершин многогранника P, т. е. получаем систему функций (2). Если бы мы могли, обратно, задать систему функций

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = g_1(r_1, \ldots, r_k), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_k = g_k(r_1, \ldots, r_k) \end{array}\right\} \tag{3}$$

так, чтобы 1) функция g_i были определены для всех значений $r_1, \ldots, r_k$, соответствующих тем развёрткам, которые задают метрику положительной кривизны, и 2) значения p_i, получающиеся при этом, представляли бы действительно координаты вершин многогранника [1]), то мы каждой развёртке отнесли бы

[1]) Т. е. все точки с такими координатами p_i, а не только часть этих точек, являются вершинами их выпуклой оболочки.

многогранник, и наша задача была бы решена. Применяя этот результат к развёрткам всевозможных строений, мы доказали бы теорему реализуемости в полном её объёме.

Однако осуществить такую программу прямым методом едва ли возможно по двум причинам. Во-первых, как уже было отмечено в § 1, связь данной развёртки с естественной развёрткой многогранника, а значит, и с координатами его вершин является очень сложной. Во-вторых, если мы рассматриваем развёртки заранее заданного строения, то нужно ещё доказать, что существуют выпуклые многогранники, допускающие развёртки такого строения. Иначе, мы вовсе не будем иметь никаких функций (2) и обращать будет нечего.

Для того чтобы обойти эти затруднения, мы воспользуемся методом непрерывного продолжения, сущность которого состоит в следующем:

1. Во-первых, мы доказываем, что в достаточной малой окрестности значений $\overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_k$, соответствующих данному многограннику, функции (2) обратимы. Этим, как мы подробно разъясним несколько дальше, будет доказано, что *все метрики, достаточно близкие к реализуемой, также реализуемы*. (Вспомним, что, по принятому в § 1 условию, мы считаем метрики ρ близкими к ρ_0, если их можно задать развёртками того же строения с длинами рёбер, близкими к длинам рёбер развёртки R_0, задающей метрику ρ_0.)

2. Во-вторых, мы докажем, что всякую данную метрику ρ_1 можно соединить с реализуемой метрикой ρ_0 непрерывным рядом метрик $\rho_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$. (Мы говорим, что метрики ρ_t образуют непрерывный ряд, если каждому t в промежутке [0, 1] поставлена в соответствие метрика ρ_t так, что при $t' \to t$ метрики $\rho_{t'}$ сходятся к ρ_t. Понятие сходимости метрик было определено в § 1.)

3. После этого, переходя от метрики ρ_0 к близким метрикам ρ_t и идя таким образом вдоль всего ряда ρ_t до данной метрики ρ_1, мы докажем реализуемость метрики ρ_1.

Рассмотрим каждый из трёх пунктов этой программы несколько подробнее. Для доказательства первого утверждения об обратимости функций (2) мы воспользуемся известной теоремой об обращении функций:

Если система k уравнений с k переменными вида (2) *удовлетворяется при значениях $p_1 = \overset{0}{p}_1, \ldots, p_k = \overset{0}{p}_k$ и $r_1 = \overset{0}{r}_1, \ldots, r_k = \overset{0}{r}_k$ и если при $p_i = \overset{0}{p}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ функции $f_i(p_1, \ldots, p_k)$ дифференцируемы и их якобиан отличен от нуля, то вблизи значений $\overset{0}{r}_1, \ldots, \overset{0}{r}_k$ и $\overset{0}{p}_1, \ldots, \overset{0}{p}_k$ эти уравнения разрешимы, т. е. p_i оказываются непрерывными функциями от r_i, определёнными для всех значений r_i, достаточно близких к $\overset{0}{r}_i$, и при $r_i = \overset{0}{r}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ все p_i принимают значения $\overset{0}{p}_i$.*

Мы докажем (в § 3), что наши функции $f_i(p_1, \ldots, p_k)$ действительно дифференцируемы. Тогда мы можем написать, что

$$\left.\begin{array}{l} dr_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial p_1} dp_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_k} dp_k, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dr_k = \dfrac{\partial f_k}{\partial p_1} dp_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial p_k} dp_k. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Определитель этой системы уравнений относительно dp_i и есть якобиан. Утверждение, что он не равен нулю, эквивалентно поэтому утверждению, что система (4) в случае обращения всех dr_i в нуль не допускает никаких решений, кроме тривиального, когда все $dp_i = 0$. Поэтому для того, чтобы доказать обратимость системы функций (2), нам достаточно доказать, что, если все $dr_i = 0$, то и все $dp_i = 0$.

Это последнее утверждение имеет простой геометрический смысл. Действительно, тот факт, что уравнения (2) удовлетворяются при значениях $p_i = \overset{0}{p}_i$ и

$r_i = r_i^0$, означает, что мы имеем, во-первых, многогранник P_0 с координатами вершин, равными p_i^0, и, во-вторых, мы имеем его развёртку R_0, (данного строения) с длинами рёбер, равными r_i^0. Пусть многогранник P_0 деформируется со временем t так, что координаты p_i меняются с определёнными скоростями $\dot{p}_i$. Тогда длины рёбер развёртки также меняются с определёнными скоростями $\dot{r}_i$ (вследствие дифференцируемости функций $f_i(p_1, \ldots, p_k)$). Утверждение состоит в том, что если все $\dot{r}_i = 0$, то и все $\dot{p}_i = 0$, т. е. если все r_i постоянны с точностью до величин второго порядка, то и все p_i постоянны также с точностью до величин второго порядка. Грубо говоря, это значит, что при исключённом движении многогранник вовсе не деформируется, если его развёртка не меняется. Если же допустить движение (т. е. снять условия, наложенные на расположение вершин A, B, C), то полученный результат можно формулировать в виде следующей теоремы:

При стационарности длин рёбер развёртки многогранник не допускает никаких деформаций, кроме бесконечно малых движений. При этом мы называем переменную $x(t)$ стационарной, если

$$\dot{x}(0) \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Если фигура не допускает бесконечно малых деформаций помимо движений, то она называется *жёсткой*. Поэтому данная теорема является теоремой о жёсткости замкнутого выпуклого многогранника при стационарности длин рёбер его развёртки. Мы докажем эту теорему для невырожденных многогранников; для вырожденных же многогранников эта теорема не имеет места, как в этом легко убедиться[1]). (Исключение составляет дважды пóкрытый треугольник, для которого теорема тривиальна.)

Указанная теорема о жёсткости является обобщением известной теоремы, доказанной ещё Коши. Именно, Коши доказал, что *если у невырожденного замкнутого выпуклого многогранника грани жёсткие*[2]), *то и сам он жёсткий*. Обобщение состоит в том, что мы не требуем жёсткости граней: в нашем случае грани могли бы ломаться; мы требуем только, чтобы все длины рёбер какой-нибудь развёртки многогранника были стационарны. Это требование слабее требования о жёсткости граней даже в том случае, если мы имеем дело с естественной развёрткой многогранника. Действительно, если на многограннике есть, скажем, четырехугольная грань, то она может ломаться по любой из своих диагоналей, хотя все её стороны и диагонали будут при этом сохранять свою длину. Только в том случае, когда все грани многогранника треугольные и если именно они принимаются за грани развёртки, из стационарности рёбер следует жёсткость граней. В этом случае деформации граней могут состоять только в изменении длин их сторон (так как треугольник полностью определяется своими сторонами), и при стационарности сторон грани оказываются жёсткими. Наша обобщённая теорема о жёсткости будет доказана в §§ 4—5 тем же методом, каким Коши доказал свою теорему.

Если теорема о жёсткости невырожденных многогранников доказана, то, как мы показали, из неё вытекает, что якобиан системы функций (2) не равен

---

[1]) Пусть $ABCD$—тетраэдр, выродившийся в дважды покрытый квадрат со стороной a. Пусть диагонали AC и BD, проведённые на разных сторонах плоскости квадрата, играют роль рёбер. Выдвинем вершину C из плоскости квадрата на высоту h. Тогда рёбра AB, AD, BD не изменятся, рёбра BC и DC ставут равны $\sqrt{a^2+h^2}$, а ребро AC станет равным $\sqrt{2a^2+h^2}$. Отсюда видно, что изменение длин рёбер порядка h^2, т. е. второго порядка, относительно скорости движения вершины C, если $h = \dot{h}t$. Поэтому при $t=0$ производные длин рёбер по t будут равны нулю, т. е. длины рёбер стационарны.

[2]) Т. е. все деформации граней, кроме движения каждой из них как целого, — второго порядка малости.

нулю и, следовательно, эта система обратима в некоторой малой окрестности значений $r_i = r_i^0$; и $p_i = p_i^0$, соответствующих какому-либо невырожденному многограннику.

Отсюда следует, что метрики, достаточно близкие к реализуемым, реализуемы. Действительно, пусть данная метрика ρ_0 реализуется многогранником P_0 с координатами вершин $p_1^0, \ldots, p_k^0$. Метрику ρ_0 мы задаём некоторой развёрткой R_0 с длинами рёбер $r_1^0, \ldots, r_k^0$; это будет развёртка многогранника P_0. Когда вершины многогранника P_0 подвергаются произвольным, но достаточно малым перемещениям (помня, однако, об условии, наложенном на три вершины A, B, C, исключающем движение многогранника как целого), мы получаем новые многогранники P с координатами вершин $p_1, \ldots, p_k$. Следовательно, координаты вершин $p_1, \ldots, p_k$ могут принимать любые значения, достаточно близкие к $p_1^0, \ldots, p_k^0$. Как уже было указано, в § 3 мы докажем, что многогранники P, достаточно близкие к данному P_0, допускают развёртки R того же строения, что R_0, и имеющие длины рёбер $r_1, \ldots, r_k$, близкие к $r_1^0, \ldots, r_k^0$. Таким образом, вблизи значений $p_1^0, \ldots, p_k^0$ длины рёбер r_i оказываются функциями координат вершин p_i; это суть функции (2). Допустим, мы доказали, что эти функции обратимы, т. е. мы имеем функции (3): $p_i = g_i(r_1, \ldots, r_k)$, где $r_1, \ldots, r_k$ — независимые переменные вблизи значений $r_i = r_i^0$ $(i = 1, \ldots, k)$ и при $r_i = r_i^0$ функции g_i принимают значения $p_i = p_i^0$, соответствующие исходному многограннику P_0.

Пусть ρ_1 — метрика, достаточно близкая к данной ρ_0; по определению близости метрик, метрику ρ_1 можно задать развёрткой R_1 того же строения, что R_0, с длинами рёбер r_i^1, близкими к r_i^0. Пусть $p_i^1 = g_i(r_1^1, \ldots, r_k^1)$ — значения функций (3) для $r_i = r_i^1$; эти значения близки к p_i^0 и, значит, существует выпуклый многогранник P_1 с координатами вершин p_i^1. Вместе с тем, этот многогранник допускает развёртку R_1' того же строения, что R^0, и длины рёбер этой развёртки будут представляться функциями (2), т. е. они будут равны $f_i(p_1^1, \ldots, p_k^1)$. Но так как функции f_i обратны функциям g_i и $p_i^1 = g_i(r_1^1, \ldots, r_k^1)$, то $f_i(p_1^1, \ldots, p_k^1) = r_i^1$; а это означает, что развёртка R_1' имеет те же рёбра, что и R_1. Следовательно, многогранник P_1 имеет развёртку R_1 и реализует тем самым метрику ρ_1.

Полученный результат можно формулировать в виде следующей основной леммы:

Лемма А. *Если из развёртки R_0 можно склеить замкнутый выпуклый и невырожденный многогранник P_0, то из всякой развёртки того же строения, имеющей длины рёбер, достаточно близкие к длинам рёбер развёртки R_0, также можно склеить замкнутый выпуклый многогранник.*

Короче: *Метрики, достаточно близкие к реализуемой, — реализуемы.*

Этим осуществляется первый пункт нашей программы. Для осуществления второго пункта воспользуемся рассуждением по индукции. В § 1 мы доказали (лемма 2 § 1), что всякая метрика с тремя вершинами реализуема. Поэтому мы предположим, что всякая метрика с $e-1$ вершиной реализуема, и будем доказывать реализуемость метрик с e вершинами $(e > 3)$. Тогда мы сможем доказать следующее:

Лемма В. *Если метрика ρ_0 имеет более трёх вершин, то её можно соединить непрерывным рядом метрик ρ_t с такой метрикой ρ_1, которая реализуется невырожденным замкнутым выпуклым многогранником; этот ряд ρ_t можно выбрать так, что все метрики ρ_t будут иметь то же самое число вершин и ни одна из них не будет соответствовать вырожденному многограннику (т. е. ни одну из них нельзя реализовать вырожденным многогранником).*

Эта лемма будет доказана в § 7.

Наконец, в § 6 мы доказываем ещё следующее:

Лемма С. *Предел реализуемых метрик есть реализуемая метрика.*

План доказательства этой леммы очевиден. Если многогранники P_n реализуют метрики ρ_n, сходящиеся к метрике ρ, то из них можно выбрать сходящуюся последовательность. Предельный многогранник этой последовательности имеет предельную метрику ρ. Это есть, собственно, частный случай общей теоремы о сходимости метрик сходящихся выпуклых поверхностей. Однако, мы определили теперь сходимость метрик через сходимость развёрток и потому нам придётся доказать лемму С без ссылки на общую теорему сходимости.

Если леммы А, В и С доказаны, то доказательство теоремы о существовании многогранника с данной метрикой завершается очень просто. Действительно, пусть ρ_0 — данная метрика с e вершинами ($e>3$). Пусть ρ_t ($0 \leqslant t \leqslant 1$) — непрерывный ряд метрик, удовлетворяющий всем условиям, указанным в лемме В. Он соединяет ρ_0 с метрикой ρ_1, реализуемой невырожденным многогранником. В таком случае, согласно лемме А, всякая метрика, близкая к ρ_1, также реализуема; в частности, все метрики ρ_0 при t достаточно близких к единице, будут реализуемы.

Пусть теперь T — точная нижняя граница тех t, при которых метрики ρ_t реализуемы. Так как ряд метрик ρ_t непрерывен, то метрика ρ_T оказывается пределом реализуемых метрик ρ_t ($t \to T+0$); поэтому, согласно лемме С, метрика ρ_T также реализуема посредством некоторого многогранника P_T. Следовательно, если $T=0$, то теорема доказана. Но T не может не равняться нулю. Действительно, если бы было $T>0$, то так как в ряду ρ_t при $t>0$ нет метрик, соответствующих вырожденным многогранникам, то многогранник P_T был бы невырожденный. Тогда, по лемме А, все метрики, близкие к ρ_T, и, в частности, метрики ρ_t при $t<T$, также были бы реализуемы. Это означало бы, что T не есть нижняя граница тех t, при которых метрики ρ_t реализуемы. Следовательно, $T=0$, и доказательство теоремы завершено.

Дальнейшее изложение посвящено осуществлению изложенной программы. В § 3 даётся доказательство существования и дифференцируемости функций (2) в окрестности значений $p_1^0, \ldots, p_1^0$, соответствующих какому-либо данному многограннику. В § 4 устанавливаются некоторые леммы, необходимые для доказательства теоремы о жёсткости, которое проводится затем в § 5. В § 6 на основании теоремы о жёсткости доказывается лемма А, а также доказывается лемма С. Наконец, § 7 посвящён доказательству леммы В.

Если отвлечься от теоремы о жёсткости, которую следует рассматривать как самостоятельный результат, эта лемма В является, собственно, единственным трудным пунктом всей программы. После доказательства лемм А, В, С нам остаётся только повторить в § 8 только что проведённое рассуждение, доказывающее реализуемость любой метрики.

§ 3. Малая деформация многогранника.

Пусть P_0 — замкнутый выпуклый многогранник. Будем непрерывно перемещать его вершины и строить на них выпуклые многогранники. Когда расположение вершин задано, то многогранник будет вполне определённым, потому что замкнутый выпуклый многогранник есть граница выпуклой оболочки своих вершин (См. Дополнение, § 5, теорема 2). Мы говорим, что многогранник P_0 деформируется в результате смещения его вершин.

Если смещение вершин достаточно мало, то смещённые вершины будут вершинами нового многогранника. Действительно, смещённая вершина перестаёт быть вершиной, если плоскости проходящих через неё граней перестают образовывать многогранный угол, разгибаясь в двугранный угол или даже в плоскость. Но так как плоскости, проходящие через вершины, и тем самым грани многогранника, движутся непрерывно при непрерывном движении вершин, то это может наступить лишь тогда, когда смещение вершин стало достаточно большим. По той же причине, при достаточно малых смещениях вершин, вершины, не принадлежавшие одной грани, не попадут в одну плоскость и тем самым не станут принадлежать одной грани (иными словами, две грани не разогнутся в одну). Однако если более трёх вершин лежало в одной плоскости, то даже при сколь угодно малых смещениях они, вообще говоря, перестанут лежать в одной плоскости. Поэтому при сколь угодно малых смещениях вершин более чем треугольные грани могут переламываться, образуя несколько граней. Изломы будут проходить по диагоналям граней, причём при одних смещениях изломы пойдут по одним диагоналям, при других смещениях, по другим. Таким образом, хотя при малых деформациях, вызванных смещением вершин, число вершин сохраняется и разные грани не разгибаются в одну, следовательно, и рёбра не исчезают, но на многограннике, если не все его грани были треугольными, появляются, вообще говоря, новые рёбра, соответствующие каким-то диагоналям нетреугольных граней. Строение многогранника меняется, и притом по разному в зависимости от характера смещения вершин. На деформированном многограннике мы будем называть старыми те его элементы (грани, рёбра, углы), которые были на исходном многограннике, а новыми — те элементы, которые возникают вследствие деформации. Так, при переламывании «старой» грани, она распадается на «новые» грани, разделённые «новыми» рёбрами.

Если разбить нетреугольные грани многогранника на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри граней, то многогранник окажется как бы составленным из треугольных «граней». Развёртку, составленную из этих «граней», мы называем естественной. Многогранник имеет, вообще говоря, несколько естественных развёрток, но число их, очевидно, конечно. При малых смещениях вершин естественная развёртка может перестать быть таковой, если её треугольники переламываются. Но так как изломы граней идут по диагоналям, то всякой естественной развёртке деформированного многогранника всегда соответствует некоторая естественная развёртка исходного многогранника.

Лемма 1. *Пусть P_0 — замкнутый выпуклый многогранник и R_0 — какая-либо его развёртка, вершины которой совпадают с вершинами многогранника. Пусть многогранник P получается из P_0 в результате малых смещений вершин. Тогда, если смещения вершин достаточно малы, то P допускает и притом единственную развёртку R, имеющую то же строение, что и развёртка R_0 и так же расположенную относительно естественной развёртки многогранника P, как R_0 расположена относительно соответствующей естественной развёртки многогранника P_0.*

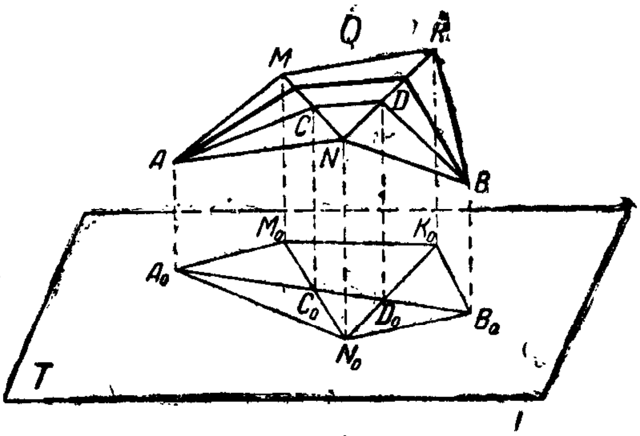
Доказательство. Рассмотрим многогранники P близкие P_0, имеющие естественные развёртки S одного строения. Пусть S_0 — соответствующая развёртка многогранника P_0. Мы имеем две развёртки R_0 и S_0 многогранника P_0 и развёртку S многогранника P. При непрерывном смещении вершин длины рёбер развёртки S непрерывно меняются, так как её рёбра суть рёбра и диагонали граней многогранника. Поэтому в силу леммы 4 § 1 найдётся такое $\varepsilon_S > 0$, что если смещения вершин меньше ε_S (и таковы, что получающиеся вследствие их многогранники P допускают естественную развёртку S), то развёртку S можно заменить, и притом единственным образом, развёрткой R, имеющей то же строение, что данная развёртка R_0, и так же расположенной относительно естественной развёртки S, как R_0 расположена относительно S_0.

Так как число различных возможных естественных развёрток конечно, то, беря для каждой из них своё ε_S, а потом беря в качестве ε наименьшее из всех этих ε_S, мы получим, что при любых смещениях вершин, меньших ε, многогранники P допускают единственную развёртку R, обладающую требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Пусть мы имеем какую-либо нетреугольную грань Q_0 многогранника P_0. После смещения вершин она сломается по каким-то диагоналям и превратится в переломанный многоугольник Q. Всякая другая её диагональ заменится ломаной, которая при развёртывании изменённой грани Q на плоскость превращается в диагональ получающегося при этом многоугольника. Докажем следующее:

Лемма 2. *Длина переломанной диагонали на грани Q отличается от расстояния между её концами на величину второго порядка малости относительно смещения вершин.*

Доказательство. Пусть T — плоскость, в которой находилась до смещения вершин грань Q; пусть AB — рассматриваемая переломанная диагональ этой грани (см. черт. 55, где AB обозначена жирной линией). Пусть, наконец, A_0 и B_0 — проекции точек A и B на плоскость T. Если $\overline{AB}$ и $\overline{A_0B_0}$ обозначают прямолинейные отрезки, соединяющие точки A и B, соответственно, A_0 и B_0, то, очевидно, между длинами ломаной AB и отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{A_0B_0}$ имеет место соотношение



Черт. 55.

$$AB \geqslant \overline{AB} \geqslant \overline{A_0B_0}. \tag{1}$$

Грань Q переломана по каким-то диагоналям (диагонали MN и NK на черт. 55). Спроектируем эти диагонали на плоскость T и пусть $C_0, D_0, \ldots, G_0$ — точки пересечения этих проекций с отрезком $\overline{A_0B_0}$ [1]). Если в точках $C_0, D_0, \ldots, G_0$ восставить перпендикуляры к плоскости T, то они пересекут соответствующие диагонали в каких-то точках $C, D, \ldots, G$. Так как переломанная диагональ AB является кратчайшей линией, соединяющей точки A и B на переломанной грани Q, то

$$AC + CD + \ldots + GB \geqslant AB. \tag{2}$$

С другой стороны, отрезок $\overline{A_0B_0}$ разбивается точками $C_0, D_0, \ldots, G_0$ на отрезки $\overline{A_0C_0}, \overline{C_0D_0}, \ldots, \overline{G_0B_0}$ и

$$\overline{A_0C_0} + \overline{C_0D_0} + \ldots + \overline{G_0B_0} = \overline{A_0B_0}. \tag{3}$$

Из соотношений (1), (2), (3) следует:

$$AC + \ldots + GB \geqslant AB \geqslant \overline{AB} \geqslant \overline{A_0C_0} + \ldots + \overline{G_0B_0} \tag{4}$$

или

$$|AB - \overline{AB}| \leqslant |AC - \overline{A_0C_0}| + \ldots + |GB - \overline{G_0B_0}|. \tag{5}$$

Если мы теперь докажем, что каждая из разностей, стоящих в правой части этого неравенства, есть величина второго порядка малости относительно смещений вершин, то наша лемма будет доказана.

Рассмотрим, например, разность $AC - A_0C_0$.

Очевидно, что

$$AC^2 = \overline{A_0C_0}^2 + (\overline{AA_0} - \overline{CC_0})^2. \tag{6}$$

Пусть M и N — концы той диагонали, на которой лежит точка C и по которой переломана грань Q. Пусть M_0 и N_0 — их проекции на плоскость T. Так как

[1]) Проекции диагоналей мало отличаются от первоначального положения самих диагоналей в плоскости T. Поэтому, если смещения вершин достаточно малы, то отрезок A_0B_0 не будет совпадать ни с одной из проекций других диагоналей, потому что в исходном положении он также есть диагональ.

точки M, C, N лежат на одной прямой, а точки M_0, C_0, N_0 лежат на проекции этой прямой на плоскость T, то

$$\frac{\overline{MM_0}-\overline{NN_0}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{CC_0}-\overline{NN_0}}{\overline{CN}},$$

откуда

$$\overline{CC_0}=\frac{\overline{CN}}{\overline{MN}}\overline{MM_0}+\frac{\overline{CM}}{\overline{MN}}\overline{NN_0}. \tag{7}$$

Но отрезки $\overline{MM_0}$ и $\overline{NN_0}$ суть не что иное, как проекции смещений вершин M и N на направление, перпендикулярное плоскости T. Отрезок $\overline{AA_0}$ есть такая же проекция смещения вершины A. Поэтому, если воспользоваться соотношением (7), то из равенства (6) следует, что разность $AC^2-\overline{A_0C_0^2}$ и тем самым также $AC-A_0C_0$ есть величина второго порядка относительно смещения вершин. Остальные разности $|CD-\overline{C_0D_0}|$ и т. д. оцениваются совершенно так же, только здесь обе точки C и D лежат на диагоналях и к ним обеим следует применять формулы, аналогичные (7). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть P_0 — данный многогранник и R_0 — его развёртка, вершины которой являются вершинами многогранника. Пусть многогранник P_0 деформируется вследствие смещения вершин и для деформированного многогранника P строится развёртка R, соответствующая R_0 согласно лемме 1. Тогда длины рёбер переменной развёртки R суть дифференцируемые функции координат вершин.*

Доказательство. Из леммы 1 следует, что длины рёбер развёртки R суть однозначные и непрерывные функции координат вершин, определённые в некоторой области изменения этих координат вблизи их начальных значений. По лемме 2 диагональ ломающейся грани отличается от расстояния между её концами на величину второго порядка. Расстояние же между вершинами, конечно, есть дифференцируемая функция их координат:

$$\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}.$$

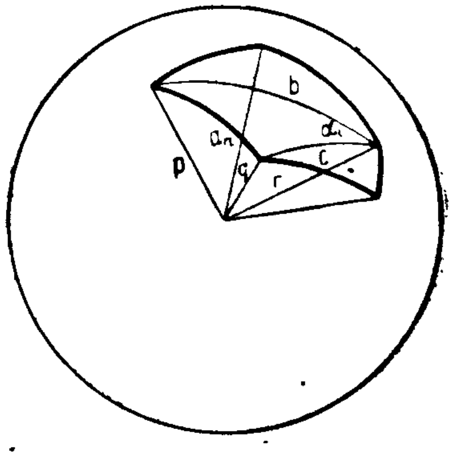
Поэтому длина ломающейся диагонали в начальный момент её излома есть также дифференцируемая функция координат вершин.

Возьмём естественную развёртку многогранника P_0. Из только что доказанной дифференцируемости диагоналей следует, что все её ребра суть дифференцируемые функции координат вершин. Но по лемме 5 § 1 длины рёбер одной развёртки суть дифференцируемые функциями длин рёбер другой, поэтому длины рёбер развёртки R являются дифференцируемыми функциями длин рёбер естественной развёртки, а, следовательно, также дифференцируемыми функциями координат вершин. (Это мы доказали для начального момента деформации. Но так как любой момент её можно принять за начальный, то тем самым дифференцируемость длин рёбер развёртки доказана для всей области изменения координат вершин, при которых многогранники P ещё допускают развёртку R.)

В дальнейшем мы будем представлять себе, что вершины многогранника движутся с определёнными в каждый момент скоростями, т. е. их координаты представляются как дифференцируемые функции некоторого параметра t, который удобно мыслить, как время. Исходный многогранник соответствует t, равному нулю. Тогда все углы на гранях и между гранями будут также меняться с определёнными скоростями, так как они являются дифференцируемыми функциями координат вершин (в чём нетрудно убедиться). Точно так же в силу леммы 3 длины рёбер каждой развёртки многогранника будут меняться с определёнными скоростями.

§ 4. Деформация выпуклого многогранного угла.

Прежде чем обратиться к доказательству теоремы о жёсткости невырожденных замкнутых выпуклых многогранников, рассмотрим предварительно деформацию любого из многогранных углов такого многогранника, деформирующегося вследствие смещения вершин. Однако тот факт, что многогранный угол принадлежит многограннику, не будет играть никакой роли. Можно просто взять любой выпуклый многогранный угол, провести на его гранях из вершины новые рёбра и вращать как старые, так и новые рёбра вокруг вершины с некоторыми скоростями. Тогда многогранный угол будет деформироваться, грани его будут ломаться по новым рёбрам, и двугранные углы между ними будут меняться с определёнными скоростями. При этом мы будем рассматривать только такие деформации, при которых многогранный угол остаётся выпуклым. Термины «старые» и «новые», относящиеся к рёбрам и к плоским и двугранным углам, мы будем понимать в том же смысле, как они были определены в предыдущем параграфе. Когда нет оговорок, речь идёт как о старых, так и о новых рёбрах и углах между гранями.



Черт. 56.

Многогранный угол с n гранями определяется заданием $n-1$ его плоских углов и всех $n-2$ двугранных углов между этими плоскими углами. Поэтому n-ный плоский угол a_n будет функцией этих $n-1$ плоских углов $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $n-2$ двугранных углов между ними $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ (двугранные углы при новых рёбрах в начале деформации равны π). Мы будем говорить, что двугранный угол α_i лежит против плоского угла a_n, если ребро угла α_i не принадлежит той старой грани, на которой в начальный момент лежит угол a_n.

Лемма 1. *Частная производная от плоского угла a_n по любому из противоположных ему двугранных углов α_i положительна* [1]).

Доказательство. Возьмём двугранный угол α_i, противолежащий a_n, и пусть r — ребро этого двугранного угла. Пусть p и q — рёбра, образующие плоский угол a_n (черт. 56). Проведём через рёбра r и p, r и q плоскости P и Q. Вместе с плоскостью угла a_n они ограничат трёхгранный угол с рёбрами p, q, r (эти рёбра не лежат в одной плоскости, так как угол α_i лежит против a_n). Пусть b и c — плоские углы этого трёхгранного угла между рёбрами p и r, q и r, а α — двугранный угол между этими плоскими углами. Если вокруг вершины многогранного угла описать единичную сферу, то он вырежет по ней выпуклый сферический многоугольник. Углы b и c дадут диагонали этого многоугольника. Изменение угла α_i при постоянных углах $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n-2}$ можно, очевидно, производить, вращая плоскости P и Q вокруг ребра r и вращая вместе с ними многогранные углы, отсекаемые этими плоскостями от данного нам n-гранного угла; при этом все плоские углы $a_1, \ldots, a_{n-1}$, а также b и c, и двугранные углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{n-2}$ будут оставаться неизменными. Приращение же угла α_i будет равно приращению угла α. Поэтому

$$\frac{\partial a_n}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial a_n}{\partial \alpha}. \tag{1}$$

Но в трёхгранном угле производная от плоского угла по противолежащему

---

[1]) Мы указали, что $a_n = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, a_1, \ldots, a_{n-1})$; легко убедиться в том, что эта функция дифференцируема.

двугранному углу положительна. Это можно усмотреть, например, из известной формулы сферической тригонометрии

$$\cos a_n = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

в силу которой

$$\frac{\partial a_n}{\partial \alpha} = \sin b \quad \sin c \, \frac{\sin \alpha}{\sin a_n} > 0, \tag{2}$$

потому что углы b, c, a_n, очевидно, $< \pi$ и > 0, и $0 < \alpha < \pi$, так как ребро r не лежит на той же старой грани, на которой лежит угол a_n.

Из (1) и (2) следует:

$$\frac{\partial a_n}{\partial \alpha_i} > 0,$$

что и требовалось доказать.

Напомним, что мы называем переменную $x(t)$ стационарной, если при $t = 0$ её производная по t равна нулю.

Лемма 2. *Если между соседними рёбрами p и q выпуклого многогранного угла имеются новые рёбра, и плоские углы, на которые они разбивают грань между p и q, оказываются при деформации стационарными, то стационарным оказывается также угол между рёбрами p и q.*

Доказательство. Пусть между рёбрами p и q имеются новые рёбра $r_1, \ldots, r_m$. Возьмём на всех рёбрах p, q, $r_1, \ldots, r_m$ точки P, Q, $R_1, \ldots, R_m$, находящиеся от вершины многогранного угла O на постоянных расстояниях. Тогда между рёбрами p и q мы получаем грань V с вершинами O, P, $R_1, \ldots, R_m$, Q.

Перемещение рёбер p, q, $r_1, \ldots, r_m$ можно, конечно, рассматривать как вызванное движением точек P, Q, $R_1, \ldots, R_m$. Тогда грань V ломается вследствие смещения этих точек. В треугольниках OPR_1, OR_1R_2 и т. д. стороны $OP, OR_1, \ldots$ постоянны, а углы между ними по условию леммы стационарны. Поэтому на грани V расстояние между точками P и Q также будут стационарным [1]). Но по лемме 2 предыдущего параграфа пространственное расстояние между точками P и Q отличается от расстояния между ними на грани V на величину второго порядка малости. Следовательно, пространственное расстояние между P и Q также стационарно.

Теперь в треугольнике OPQ стороны OP и OQ постоянны, а сторона PQ стационарна. Следовательно, стационарным будет также угол противолежащий стороне PQ, т. е. угол между рёбрами p и q, что и требовалось доказать.

Пусть выпуклый многогранный угол деформируется, причём допускается наличие новых рёбер. Будем ставить на ребре знак плюс, если двугранный угол при нём возрастает со скоростью, отличной от нуля, и знак минус, если двугранный угол при нём убывает со скоростью, отличной от нуля. Эти рёбра мы будем называть отмеченными. Остальные рёбра, при которых двугранные углы стационарны, будут неотмеченными. Это условие о расстановке знаков на рёбрах будет использоваться нами также в следующем параграфе и его следует поэтому запомнить. Так как, при деформации, грани ломаются по новым рёбрам, то угол при новом ребре может только убывать, поскольку мы рассматриваем деформации, приводящие к выпуклым многогранным углам, когда эти рёбра могут двигаться только наружу. Поэтому новые рёбра могут иметь только знак минус.

---

[1]) Из стационарности сторон и заключённых между ними углов следует стационарность остальных сторон и углов треугольников OPR_1, OR_1R_2 и т. д., т. е. стационарность всех сторон и углов развёрнутой на плоскость грани V, составленной из этих треугольников. Но если в многоугольнике все стороны и углы стационарны, то и все его диагонали стационарны. Следовательно, в частности, стационарна диагональ PQ. Она только переламывается, но длина её постоянна с точностью до величин второго порядка.

Здесь мы докажем следующую важную лемму:

Лемма 3. *Пусть все плоские углы деформирующегося выпуклого многогранного угла стационарны. Расставив на его рёбрах знаки согласно только что указанному условию, исследуем перемены знаков при обходе вокруг вершины многогранного угла. Здесь возможны только следующие три случая:*

1. *Число перемен знаков равно нулю, и тогда вовсе нет отмеченных рёбер, т. е, все двугранные углы стационарны.*

2. *Число перемен знаков не меньше четырёх.*

3. *Число перемен знаков равно двум. Тогда все старые рёбра, кроме каких-либо двух соседних p и q, оказываются неотмеченными. На рёбрах p и q стоят плюсы. Между рёбрами p и q имеются новые рёбра, отмеченные знаком минус. Все остальные новые рёбра остаются неотмеченными. Иными словами, только грань между p и q ломается со скоростью, отличной от нуля, и углы при p и q возрастают, а все остальные грани не ломаются и углы между ними остаются стационарными*[1]).

Доказательство. Докажем, что при отсутствии перемен знаков вовсе не будет отмеченных рёбер. Действительно, если перемен знаков нет, то все отмеченные рёбра должны иметь один знак, скажем, знак плюс. Возьмём тогда любой из старых плоских углов, лежащий против хотя бы одного из отмеченных рёбер. Пусть этот плоский угол будет a. Так как все плоские углы стационарны, то по лемме 2 угла a также стационарен, т. е. $da = 0$, хотя этот угол и может ломаться, если на нём появляются новые рёбра. Угол a есть функция всех остальных плоских углов и противолежащих ему двугранных углов. Но так как все плоские углы стационарны, а все двугранные углы, кроме отмеченных плюсами углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ тоже стационарны, т. е. их дифференциалы равны нулю, то

$$da = \frac{\partial a}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial a}{\partial \alpha_n} d\alpha_m.$$

Так как все отмеченные рёбра имеют один знак плюс, то все $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m > 0$. По лемме 1 все производные $\frac{\partial a}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial a}{\partial \alpha_m}$ также больше нуля. Поэтому $da > 0$, что, однако, противоречит доказанной стационарности угла a.

Таким образом, первый случай, указанный в лемме, рассмотрен; и если отмеченные рёбра имеются, то имеются и перемены знаков. Перемен знаков может быть только чётное число, так как каждая последовательность плюсов имеет два конца, на которых происходят перемены знаков. Число перемен знаков равно, следовательно, удвоенному числу последовательностей плюсов (или минусов). Поэтому, если перемен знаков не две, то их не меньше четырёх. Отсюда следует, что второй случай, указанный в лемме, можно оставить, и тогда остаётся рассмотреть только случай двух перемен знаков. Итак, пусть имеется ровно две перемены знака. Так как на новых рёбрах могут стоять только минусы, то должны иметься старые рёбра, отмеченные плюсами.

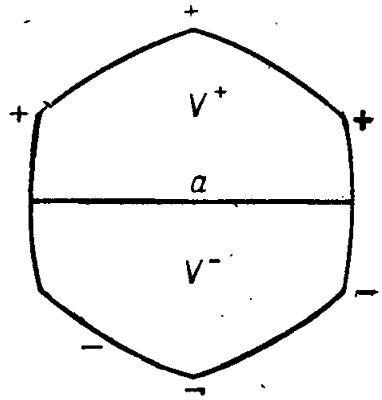
Тут априори имеются только две возможности:

1) На всех отмеченных старых рёбрах стоят плюсы.

2) Имеются старые рёбра, отмеченные минусами.

[1]) Первый случай имеет место, например, тогда, когда многогранный угол вовсе не деформируется. Второй случай проще всего получить, деформируя четырёхгранный угол, сохраняя его грани неизменными. Третий случай проще всего видеть на следующем примере. Возьмём трёхгранный угол с рёбрами p, q, r и проведём из его вершины биссектрису s угла между рёбрами p и q. Будем выдвигать эту биссектрису наружу, сохраняя неизменными углы между нею и рёбрами p и q. Тогда угол при биссектрисе s будет убывать, а углы при рёбрах p и q будут возрастать. Угол при ребре r также будет убывать, но скорость его убывания в начальный момент будет равна нулю, т. е. этот угол будет стационарным. Действительно, по лемме 2 угол между рёбрами p и q будет стационарным, а потому противолежащий двугранный угол также стационарен-

Покажем, что вторая возможность исключается. Так как мы имеем только две перемены знаков, то имеются только одна последовательность рёбер с плюсами и одна последовательность рёбер с минусами. Пусть переход от плюса к минусу происходит на грани P, а обратный переход — на грани Q. Проведём через вершину многогранного угла плоскость R, делящую пополам углы на этих гранях. Так как среди рёбер, отмеченных как плюсами, так и минусами, имеются старые рёбра, то плоскость R проходит между ними внутри нашего многогранного угла и разбивает его на два: V^+ и V^-. Многогранный угол V^+ содержит все рёбра, отмеченные плюсами, а угол V^- — все рёбра, отмеченные минусами (см. черт. 57, где многогранный угол заменён сферическим многоугольником). По условию, все плоские углы этих многогранных углов, кроме их общего угла a на плоскости R, являются стационарными. В угле V^+ все двугранные углы α_i при отмеченных рёбрах имеют положительные дифференциалы $d\alpha_i > 0$. И так как по лемме 1 $\frac{\partial a}{\partial \alpha_i} > 0$, то и $da > 0$. Однако, в угле V^- все двугранные углы α_i имеют отрицательные дифференциалы $d\alpha_i < 0$ и потому должно быть $da < 0$. Получается противоречие, которое показывает невозможность второго случая, т. е. невозможность существования старых рёбер, отмеченных минусами.



Черт. 57.

Пусть теперь все отмеченные старые рёбра имеют знак плюс. Тогда должны иметься новые рёбра, отмеченные знаком минус. Покажем, что такие новые рёбра содержатся только на одной старой грани.

Действительно, если допустить противное, то последовательность отмеченных минусами рёбер будет разделяться на части: каждая часть будет состоять из новых рёбер, лежащих на одной и той же старой грани, причём части будут разделены старыми рёбрами. Эти старые рёбра будут неотмеченными, так как минусы на старых рёбрах не могут стоять по условию, а плюсы — вследствие наличия только двух перемен знака. Проведём опять плоскость R через биссектрисы тех граней, на которых происходит переход от одного знака к другому. Эта плоскость пройдёт внутри нашего многогранного угла, потому что она должна разделить старые рёбра с плюсами от тех, которые лежат внутри последовательности новых рёбер с минусами. Плоскость R разбивает наш многогранный угол на два: V^+ и V^-; V^+ содержит только рёбра с плюсами, а V^- — только рёбра с минусами. Поэтому, так же как в только что рассмотренном случае, угол a на плоскости R должен в V^+ иметь положительный дифференциал, а в V^- — отрицательный. Но это представляет противоречие, и потому новые рёбра с минусами могут лежать только на одной старой грани.

Пусть они лежат на старой грани между старыми её рёбрами p и q. Покажем, что ни на каких старых рёбрах, кроме p и q, не могут стоять плюсы. Допустим противное и пусть плюсы стоят на старых рёбрах $r_1, \ldots, r_m$. По лемме 2 плоский угол a между p и q будет стационарным, и если провести непереламывающуюся грань через эти рёбра, то мы опять получим многогранный угол со стационарными плоскими углами [1]). Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — двугранные углы при рёбрах $r_1, \ldots, r_m$, то по нашему допущению $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_m > 0$. А так как по лемме 1 $\frac{\partial a}{\partial \alpha_i} > 0$, то $da > 0$. Это, однако, противоречит только что

[1]) Т. е. мы рассматриваем вместо данной деформации многогранного угла другую его деформацию, при которой рёбра p и q движутся точно так же, как при данной, но новых рёбер между ними не появляется вовсе. Это и значит, что мы проводим между p и q непереламывающуюся грань.

установленной стационарности угла a, и потому ни на каких старых рёбрах кроме p и q не могут стоять плюсы.

Теперь, чтобы покончить с доказательством последнего утверждения нашей леммы, остаётся лишь показать, что на обоих рёбрах p и q стоят плюсы. На одном из них плюс должен быть, так как иначе вовсе не было бы перемен знака. Допустим, что плюс стоит только на ребре p. Проведём тогда плоскость R через биссектрисы граней, сходящихся в ребре p.

Эта плоскость отделит ребро p от остальных и, следовательно, опять таки разобьёт многогранный угол на два: V^+ и V^-, один с ребром p, отмеченным плюсом, другой с рёбрами, отмеченными только минусами. Повторяя рассуждение, применённое нами уже дважды, мы получим, что угол на плоскости R должен иметь в V^+ и V^- дифференциалы разных знаков, что невозможно, так как этот угол — один и тот же в обоих этих многогранных углах. Получающееся противоречие показывает, что на одном ребре p плюс стоять не может. Таким образом мы доказали, что если имеются только две перемены знака, то 1) новые углы, отмеченные минусами, могут быть только на одной старой грани, 2) только рёбра этой старой грани могут быть отмечены плюсами, и 3) оба они отмечены плюсами. Тем самым доказательство нашей леммы полностью завершено.

§ 5. Теорема о жёсткости.

Теперь мы докажем теорему о жёсткости невырожденного замкнутого выпуклого многогранника.

Теорема: *Если замкнутый выпуклый многогранник, не вырожденный в многоугольник, деформируется вследствие смещения вершин так, что длины рёбер какой-нибудь его развёртки стационарны, то при исключённом движении многогранника как твёрдого тела, все его вершины также стационарны, т. е. в начальный момент скорости их равны нулю.* При этом речь идёт о развёртке, вершины которой совпадают с вершинами многогранника.

Доказательство. Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник, не вырожденный в многоугольник, и R — его развёртка, не имеющая других вершин, помимо вершин многогранника. Допустим, что его вершины смещаются с изменением параметра t так, что в каждый момент координаты вершин меняются с определёнными скоростями. Тогда в силу леммы 3 § 3 длины рёбер его развёртки R также меняются с определёнными скоростями. Значению $t=0$ соответствует первоначальное положение вершин многогранника и, по условию, при $t=0$ скорости изменения длин рёбер развёртки R равны нулю.

Даже при сколь угодно малых деформациях грани многогранника P могут переламываться разными способами. Но мы рассмотрим только какой-нибудь один из этих возможных способов и, соответственно, только те значения t, при которых грани переламываются одним и тем же образом; остальные значения t мы исключим из рассмотрения. Тогда на многограннике P будут возникать определённые новые грани, если вообще старые грани как-то переламываются. Если эти новые грани — не треугольные, то их можно ещё разбить на треугольники посредством диагоналей, и тогда мы можем считать, что многогранник P состоит сплошь из треугольных граней, которые уже не переламываются при деформации, а только меняют свою форму и поворачиваются.

Таким образом мы получили на многограннике P некоторую его естественную развёртку S. В силу леммы 5 § 1 длины s_i рёбер этой развёртки являются дифференцируемыми функциями длин рёбер развёртки R. Поэтому $ds_i = \sum\limits_i \frac{\partial s_i}{\partial r_j}\, dr_j$, и при всех $dr_j = 0$ также все $ds_i = 0$, т. е. при стационарности длин рёбер развёртки R длины рёбер развёртки S также стационарны. Поэтому в дальнейшем мы вовсе исключим из рассмотрения развёртку R, а будем иметь дело только с естественной развёрткой S.

Для того чтобы доказать стационарность вершин многогранника P, мы воспользуемся следующей общей леммой:

Лемма. *Пусть какой-нибудь многогранник Q (не обязательно замкнутый и выпуклый), составленный из треугольных граней, деформируется так, что* 1) *грани его не ломаются,* 2) *длины рёбер стационарны,* 3) *углы между гранями, смежными по рёбрам, также стационарны.* Тогда при исключённом движении все вершины многогранника Q также стационарны.

Для того чтобы исключить движение, мы берём какую-нибудь грань ABC и закрепляем положение вершины A, направление ребра AB и положение плоскости грани ABC. Тогда движение многогранника Q как твёрдого тела становится невозможным.

Так как вершина A закреплена, а направление ребра AB неизменно, то вершина B может двигаться только в направлении этого ребра. Если бы при этом её скорость была отлична от нуля, то длина ребра AB тоже менялась бы со скоростью, отличной от нуля. Однако, эта длина стационарна и, следовательно, вершина B стационарна.

Так как плоскость ABC неподвижна, то составляющая скорости движения вершины C, перпендикулярная этой плоскости, равна нулю. Длины рёбер AC и BC и вершины A и B стационарны. Поэтому составляющие скорости вершины C в направлениях этих рёбер равны нулю. Следовательно, вершина C стационарна.

Возьмём теперь какую-нибудь грань, смежную с гранью ABC по ребру. Пусть это будет грань BCD. Так как угол между гранями ABC и BCD стационарен и вершины B и C стационарны, то плоскость грани BCD стационарна. Поэтому составляющая скорости вершины D, перпендикулярная этой плоскости, равна нулю. Далее, длины рёбер BD и CD и вершины B и C стационарны. Поэтому составляющие скорости вершины D в направлении этих рёбер тоже равны нулю и, следовательно, вершина D стационарна. Переходя таким образом от одной грани к смежным и повторяя те же рассуждения, мы убедимся, что все вершины многогранника Q стационарны, и лемма доказана.

Теперь мы можем обратиться непосредственно к доказательству теоремы о жёсткости. При этом, в силу сделанного вначале замечания, мы можем считать, что многогранник P состоит из треугольных граней, не переламывающихся при деформации, и что длины всех рёбер многогранника P стационарны. Теорему о жёсткости мы докажем индукцией по числу вершин многогранника.

Для тетраэдра теорема очевидна. Действительно, пусть $ABCD$ — тетраэдр, не вырожденный в четыреугольник. Если исключить движение, закрепив его вершину A, направление ребра AB и плоскость грани ABC, то, повторяя рассуждения, проведённые только что при доказательстве леммы, мы убедимся в том, что вершины B и C должны быть стационарными.

Так как вершины A, B, C и длины рёбер AD, BD и CD стационарны, то составляющие скорости вершины D в направлении этих рёбер должны равняться нулю. Тетраэдр $ABCD$ — не вырожденный, и потому направления этих рёбер некомпланарны; следовательно, скорость вершины D равна нулю, так что все вершины тетраэдра оказываются стационарными.

Предположим теперь, что теорема о жёсткости верна для всех невырожденных замкнутых выпуклых многогранников с числом вершин на единицу меньшим, чем у многогранника P, предполагая, конечно, что число вершин многогранника P больше четырёх. Допустим, однако, что для самого многогранника P теорема о жёсткости неверна, т. е., хотя длины всех его рёбер стационарны и движение исключено, тем не менее не все его вершины стационарны. Если бы при этом все двугранные углы многогранника P были стационарны, то из доказанной нами леммы вытекала бы стационарность вершин. Поэтому мы должны предположить, что не все двугранные углы многогранника P стационарны.

Следуя правилу, введённому в предыдущем параграфе, отметим каждое ребро знаком плюс или минус, в зависимости от знака скорости изменения двугранного угла при этом ребре; если скорость равна нулю, то ребро остаётся неотмеченным.

Допустим сначала, что к каждой вершине многогранника P подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда, согласно лемме 3 предыдущего параграфа, при обходе каждой вершины многогранника P мы будем иметь либо не менее четырёх перемен знака, либо только две перемены знака и, в этом последнем случае, знаки плюс будут стоять только на двух соседних старых рёбрах, а знаки минус — только на новых рёбрах, расположенных между ними. Следовательно, к вершине, где имеются всего две перемены знака, подходят ещё неотмеченные рёбра. Если все неотмеченные рёбра мы отметим знаком минус, то число перемен знака вокруг такой вершины станет также не меньше четырёх. Число же перемен знака вокруг вершин, где этих перемен было уже не менее четырёх, очевидно, не уменьшится. Следовательно, мы получаем такое расположение знаков на рёбрах многогранника, что 1) все рёбра отмечены, 2) вокруг каждой вершины имеется не меньше четырёх перемен знака.

Если число вершин многогранника равно e, то общее число перемен знаков N будет не меньше $4e$:

$$N \geqslant 4e. \tag{1}$$

То же число перемен знаков можно оценить и другим способом.

Именно, мы будем подсчитывать число перемен знаков при обходе граней. Если два ребра p и q, сходящиеся в одной вершине, оказываются соседними при обходе вокруг этой вершины, то они будут соседними также при обходе грани, и обратно. Поэтому число перемен знака при обходе всех граней многогранника будет то же самое N. По введённому нами условию, все грани многогранника P — треугольные. Поэтому при обходе вокруг одной грани не может быть двух перемен знака, и если общее число граней равно f, то

$$N \leqslant 2f. \tag{2}$$

Если k — число рёбер, то $3f = 2k$, так как каждая грань имеет три ребра, и каждое ребро — общее у двух граней. По теореме Эйлера $f - k + e = 2$. Умножая это равенство на 2 и подставляя $2k = 3f$, мы получим, что $f = 2e - 4$, или

$$2f = 4e - 8. \tag{3}$$

Поэтому, вместо (2), можно написать, что

$$N \leqslant 4e - 8.$$

Но это неравенство противоречит неравенству (1). Поэтому наше предположение о том, что к каждой вершине многогранника подходит хотя бы одно отмеченное ребро, неверно.

Остаётся допустить, что хотя бы к одной вершине O не подходит ни одно отмеченное ребро. Это значит, что все двугранные углы, встречающиеся в этой вершине, стационарны.

Грани, сходящиеся в вершине O, образуют некоторый многогранник P_0, а остальные грани — многогранник P_1. Оба многогранника — незамкнутые и образуют в сумме данный многогранник P:

$$P = P_0 + P_1.$$

Длины рёбер и двугранные углы многогранника P_0 стационарны. Поэтому, если исключить движение, то, в силу доказанной нами леммы, все вершины многогранника P_0 оказываются стационарными. Если сам многогранник P не имеет других вершин помимо принадлежащих P_0, то его жёсткость оказывается тем самым доказанной. Допустим, поэтому, что многогранник P имеет ещё другие вершины, не принадлежащие многограннику P_0. Исключим вершину O и построим выпуклую оболочку всех остальных вершин многогранника P; её граница будет некоторым выпуклым многогранником P^*. Этот многогранник — не вырожденный. Действительно, если бы он был вырожденным, то это значило бы, что все вершины многогранника P, за исключением вершины O, лежат в одной плоскости, так что многогранник P представляет собой пирамиду с вершиной O. Но все вершины пирамиды принадлежат её боковым граням, т. е. граням, сходящимся в O; а по предположению не все вершины многогранника P принадлежат этим граням. Следовательно, многогранник P^* — не вырожденный.

Пусть Q — какая-нибудь грань многогранника P, не содержащая вершины O. Тогда все её вершины принадлежат многограннику P^*, и вместе с тем плоскость этой грани является опорной к P и тем более к P^*. Поэтому грань Q является вместе с тем гранью многогранника P^*. Все такие грани многогранника P, не содержащие вершины O, образуют многогранник P_1 и, следовательно, P_1 есть часть многогранника P^*. Остальную часть многогранника P^* мы обозначим через P_0^*, так что

$$P^* = P_0^* + P_1.$$

С другой стороны,

$$P = P_0 + P_1,$$

и все вершины многогранника P, не принадлежащие P_0, лежат внутри P_1 Поэтому вершинами части P_0^* многогранника P^* могут быть только вершины, принадлежащие P_0. Часть P_0^* многогранника P^* мы считаем составленной из треугольных граней.

Мы установили выше, что все вершины многогранника P_0 стационарны. Поэтому расстояния между ними стационарны, т. е. стационарны все рёбра многогранника P^*, принадлежащие его части P_0^*. Все остальные рёбра многогранника P^* принадлежат P_1, т. е. являются рёбрами многогранника P, а потому длины их стационарны. Следовательно, длины всех рёбер многогранника P^* стационарны. Кроме того, все вершины, принадлежащие P_0^*, стационарны, и потому, во всяком случае, в начальный момент, движение многогранника P^* исключено. Далее, многогранник P^* — не вырожденный и имеет на одну вершину меньше, чем P. Поэтому, согласно предположению индукции, к нему приложима теорема о жёсткости, и все его вершины оказываются стационарными. Но эти и суть все вершины многогранника P, кроме вершины O, которая, однако, также стационарна, так как принадлежит P_0. Следовательно, все вершины многогранника P стационарны, и теорема о жёсткости доказана.

§ 6. Реализуемость метрик, близких к реализованным.

В этом и следующих параграфах, если не оговорено противное, слово «метрика» всегда будет обозначать многогранную метрику положительной кривизны с данным числом вершин $e > 3$, заданную на сфере. Метрики, которые можно реализовать, но притом только посредством вырожденных многогранников, будут играть особую роль. Их мы называем вырожденными метриками. Все рассматриваемые развёртки, если не будет оговорено противное, предполагаются не имеющими лишних вершин с полными углами, равными 2π.

Из теоремы о жёсткости вытекает следующая лемма, которая служит основой доказательства существования многогранника с данной метрикой:

Лемма 1. *Метрики, достаточно близкие к реализуемой невырожденной метрике, реализуемы, т. е., если из развёртки R_0 можно склеить* *замкнутый выпуклый многогранник, не вырождающийся в многоугольник, то из всякой развёртки R, имеющей то же строение и имеющей длины рёбер, достаточно близкие к длинам рёбер развёртки R_0, также можно склеить замкнутый выпуклый многогранник.*

Доказательство. Пусть P_0 — многогранник, склеенный из развёрти R_0. Помещая одну его вершину в начало координат, другую на оси x и третью на плоскости $z=0$, мы закрепляем тем самым шесть координат вершин. Если многогранник P_0 имеет e вершин, то остаётся всего $3e-6$ переменных координат. Если число рёбер развёртки R_0 равно k, то, как было показано в § 1,

$$k=3e-6.$$

Если деформировать многогранник путём малого смещения его вершины, то, в силу леммы 1 § 3, получающиеся при этом многогранники будут допускать развёртки того же строения, что и развёртка R_0. Мы будем иметь, следовательно, k переменных координат вершин

$$p_1, p_2, \ldots, p_k$$

и k переменных длин рёбер развёртки

$$r_1, r_2, \ldots, r_k.$$

Пусть $p_1^0, \ldots, p_k^0$ и $r_1^0, \ldots, r_k^0$ — значения этих переменных для многогранника P_0. В малой окрестности значений $p_1^0, \ldots, p_k^0$ переменные $p_1, \ldots, p_k$ могут принимать произвольные значения, а, в силу леммы 3 § 3, длины рёбер развёртки будут являться однозначными и дифференцируемыми их функциями:

$$\left.\begin{array}{l} r_1=f_1(p_1, \ldots, p_k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_k=f_k(p_1, \ldots, p_k). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Дифференцируя эти равенства, мы получаем, что

$$\left.\begin{array}{l} dr_1=\frac{\partial f_1}{\partial p_1}dp_1+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial p_k}dp_k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dr_k=\frac{\partial f_k}{\partial p_1}dp_1+\ldots+\frac{\partial f_k}{\partial p_k}dp_k. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

В силу теоремы о жёсткости при $dr_1=dr_2=\ldots=dr_k=0$ также $dp_1=dp_2=\ldots=dp_k=0$. Иными словами, система уравнений (2) относительно дифференциалов dp_i, если свободные члены равны нулю, не допускает никаких решений, кроме тривиального. Отсюда, как известно, следует, что определитель этой системы отличен от нуля. Этот определитель есть якобиан системы функций (1). Вместе с тем, при значениях $p_1^0, \ldots, p_k^0$ и $r_1^0, \ldots, r_k^0$ уравнения (1) удовлетворяются. Поэтому, в силу известной теоремы о системе неявных функций, уравнения (1) можно разрешить относительно переменных $p_1, \ldots, p_k$ в окрестности значений $r_1^0, \ldots, r_k^0$ $p_1^0, \ldots, p_k^0$:

$$\left.\begin{array}{l} p_1=g_1(r_1, \ldots, r_k), \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_k=g_k(r_1, \ldots, r_k). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Написанные равенства означают, что длины рёбер развёртки можно произвольно изменять в окрестности их значений $r_1^0, \ldots, r_k^0$, причём каждый раз мы будем получать соответствующие значения координат вершин.

Это будут координаты вершин некоторого выпуклого многогранника P, если все p_i близки к p_i^0 [1]). Так как система (3) обратна системе (1), то многогранник P имеет развёртку данного строения с длинами рёбер, близкими к длинам рёбер развёртки R_0 данного многогранника P_0. Тем самым лемма доказана.

Докажем ещё другую лемму, нужную для доказательства существования многогранника с данной метрикой:

Лемма 2. *Пусть метрики ρ_n, реализованные многогранниками P_n, сходятся к некоторой метрике ρ. Тогда из многогранников P_n можно выбрать последовательность, сходящуюся к многограннику, реализующему метрику ρ.*

Доказательство. По принятому в § 1 определению сходимости метрик, метрики ρ_n и ρ можно задать развёртками R_n, R одинакового строения так, что длины рёбер развёрток R_n сходятся к длинам соответствующих рёбер развёртки R.

В лемме рассматриваются многогранники с точностью до движения, потому что иначе лемма неверна: мы могли бы взять многогранники P_n удаляющимися в бесконечность. В связи с этим можно предположить, что все многогранники P_n проходят через данную точку. Расстояние любой пары вершин многогранника P_n друг от друга заведомо не больше суммы длин всех рёбер его развёртки R_n. Так как длины рёбер сходятся, то суммы их ограничены и, следовательно, все многогранники P_n оказываются заключёнными в некотором шаре.

Отметим одинаковыми номерами соответствующие друг другу вершины развёрток R_n. Тогда вершины каждого из многогранников P_n окажутся также соответственно перенумерованными. Выберем из многогранников P_n последовательность, у которой сходятся первые вершины, потом из этой последовательности выберем другую, у которой сходятся вторые вершины, и т. д. В результате получим последовательность, в которой сходятся все вершины. Для краткости обозначим многогранники этой последовательности также через P_n, а соответствующие развёртки — через R_n. Выпуклый многогранник P, натянутый на пределы вершин (т. е. граница выпуклой оболочки пределов вершин), будет пределом многогранников P_n. Докажем, что он имеет развёртку R.

Для этого докажем сначала, что если какое-либо ребро многогранника P_n не совпадает ни с одним ребром развёртки R_n, то число его пересечений со всеми её рёбрами не может превосходить некоторого N_0, общего для всех рёбер всех многогранников P_n.

Пусть L — верхняя граница длин рёбер многогранников P_n, а h — нижняя граница высот треугольников развёрток R_n ($h > 0$, потому что развёртки R_n сходятся к развёртке R того же строения). Пусть, наконец, m — наибольшее число углов, сходящихся в одной вершине развёртки R_n; m одно и то же для всех R_n, так как они имеют одинаковое строение. Я утверждаю, что можно взять

$$N_0 = \frac{2Lm}{h} + m. \tag{4}$$

Допустим противное. Тогда на некотором многограннике P_n есть ребро a, имеющее с рёбрами развёртки R_n число пересечений

$$N > \frac{2Lm}{h} + m. \tag{5}$$

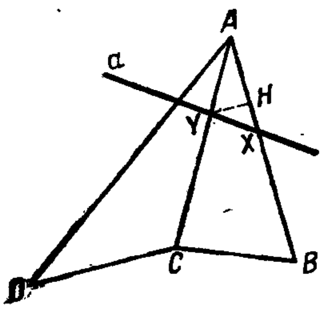
На ребре a m раз подряд встречаются отрезки между точками пересечения, имеющие длины $<\frac{h}{2}$. Иначе на каждые m таких отрезков приходился хотя бы один отрезок длины $\geqslant \frac{h}{2}$, и мы получили бы в сумме длину $\geqslant \left[\frac{N}{m}\right]\frac{h}{2}$ ($\left[\frac{N}{m}\right]$ означает целую часть $\frac{N}{m}$), которая, вследствие неравенства (5), была бы больше L, вопреки тому, что длина ребра a не больше L.

---

[1]) Этот многогранник есть выпуклая оболочка вершин с координатами p_i.

Пусть первый из m идущих подряд отрезков длины $<\frac{h}{2}$ лежит в треугольнике ABC развёртки R_n (черт. 58). Концы его удалены от вершины A меньше, чем на половины сторон AB и AC и, тем самым, лежат ближе к вершине A, чем к вершинам B и C. Иначе этот отрезок XY не был бы меньше половины высоты треугольника ABC. Для того чтобы убедиться в этом, проведём из точки Y перпендикуляр YH к стороне AB; так как $YH \leqslant XY$, то XY только тогда может быть меньше половины высоты, опущенной из вершины C, когда $AY < \frac{1}{2}AC$; аналогичное соображение верно для точки X.

Выйдя из треугольника ABC, ребро a попадает в соседний треугольник ADC, где оно опять имеет отрезок, меньший $\frac{h}{2}$. Поэтому оно и в этом треугольнике проходит ближе к вершине A, чем к другим. Так как мы имеем m таких отрезков кряду, а в вершине A сходится не более m углов, то ребро a, обойдя вокруг вершины A, возвращается к стороне AB и снова её пересекает. Это, однако, невозможно. Действительно, вершина A есть вершина развёртки R_n, а значит также вершина многогранника P_n. Поэтому из неё должно исходить в какую-нибудь другую вершину ребро b многогранника P_n. Это ребро должно будет пересечь a, что невозможно, так как рёбра многогранника встречаются только в вершинах.



Черт. 58.

Этим доказано, что число пересечений любого ребра многогранника P_n с рёбрами развёртки R_n не превосходит N_0, определённого формулой (4). Отсюда ясно, что и обратно никакое ребро развёртки R_n не может пересекать рёбер многогранника P_n более чем некоторое определённое число раз.

Теперь перенумеруем рёбра каждой развёртки R_n, приписав соответственным рёбрам один и тот же номер. Возьмём первые рёбра всех этих развёрток. Если среди них имеется бесконечное число совпадающих с рёбрами многогранников P_n, то можно выбрать такую последовательность P_{n_i}, чтобы эти рёбра сходились. Если же бесконечное число первых рёбер развёрток только пересекает рёбра многогранников P_n, то ввиду конечности числа точек пересечения можно выбрать такую последовательность P_{n_i}, в которой эти точки пересечения сходятся к некоторым предельным положениям. Отрезки между соседними точками пересечения тоже будут сходиться и, следовательно, опять первые рёбра развёрток R_n будут сходиться. Применяя, далее, то же рассуждение ко вторым рёбрам, затем к третьим и т. д., получим в конце концов такую последовательность многогранников P_{nn}, в которой все рёбра развёрток R_{nn} сходятся. Пределы этих рёбер образуют на предельном многограннике P сеть того же строения и разбивают его на треугольники, не содержащие внутри себя вершин многогранника. Этим самым на P оказывается начерченной некоторая развёртка того же строения, что и развёртки R_n, и имеющая длины рёбер, равные пределам длин рёбер этих развёрток. Следовательно, она и будет требуемой развёрткой R.

§ 7. Непрерывный переход от данной метрики к реализуемой.

Согласно плану, изложенному в § 2, для доказательства существования многогранника с данной метрикой нужно показать, что если все метрики с $e-1$ вершиной реализуемы, то всякую метрику ρ_0 с e вершинами можно соединить с реализуемой метрикой ρ_1 таким непрерывным рядом метрик ρ_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, в котором (при всех $t>0$) нет метрик, реализуемых только посредством вырожденных многогранников (такие метрики мы называем вырожденными).

Этот результат мы получим не сразу, а только доказав сначала две леммы, дающие приближение к нему. Дальше, если не оговорено противное, слово «метрика» обозначает метрику с e вершинами ($e > 3$).

Лемма 1. *Каждую метрику ρ_0 можно соединить непрерывным рядом ρ_t с метрикой ρ_1, у которой одна вершина отсутствует; иными словами, при $t \to 1$ полный угол вокруг одной из вершин метрик ρ_t стремится к 2π.*

Доказательство. Допустим сначала, что среди вершин метрики ρ_0 имеются две с суммой кривизн, меньшей 2π. Пусть это будут вершины A_1, A_2; остальные вершины обозначим $A_3, \ldots, A_e$. Пусть ω_1, ω_2 будут кривизны вершин A_1, A_2; по условию $\omega_1 + \omega_2 < 2\pi$.

Проведём кратчайшую A_1A_2 и произведём по ней разрез; метрика задана на сфере, и речь идёт о разрезе этой сферы. Построим на плоскости два равных треугольника $A_1'A_2'A'$ и $A_1''A_2''A''$ с основаниями

$$A_1'A_2' = A_1''A_2'' = A_1A_2$$

и с углами при вершинах A_1', A_1'' и A_2', A_2'', равными соответственно $\frac{\omega_1}{2}$ и $\frac{\omega_2}{2}$. Так как $\omega_1 + \omega_2 < 2\pi$, то такие треугольники существуют. Подклеим наши треугольники их основаниями к обеим сторонам разреза по кратчайшей A_1A_2 так, чтобы вершины A_1', A_1'' совпали с A_1, а вершины A_2', A_2'' — с A_2. Далее склеим друг с другом боковые стороны наших треугольников: $A_1'A'$ с $A_1''A''$ и $A_2'A'$ с $A_2''A''$. В результате произведённый нами разрез A_1A_2 заклеится, и мы получим, следовательно, некоторую метрику ρ_1 на сфере.

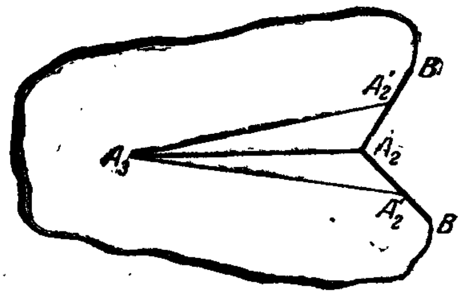
У этой метрики вершины A_1, A_2 отсутствуют. Действительно, подклеивая к этим вершинам углы наших треугольников, мы добавили к полному углу вокруг A_1 угол, равный $2 \cdot \frac{\omega_1}{2} = \omega_1$, а к углу вокруг A_2 — угол, равный $2 \cdot \frac{\omega_2}{2} = \omega_2$, т. е. как раз столько, сколько нехватало им до 2π. Вместе с тем в метрике ρ_1 есть новая вершина A, соответствующая совпавшим вершинам A' и A'' наших треугольников.

Проделанную операцию перехода от исходной метрики ρ_0 к метрике ρ_1, у которой не хватает одной вершины, можно осуществить непрерывно. Для этого возьмём на сторонах $A_2'A'$ и $A_2''A''$ наших треугольников переменные точки X' и X'', равноудалённые от A_2' и A''_2. Заставляя точки X' и X'' непрерывно пробегать стороны $A_2'A'$ и $A_2''A''$ от точек A_2', A_2'' к точкам A', A'', будем заклеивать сделанный нами разрез A_1A_2 треугольниками $A_1'A_2'X'$ и $A_1''A_2''X''$. Так как у этих треугольников углы при вершинах A_2' и A_2'' равны $\frac{\omega_2}{2}$, то вершина A_2 исходной развёртки исчезнет. Её заменит переменная вершина X, соответствующая переменным точкам X', X''. Когда эти точки пробегают стороны $A_2'A'$ и $A_2''A''$ от A_2' и A_2'' до A' и A'', вершина X переходит от A_2 к вершине A конечной метрики ρ_1. Таким путём мы получаем непрерывный ряд метрик ρ_t, соединяющий исходную метрику ρ_0 с метрикой ρ_1.

Легко убедиться в том, что полученный ряд метрик будет действительно непрерывным в смысле принятого нами определения сходимости метрик, данного в § 1. Для этого проведём из вершины A_1 кратчайшие A_1X, $A_1A_3, \ldots, A_1A_e$ во все другие вершины метрики ρ_t. Произведя разрезы по этим кратчайшим, мы получим вместо сферы S многоугольник Q, не содержащий внутри вершин метрики. С непрерывным изменением вершины X стороны и углы этого многоугольника меняются непрерывно. Многоугольник Q можно разбить на треугольники диагоналями, как это было показано ещё в § 1. При непрерывном и достаточно малом изменении его сторон и углов, такое разбиение будет непрерывно меняться. Следовательно, мы получаем развёртку, непрерывное изменение которой осуществляет достаточно малое изменение метрики ρ_t. В согласии с принятым нами определением, это означает, что ряд метрик ρ_t непрерывен.

Мы предполагали, что в метрике ρ_0 имеется пара вершин с суммой кривизн, меньшей 2π. Допустим теперь, что такой пары нет, т. е. что сумма кривизн каждых двух вершин не меньше 2π. В таком случае сумма кривизн двух пар вершин уже не меньше 4π, т. е. не меньше кривизны всей сферы. Следовательно, вершин может быть только четыре, и сумма кривизн каждых двух из них должна равняться 2π, т. е. кривизна каждой вершины должна равняться π.

Соединим вершины A_3 и A_2 кратчайшей A_3A_2 и проведём из вершины A_2 кратчайшую A_2B так, чтобы она образовывала с A_2A_3 равные углы с обеих сторон. Эти углы равны $\frac{\pi}{2}$, потому что полный угол вокруг A_2 равен π. Произведём разрез по A_2B и развернём окрестность кратчайшей A_3A_2 на плоскость (черт. 59). Тогда становится ясным, что любую точку A_2' на A_2B, достаточно близкую к A_2, можно соединить с A_3 двумя равными геодезическими, проходящими с разных сторон от A_3A_2. Вырежем оба треугольника $A_3A_2A_2'$ и склеим обе геодезические друг с другом. Получим новую метрику на сфере, у которой кривизна вершины A_2' будет меньше π (так как полный угол вокруг A_2' больше чем вокруг A_2, как ясно из построения[1])). Поэтому сумма кривизн вершины A_2' и, скажем, A_2 будет меньше 2π.



Черт. 59.

Эта операция вырезания двух треугольников является, очевидно, обратной операции вклеивания двух треугольников, произведённой выше. Её можно осуществить непрерывно путём перемещения точки A_2' от вершины A_2. Тогда получим непрерывный ряд метрик, соединяющий исходную метрику ρ_0 с такой, у которой имеются две вершины с суммой кривизн, меньше 2π. По предыдущему эту последнюю метрику можно соединить непрерывным рядом с метрикой ρ_1, имеющей на одну вершину меньше. Таким образом, получится непрерывный ряд метрик, соединяющий метрику ρ_0 с этой метрикой ρ_1. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если всякая метрика с $e-1$ вершинами реализуема, то всякую метрику с e вершинами можно соединить непрерывным рядом метрик с невырожденной реализуемой метрикой, имеющей также e вершин.*

Доказательство. Пусть ρ_0 — данная метрика с e вершинами. По предыдущей лемме существует непрерывный ряд метрик ρ_t, соединяющий её с метрикой ρ_1, имеющей $e-1$ вершин. Допустим, что метрика ρ_1 реализуема посредством многогранника P_1 и докажем в этом случае следующие два утверждения:

1. Сколь угодно близко к метрике ρ_1 имеются невырожденные реализуемые метрики с e вершинами.

2. Метрику ρ_0 можно соединить с одной из этих метрик непрерывным рядом.

Для доказательства первого утверждения рассмотрим ближе метрику ρ_1, построенную в предыдущей лемме. Она имеет вершины $A_3, \ldots, A_e$, соотвествующие таким же вершинам метрики ρ_0; затем она имеет вершину A, которая заменяет вершину A_2, и ещё в ней можно отметить точку A_1, соответствующую исчезнувшей вершине A_1 метрики ρ_0. Точки $A_3, \ldots, A_e$, A и A_1 суть точки сферы S, на которой задаётся метрика ρ_1. Проведём из точки A кратчайшие AA_1, $AA_3, \ldots, AA_e$ и произведя по ним разрезы превратим сферу S в многоугольник Q. Этот многоугольник мы разобьём диагоналями на треугольники и получим

[1]) См. черт. 59. Полный угол вокруг A_2 равен удвоенному углу при вершине A_2 в треугольнике $A_2A_2'A_3$, а полный угол вокруг A_2' равен удвоенному внешнему углу этого треугольника при вершине A_2'. Внешний же угол больше внутреннего с ним не смежного: отсюда и следует наше утверждение.

таким образом развёртку R_1, задающую метрику ρ_1. Эта развёртка имеет одну лишнюю вершину A_1, не вляющуюся вершиной метрики ρ_1.

Так как многоугольник Q получается разрезыванием сферы S по кратчайшим AA_1, $AA_3, \ldots, AA_e$, то его вершины в порядке их расположения на его границе суть A, A_1, A, $A_3, \ldots, A$, A_e. Таким образом, в частности, «лишняя» вершина метрики A_1 появляется в качестве вершины многоугольника Q только один раз. Поэтому среди диагоналей многоугольника Q не может быть таких, которые представляют на сфере S геодезические (в смысле метрики ρ_1), соединяющие вершину A_1 с ней же самой. Отсюда следует, что в полученной нами развёртке R_1 нет треугольников, у которых две вершины попадали бы в точку A_1. Этим замечанием мы существенно воспользуемся дальше.

Так как многогранник P_1 реализует метрику ρ_1, то на нём можно начертить развёртку R_1. Иными словами, при изометрическом отображении сферы S на многогранник P_1 развёртка R_1 переносится на этот многогранник. Все вершины развёртки R_1, являющиеся вершинами метрики, будут вершинами многогранника P_1. Исключение составляет «лишняя» вершина A_1 нашей развёртки: так как полный угол вокруг неё равен 2π, то на многограннике P ей будет соответствовать какая-то точка $\overline{A}_1$, лежащая внутри его грани или ребра.

Если эту точку выдвинуть с многогранника P_1 наружу, то, построив выпуклую оболочку этой смещённой точки и вершин многогранника P_1, мы получим новый выпуклый многогранник P. При достаточно малом смещении точки $\overline{A}_1$ вершины многогранника P_1 останутся вершинами, а точка $\overline{A}_1$ тоже станет вершиной. Следовательно, многогранник P будет иметь e вершин. Если многогранник P_1 вырождался в многоугольник, то достаточно точку $\overline{A}_1$ вывести из его плоскости, и многогранник P уже не будет вырожденным.

Если смещение точки $\overline{A}_1$ достаточно мало, то согласно доказанному в § 3, на многограннике P_1 можно построить развёртку того же строения, что и R_1, имеющую длины рёбер, близкие к длинам соответствующих рёбер развёртки R_1 [1]). Следовательно, мы получаем развёртку R, близкую к R_1, и так как все её вершины суть вершины многогранника P, то вокруг каждой из них полный угол $< 2\pi$. Это значит, что *сколь угодно близко к метрике ρ_1 имеются реализуемые метрики с e вершинами.*

Покажем теперь, что *исходную метрику ρ_0 можно соединить с одной из таких метрик.* Для этого воспользуемся опять развёрткой R_1. Сохраняя её строение, будем, в некоторых пределах, менять длины её рёбер. В результате получим множество развёрток R, близких к R_1. Если число рёбер развёртки обозначить через k, то каждая развёртка R определяется заданием k длин рёбер $r_1, \ldots, r_k$. Поэтому полученное множество развёрток можно представить в виде некоторой области G в k-мерном пространстве с координатами $r_1, \ldots, r_k$. Связь между развёртками R и точками области G будет взаимно однозначной и непрерывной. Поэтому для нас будет безразлично, говорить ли о точках области G или о развёртках R.

Так как в развёртке R_1 полный угол вокруг вершины A_1 равен 2π, то при сколь угодно малом изменении длин рёбер он может становиться больше 2π. Следовательно, в области G могут быть также развёртки R, т. е. точки, соответствующие развёрткам R, у которых полный угол вокруг вершины A_1 больше 2π. Вследствие непрерывной зависимости угла от длин рёбер, полные углы вокруг всех других вершин остаются меньше 2π, если изменения длин рёбер достаточно малы.

Развёртки с полным углом вокруг вершин A_1, большим 2π, назовём развёртками «второго рода», в отличие от развёрток «первого рода», у которых

---

1) В § 3 речь шла о развёртках, все вершины которых лежат в вершинах многогранника; теперь дело обстоит не так, но легко видеть, что это не нарушает правильности леммы 1 § 3 и её доказательства.

полные углы вокруг всех точек меньше 2π. Развёртки — точки второго рода, отделены от развёрток — точек первого рода, гиперповерхностью Φ, определяемой уравнением

$$\sum_i \varphi_i(r_1, \ldots, r_k) = 2\pi, \tag{1}$$

где $\varphi_i(r_1, \ldots, r_k)$ суть углы треугольников развёртки R, сходящиеся в вершине A_1, представленные как функции длин рёбер $r_1, \ldots, r_k$ (конечно, каждое φ_i зависит только от трёх рёбер, образующих стороны соответствующего треугольника). Сумма всех φ_i есть полный угол вокруг точки A_1.

Возьмём какой-нибудь треугольник из развёртки R, подходящий одной из своих вершин к точке A_1. Пусть φ_1 — угол этого треугольника при вершине A_1, а r_1, r_2, r_3 — его стороны, причём углу φ_1 противолежит сторона r_1. Выше было отмечено, что в развёртке R нет треугольников, у которых две вершины попадали бы в точку A_1. Поэтому ребро r_1 развёртки R не может быть прилежащим к точке A_1 ни в каком треугольнике.

По обобщённой теореме Пифагора

$$r_1^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 r_3 \cos\varphi_1,$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_1} = \frac{r_1}{r_2 r_3 \sin\varphi_1} > 0.$$

Ребро r_1 может быть противолежащим вершине A_1 ещё в каком-нибудь другом треугольнике, с углом φ_i и тогда точно так же $\frac{\partial\varphi_i}{\partial r_1} > 0$. Прилегающим же к вершине A_1 оно нигде быть не может. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \sum_i \varphi_i(r_1, \ldots, r_k) > 0. \tag{2}$$

Отсюда на основании известной теоремы о неявных функциях следует, что если уравнение (1) удовлетворяется для некоторых значений длин рёбер, то в окрестности этих значений его можно разрешить относительно r_1, причём r_1 окажется однозначной и дифференцируемой функцией остальных рёбер. Это означает, что гиперповерхность Φ можно задать уравнением вида

$$r_1 = f(r_2, \ldots, r_k),$$

где f — дифференцируемая функция. Следовательно, гиперповерхность Φ — гладкая и разбивает область G на две части. Так как на гиперповерхности Φ выполняется неравенство (2) и кроме того на ней $\sum_i \varphi_i = 2\pi$, то по одну сторону от неё

$$\sum_i \varphi_i < 2\pi,$$

а по другую сторону

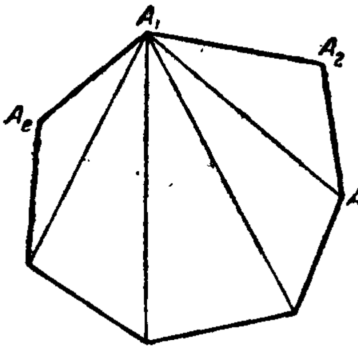
$$\sum_i \varphi_i > 2\pi.$$

Точки, лежащие с одной стороны от Φ, можно соединить друг с другом непрерывной кривой, не пересекая Φ. В переводе на язык развёрток это означает, что каждые две развёртки первого рода, т. е. такие, для которых $\sum_i \varphi_i < 2\pi$, можно соединить непрерывным рядом таких же развёрток при том очевидном условии, что эти развёртки берутся достаточно близко к развёртке R_1. Но среди этих развёрток имеется, во-первых, развёртка R, реализованная многогранником P и, во-вторых, среди них имеются также развёртки R_t, задающие те метрики ρ_t, которые образуют непрерывный ряд, соединяющий нашу исходную метрику ρ_0 с метрикой ρ_1. Соединяя одну из таких развёрток R_t с развёрткой R, мы получим поэтому непрерывный ряд метрик, соединяющих метрику ρ_0 с метрикой, определяемой развёрткой R. И так как эта метрика реализована невырожденным многогранником P, то наша лемма доказана.

Полученный результат ещё недостаточен, потому что в ряду метрик ρ_t, соединяющих ρ_0 с реализуемой метрикой, могут встречаться вырожденные метрики. Самую метрику ρ_0 можно считать невырожденной. Действительно, наша конечная цель состоит в том, чтобы доказать реализуемость метрики ρ_0. А если она вырожденная, то, по определению, её можно реализовать посредством вырожденного многогранника, так что в этом случае доказывать, собственно говоря, нечего. Итак, докажем последнюю и окончательную лемму о соединимости данной метрики с реализуемой:

Лемма 3. *Если всякая метрика с $e-1$ вершинами реализуема, то всякую невырожденную метрику ρ_0 с e вершинами можно соединить с реализуемой метрикой, имеющей также e вершин, таким непрерывным рядом метрик с e вершинами, в котором нет вырожденных метрик.*

Для доказательства рассмотрим сначала вырожденные метрики. Пусть вырожденная метрика ρ реализована многогранником P, представляющим собою дважды покрытый выпуклый многоугольник с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_e$, перенумерованными в порядке их расположения на границе многоугольника (черт. 60). Разобьём этот многоугольник на треугольники диагоналями, проходящими из вершины A_1. Если считать каждую диагональ проведённой на обеих сторонах многоугольника, то мы получим развёртку R многогранника P, которую естественно назвать симметричной. Она обладает следующими свойствами:



Черт. 60.

1. Развёртка R состоит из попарно равных треугольников, склеенных друг с другом по рёбрам $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_eA_1$. Эти рёбра естественно назвать внешними; число их равно числу вершин e. Эти рёбра суть единственные кратчайшие, соединяющие последовательно A_1 с A_2, A_2 с A_3 и т. д.

2. Так как общее число рёбер $k=3e-6$, то остаётся ещё $2e-6$ рёбер, которые распадаются на две совокупности по $e-3$ рёбер в каждой. Рёбра одной совокупности лежат на одной стороне многогранника P, рёбра другой совокупности — на другой его стороне. Каждому ребру A_1A_i одной совокупности соответствует равное ему ребро другой совокупности, соединяющее вершину A_1 с той же вершиной A_i, кроме вершин A_2 и A_e. Эти рёбра естественно названы внутренними.

Мы имеем, следовательно, $e-3$ равенств между внутренними рёбрами:

$$r_1=r_2, \quad r_3=r_4, \quad \ldots, \quad r_{2e-7}=r_{2e-6}. \tag{3}$$

Итак, всякая вырожденная метрика может быть задана посредством симметричной развёртки, удовлетворяющей двум указанным условиям. Обратно, всякая такая развёртка задаёт вырожденную метрику. Чтобы убедиться в этом, достаточно склеить из её треугольников два равных многоугольника.

Докажем, что *если путём достаточно малого изменения вырожденной метрики ρ нарушить хотя бы одно из равенств* (3) *между её рёбрами $A_1A_3, \ldots, A_1A_{e-1}$, то получится невырожденная метрика.* Для этого достаточно показать, что если последовательность вырожденных метрик ρ_n сходится к ρ, то при достаточно больших n в метриках ρ_n соответствующие рёбра связаны теми же равенствами (3). В силу принятого нами определения сходимости метрик, метрики ρ_n задаются развёртками, имеющими то же строение, что некоторая развёртка метрики ρ, и поэтому имеет смысл говорить о соответствующих вершинах A_i метрик ρ_n, а значит и о соответствующих рёбрах A_1A_i.

Так как метрики ρ_n — вырожденные, то они реализуются некоторыми многогранниками P_n. Если на краях этих многогранников вершины $A_1, \ldots, A_e$ расположены в том же порядке, как и на краю многогранника P, реализующего метрику ρ, то тем самым равенства (3) связывают в этих метриках те же рёбра.

Допустим, однако, что при сколь угодно больших n вершины $A_1, \ldots, A_e$ располагаются на краях многогранников P_n в другом порядке. Тогда, выбрав из многогранников P_n подпоследовательность многогранников P_{n_i} с одним и тем же порядком вершин, мы получим в пределе вырожденный многогранник $\overline{P}$ с таким же порядком вершин. Так как этот порядок вершин отличен от того, какой есть на многограннике P, то на $\overline{P}$ имеются две вершины A_i, A_{i+1}, соединимые двумя кратчайшими. Вместе с тем, в силу леммы о реализуемости предела реализуемых метрик (лемма 2 § 6), многогранник $\overline{P}$ реализует метрику ρ, и поэтому на нём может быть только одна кратчайшая A_iA_{i+1}. Полученное противоречие показывает, что, начиная с достаточно больших n, на краях всех многогранников P_n вершины $A_1, \ldots, A_e$ расположены в том же порядке и, следовательно, равенствами (3) связаны те же самые рёбра.

Теперь мы можем обратиться непосредственно к доказательству леммы 3. Пусть ρ_0 — данная невырожденная метрика. Нужно показать, что её можно соединить с невырожденной реализуемой метрикой непрерывным рядом невырожденных метрик. По лемме 2 метрику ρ_0 можно соединить непрерывным рядом метрик ρ_t с невырожденной реализуемой метрикой. Если среди этих метрик нет вырожденных, то мы уже получаем требуемый результат.

Допустим, что среди метрик ρ_t имеются вырожденные. Пусть T — точная нижняя граница тех t, при которых метрика ρ_t — вырожденная. Тогда метрика ρ_T — тоже вырожденная, потому что (как это следует из леммы 2 § 6), предел вырожденных метрик есть вырожденная метрика. Так как метрика ρ_0 — невырожденная, то $T>0$. Зададим метрику ρ_T симметричной развёрткой. Реализуем метрику ρ_T вырожденным многогранником P. Если одну из вершин этого многогранника выдвинуть из той плоскости, в которой он лежит, то получим уже невырожденный многогранник. Согласно доказанному в § 3, этот многогранник будет иметь метрику, близкую к ρ_T. Следовательно, *сколь угодно близко к метрике ρ_T имеются невырожденные реализуемые метрики.* Покажем, что метрику ρ_0 можно соединить с одной из этих метрик.

Зададим метрику ρ_T симметричной развёрткой. В такой развёртке имеется $e-3$ пары равных рёбер:

$$r_1 = r_2, \ldots, r_{2e-7} = r_{2e-6}. \tag{3}$$

Все метрики, близкие к ρ_T можно задать близкими развёртками того же строения. Тогда каждая метрика ρ, близкая к ρ_T определится заданием $k = 3e-6$ длин рёбер $r_1, \ldots, r_k$ и её можно будет представить точкой в некоторой области G k-мерного пространства с координатами $r_1, \ldots, r_k$. Мы только что доказали, что если малым изменением метрики нарушить хотя бы одно из равенств (3), то получится невырожденная метрика. Поэтому все вырожденные метрики, близкие к метрике ρ_T, соответствуют тем точкам области G, для которых выполняются равенства (3). Эти $e-3$ равенства определяют в k-мерном пространстве линейное подпространство L размерности $k-(e-3)$.

Здесь следует различать два случая:

1) $e>4$ и потому $k-(e-3)<k-1$,

2) $e=4$ и потому $k-(e-3)=k-1$.

В первом случае линейное подпространство L имеет размерность меньше $k-1$ и потому не разбивает k-мерную область G. В окрестности подпространства L любые две не принадлежащие ему точки можно соединить непрерывной кривой, не пересекающей L. Это означает, что в окрестности метрики ρ_T любые две невырожденные метрики можно соединить непрерывным рядом невырожденных метрик. Но мы доказали, что в окрестности метрики ρ_T имеются невырожденные реализуемые метрики. Соединяя одну из этих метрик ρ' с какой-нибудь из метрик $\rho_t (t < T)$ в обход вырожденных метрик, мы получим непрерывный ряд метрик, соединяющий исходную метрику ρ_0 с метрикой ρ'. Этот ряд уже не будет содержать вырожденных метрик, потому что при $t < T$ никакая метрика ρ_t не вырождается.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $e = 4$ и число измерений подпространства L только на единицу меньше числа измерений области G. В этом случае имеется всего одно равенство (3) $r_1 = r_2$; подпространство L есть $(k-1)$-мерная плоскость и разбивает область G на две части. На самом L $r_1 = r_2$, с одной стороны от L $r_1 > r_2$, а с другой $r_1 < r_2$. Так как развёртка, задающая метрику ρ_T симметрична, то оба внутренние ребра играют одинаковую роль. Поэтому стоит лишь переменить обозначения, как неравенство $r_1 > r_2$ перейдёт в $r_1 < r_2$. Поэтому с обеих сторон от L лежат точки, соответствующие одним и тем же метрикам (эти метрики только по разному представлены развёртками данного строения). А так как в окрестности метрики ρ_T имеются метрики ρ', реализуемые невырожденными многогранниками, то они имеются по обе стороны от L и, в частности, по ту сторону, с которой к ρ_T подходят метрики ρ_t при $t < T$. Следовательно, одну из этих метрик ρ_t можно соединить с одной из метрик ρ', не пересекая L. Тогда исходная метрика ρ_0 окажется соединённой с такой метрикой ρ' рядом, уже не содержащим вырожденных метрик. Лемма доказана.

§ 8. Доказательство теоремы реализуемости.

Теперь мы имеем всё, чтобы легко закончить доказательство теоремы о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данной метрикой.

В § 1 была доказана реализуемость метрик с тремя вершинами. Поэтому мы можем доказывать теорему индукцией по числу вершин. Считая теорему верной для метрик с $e-1$ вершинами $(e > 3)$, докажем её для метрик с e вершинами.

Пусть ρ_0 — данная метрика с e вершинами. Если метрика ρ_0 вырожденная, т. е. если она реализуется вырожденным многогранником, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что метрика ρ_0 — не вырожденная. Тогда, по лемме 3 предыдущего параграфа, метрику ρ_0 можно соединить с невырожденной реализуемой метрикой ρ_1 непрерывным рядом невырожденных метрик ρ_t. По лемме 1 § 6 метрики, близкие к ρ_1, реализуемы и, следовательно, в частности, реализуемы все метрики ρ_t при t, достаточно близком к единице.

Пусть T — точная нижняя граница тех t, при которых метрики ρ_t реализуемы. Тогда, так как по лемме 2 § 6 предел реализуемых метрик есть реализуемая метрика, метрика ρ_T будет реализуемой. Поэтому, если $T = 0$, то теорема доказана. Но T не может не равняться нулю. Действительно, метрика ρ_T реализуема и невырожденная, потому что среди метрик ρ_t нет вырожденных. Следовательно, на основании леммы 1 § 6, все метрики, близкие к ρ_T также реализуемы. Поэтому, если бы было $T > 0$, то были бы реализуемы все метрики ρ_t при t, достаточно близких к T и меньших T. Но тогда T не было бы точной нижней границей тех t, при которых метрики ρ_t реализуемы. Следовательно, $T = 0$, и теорема доказана.

ГЛАВА VII.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ДАННОЙ МЕТРИКОЙ.

§ 1. Результат и метод доказательства.

Теперь, когда основные свойства внутренней метрики выпуклых поверхностей нами изучены и доказано существование замкнутого выпуклого многогранника с данной многогранной метрикой положительной кривизны, можно обратиться к вопросу о тех условиях, которые не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы данное метрическое пространство было изометрично замкнутой выпуклой поверхности. Это даст возможность в следующих главах решить тот же вопрос для некоторых других типов выпуклых поверхностей. Два необходимых условия были выведены ещё в § 6 гл. I: *метрическое пространство должно быть гомеоморфно сфере, и его метрика должна быть внутренней* (в более общем случае можно говорить о многообразии с внутренней метрикой). В качестве третьего условия проще всего взять условие выпуклости, но, как уже было объяснено в § 9 гл. I, оно представляется слишком сильным для того, чтобы рассматривать его как удачно выбранное достаточное условие. В § 9 гл. I было указано условие, гораздо более слабое по форме (хотя, конечно, поскольку им можно заменить условие выпуклости, оно оказывается эквивалентным этому последнему). Напомним содержание этого условия и определения входящих в него понятий, несколько изменив, однако, данное в § 9 гл. I определение «нижнего угла», что позволит существенно упростить доказательство достаточности нашего условия.

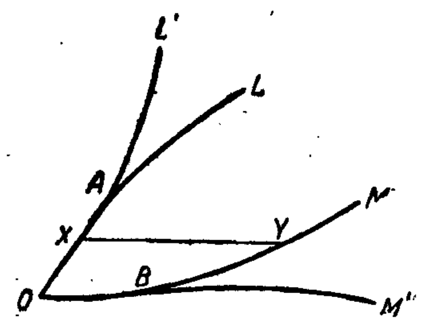
Пусть L и M — две кратчайшие в многообразии с внутренней метрикой ρ, исходящие из одной точки O. Возьмём на них переменные точки X, Y, отличные от O и такие, что существуют соединяющие их кратчайшие XY; эти кратчайшие существуют во всяком случае для всех X и Y, достаточно близких к O. Пусть, как всегда, $x = \rho(OX)$, $y = \rho(OY)$, $z = \rho(XY)$ и $\gamma(x, y)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами x, y, z, лежащий против z. Определим для кратчайших L и M число $\tau(L, M)$ следующим образом. Пусть точки X_n, Y_n образуют такую последовательность, что 1) $x_n y_n \to 0$ (т. е. по крайней мере одна из точек X_n и Y_n оказывается всё ближе и ближе к точке O), 2) точки X_n, Y_n можно соединить такими кратчайшими $X_n Y_n$, все предельные точки которых при $n \to \infty$ лежат на линии $L + M$, составленной из кратчайших L и M, т. е., если, например, $X_{n_i} \to 0$, то кратчайшие $X_{n_i} Y_{n_i}$ безгранично приближаются к M. Определяем для такой последовательности точек X_n, Y_n нижний предел угла $\gamma(x_n, y_n)$. Наименьший из таких пределов мы обозначим $\tau(L, M)$; можно написать, что

$$\tau(L, M) = \varliminf_{xy \to 0} \gamma(x, y),$$

при том условии, что кратчайшие XY безгранично приближаются к линии $L + M$. Это число $\tau(L, M)$ и было названо в § 9 гл. I нижним углом между кратчайшими L и M.

В числе $\tau(L, M)$ нет для нас ничего особенно нового, потому что в § 4 гл. III было доказано (теорема 5), что между кратчайшими на выпуклой поверхности, исходящими из одной точки, существует «угол в сильном смысле» т. е. что при условии, наложенном на кратчайшие XY, $\lim\limits_{xy\to 0}\gamma(x, y)$ существует и равен углу между кратчайшими L и M. Эта теорема довольно просто вытекала из условия выпуклости. Поэтому, если принять $\tau(L, M)$ за нижний угол между кратчайшими L и M, то необходимость того условия, чтобы сумма нижних углов треугольника была не меньше π, получается, как видно, достаточно легко.

Однако принять самое число $\tau(L, M)$ за нижний угол между кратчайшими оказывается неудобным по следующей причине. Возьмём отрезки L_1 и M_1 кратчайших L и M, также исходящие из точки O; тогда при определении числа $\tau(L_1, M_1)$ число допустимых положений точек X и Y уменьшится, а потому нижний предел углов $\gamma(x, y)$ может возрасти, и окажется, что $\tau(L_1, M_1) > \tau(L, M)$.



Черт. 61.

Упомянутая здесь теорема 5 § 4 гл. III утверждает, что на выпуклой поверхности этого не может быть; но в произвольном многообразии с внутренней метрикой это не исключено, в чём можно убедиться на примерах. Поэтому за нижний угол между кратчайшими L и M мы примем величину, получающуюся по следующему правилу.

Рассмотрим все такие кратчайшие L' и M', исходящие из O, которые на каких-нибудь отрезках OA и OB (для разных кратчайших, вообще говоря, — различных) совпадают соответственно с L и M. (При условии налегания кратчайшая L содержит L', или наоборот, но без этого условия кратчайшая L может отходить от L в какой-нибудь внутренней точке; черт. 61.) *Точную нижнюю границу чисел $\tau(L', M')$ по всем таким кратчайшим L', M' мы принимаем за нижний угол между кратчайшими L, M.* При таком определении нижний угол будет тот же самый для всех кратчайших, исходящих из O и совпадающих с L и M на каких-нибудь отрезках, начинающихся в точке O[1]).

Условие, которым мы хотим характеризовать внутреннюю метрику выпуклых поверхностей, состоит в следующем:

У каждой точки есть такая окрестность, что во всяком содержащемся в ней треугольнике (стороны которого — кратчайшие) сумма нижних углов между сторонами не меньше π. Метрику какого угодно метрического пространства мы будем называть *метрикой положительной кривизны*, если она — внутренняя и удовлетворяет указанному условию.

В произвольном метрическом пространстве под треугольником можно понимать только фигуру, образованную тремя кратчайшими, соединяющими попарно три данные точки. Однако мы будем иметь дело не с любыми пространствами, а с двумерным многообразием. В нём три кратчайшие, расположенные в достаточно малой области, ограничивают некоторое замкнутое множество. Именно это множество мы будем называть треугольником. Если это множество — выпуклое, то мы говорим о выпуклом треугольнике.

---

[1]) Тем не менее, в этом определении нижнего угла попрежнему играет роль не только метрика сколь угодно малой окрестности точки O, но метрика всей той области, до которой достигают кратчайшие L', M'. В примечании, сделанном в § 9 гл. I, мы уже указывали, что можно ввести другое понятие нижнего угла, не страдающее этим недостатком. Однако, там же было указано, что оно также имеет, и притом ещё более существенные, недостатки: а главное, — в доказательствах мы пользуемся именно введённым здесь понятием нижнего угла. Впрочем, в определении нижнего угла достаточно ограничиться пределами некоторой окрестности точки O.

В случае двумерного многообразия оказывается выгодным несколько ослабить определение метрики положительной кривизны. Именно, достаточно потребовать, чтобы у каждой точки имелась такая окрестность, что во всяком содержащемся в ней выпуклом треугольнике сумма углов не меньше π. Дальше мы будем пользоваться этим ослабленным определением.

Всякая выпуклая поверхность имеет метрику положителной кривизны, потому что на выпуклой поверхности нижний угол сводится к обычному, а сумма углов между сторонами всякого треугольника на выпуклой поверхности не меньше π. Так как эти результаты были получены в § 4 гл. III исходя из условия выпуклости, то можно формулировать ещё такую теорему: *Всякая внутренняя метрика, удовлетворяющая условию выпуклости, есть метрика положительной кривизны.* Следовательно, доказав достаточность требования положительности кривизны, мы тем самым докажем достаточность условия выпуклости.

Мы уже имели случай показать в § 9 гл. I на простом примере «удвоенной сферы», что само по себе требование положительности кривизны ещё вовсе недостаточно для того, чтобы всякая сферическая область, на которой задана метрика, удовлетворяющая этому требованию, была изометрична какой-нибудь выпуклой поверхности. Самая общая теорема существования выпуклой поверхности с данной метрикой положительной кривизны, которую мы можем доказать, была формулирована в § 9 гл. I как теорема А. Мы ограничимся тремя наиболее существенными частными случаями её, также формулированными в § 9 гл. I, как теоремы B, C, D:

Теорема 1. *Метрическое пространство с метрикой положительной кривизны, гомеоморфное сфере, изометрично замкнутой выпуклой поверхности.*

Теорема 2. *Метрическое пространство с полной метрикой положительной кривизны, гомеоморфное плоскости, изометрично бесконечной полной выпуклой поверхности.* (Необходимость требования полноты метрики была установлена в § 9 гл. I.)

Теорема 3. *Во всяком многообразии с метрикой положительной кривизны каждая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности.*

Настоящая глава посвящена доказательству теоремы 1; когда она будет доказана, теоремы 2 и 3 смогут быть доказаны с её помощью уже довольно легко; это будет сделано в следующей главе.

Доказательство теоремы 1 основано на приближении общей метрики положительной кривизны, заданной на сфере, посредством многогранной метрики положительной кривизны. Оно распадается на три этапа: во-первых, исследуются общие свойства метрики положительной кривизны, на основании которых можно доказать, что к общей метрике положительной кривизны можно приближаться многогранной метрикой. Второй этап как раз и состоит в доказательстве такой возможности. Третий этап представляет уже собственно доказательство самой теоремы, основанное на результатах второго этапа и на теореме о существовании многогранника с данной метрикой, установленной в предшествующей главе.

Рассмотрим несколько детальнее каждый из этих этапов.

Первый этап доказательства осуществляется в §§ 2—4. Мы рассматриваем произвольное многообразие с метрикой положительной кривизны, т. е., иными словами, метрическое пространство, являющееся двумерным многообразием и имеющее метрику положительной кривизны. Все рассмотрения ведутся «в малом», т. е. относятся к области U этого многообразия, удовлетворяющей следующим условиям:

1) U гомеоморфна кругу;

2) каждые две точки области U можно соединить кратчайшей;

3) у всякого треугольника, образованного кратчайшими, соединяющими точки области U, сумма наименьших углов между сторонами не меньше π.

Каждая точка многообразия с метрикой положительной кривизны имеет окрестность, для которой выполняются все три условия. Действительно, в силу требования положительности кривизны, каждая точка O имеет окрестность V, в которой выполняется третье условие. Вместе с тем, мы доказали (гл. II, § 2, теорема 4), что во всякой окрестности V точки O в многообразии с внутренней метрикой содержится такая окрестность U, что каждые две точки из U можно соединить кратчайшей и всякая такая кратчайшая будет содержаться в окрестности V. Окрестность U можно, конечно, выбрать гомеоморфной кругу. Тогда она будет удовлетворять всем трём поставленным условиям.

В дальнейшем термин «достаточно малый» означает — содержащийся в такой окрестности.

Три кратчайшие, проходящие в области U и соединяющие какие-нибудь точки A, B, C, ограничивают в U замкнутое множество, которые мы будем называть *треугольником* ABC. Такой треугольник априори может вовсе не быть гомеоморфным кругу, потому что кратчайшие AB, BC, CA априори могут иметь общие точки помимо вершин A, B, C, даже в том случае, если они не налегают друг на друга. На самом деле, в многообразии с метрикой положительной кривизны этого не может быть, и всякий достаточно малый треугольник гомеоморфен кругу, если он не вырождается в одну кратчайшую. Но пока это не доказано, под достаточно малым треугольником приходится понимать просто замкнутое множество, ограниченное тремя кратчайшими AB, BC, CA.

Главный предмет исследования представляют для нас достаточно малые выпуклые треугольники. В § 2 доказывается «основная лемма о (достаточно малых) выпуклых треугольниках» в многообразии с метрикой положительной кривизны. Доказательство этой леммы есть единственная существенная трудность первого этапа наших рассуждений. После того как она доказана, дальнейшее получается уже сравнительно легко. Эта лемма не имеет самостоятельного значения (поэтому мы даже не формулируем её здесь), но из неё легко выводятся в § 3 важные следствия (в дальнейших формулировках подразумевается, что речь идёт о многообразии с метрикой положительной кривизны):

Теорема A. *Между сторонами выпуклого треугольника существует угол в обычном смысле.* (Этот угол равен наименьшему углу между теми же сторонами.)

Теорема B. *Каждый угол достаточно малого выпуклого треугольника не меньше соответствующего угла плоского треугольника со сторонами той же длины.*

Теорема C. *Если две кратчайшие, исходящие из одной точки, налегают друг на друга на некотором отрезке, то одна из них есть часть другой, т. е. имеет место «условие неналегания кратчайших».*

В § 4 к теоремам A,B,C присоединяется ещё одна:

Теорема D. *Пусть из точки O исходят кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$, разбивающие окрестность точки O на выпуклые секторы и перенумерованные в порядке их расположения вокруг точки O. Сумма углов $\alpha_{i,i+1}$ между соседними кратчайшими L_i, L_{i+1} (а также между L_n и L_1) — всегда одна и та же для данной точки O, независимо от выбора кратчайших L_i, и не превосходит 2π.*

Поскольку сумма углов $\alpha_{i,i+1}$ вокруг точки O, фигурирующая в теореме D, зависит только от самой точки O, — эту сумму можно назвать полным углом вокруг этой точки. Второе утверждение теоремы D может быть тогда формулировано так: *В многообразии с метрикой положительной кривизны полный угол вокруг точки не превосходит* 2π.

Теорема C позволяет применить к многообразию с метрикой положительной кривизны все результаты, выведенные из условия неналегания кратчайших в главе III. Для нас особенно важен один из них:

Теорема E. *Выпуклый многоугольник можно разбить на сколь угодно малые выпуклые треугольники.*

Теоремы A — D позволяют перенести на углы между сторонами выпуклых треугольников все свойства угла, установленные нами в главе IV. Далее, мы можем ввести в многообразии с метрикой положительной кривизны понятие о кривизне совершенно так же, как это было сделано в § 1 гл. V, с той лишь разницей, что вместо любых треугольников следует рассматривать только достаточно малые выпуклые треугольники. Кривизна внутренней области выпуклого многоугольника определится посредством его разбиения на выпуклые треугольники и, согласно теореме, доказанной в § 1 гл. V, будет выражаться формулой

$$\omega = 2\pi\chi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i),$$

где χ — эйлерова характеристика, а α_i — углы многоугольника (т. е. углы между соседними его сторонами). В частности, для всей сферы с метрикой положительной кривизны $\omega = 4\pi$.

На этом заканчивается первый этап доказательства теоремы 1. Дальше, в § 5 устанавливаются некоторые вспомогательные оценки, которые применяются в § 6 для доказательства возможности приближаться к метрике положительной кривизны посредством многогранных метрик. Пусть P — выпуклый многоугольник в многообразии с метрикой ρ положительной кривизны. В силу теоремы E, он может быть разбит на выпуклые треугольники T_i со сторонами, не большими некоторого данного d. Каждому треугольнику T_i ставится в соответствие плоский треугольник T_i^0 со сторонами той же длины, и треугольник T_i^0 отображается гомеоморфно на T_i так, чтобы на сторонах это отображение было изометричным (т. е. с сохранением длин). Тогда тругольники T_i^0 образуют развёртку P^0, составленную из треугольников T_i^0 так же, как многоугольник P составляется из треугольников T_i. В силу отображения треугольников T_i^0 на T_i развёртка P^0 будет гомеоморфно отображена на P. Этим внутри многоугольника P определится некоторая многогранная метрика ρ^0: если X и Y — точки из P, то за $\rho^0(XY)$ будет приниматься расстояние между соответствующими точками X^0, Y^0 развёртки P^0. Об этой многогранной метрике мы доказываем следующую теорему:

Теорема F. *Многогранная метрика $\rho^0(XY)$ есть метрика положительной кривизны. И если у многоугольника P кривизна $\omega < \pi$, то для всяких двух точек X, Y из P*

$$|\rho(XY) - \rho^0(XY)| < Md,$$

где M — некоторая постоянная, а d — наибольшая из сторон треугольников T_i.

То, что метрика ρ^0 есть метрика положительной кривизны, сразу следует из теорем B и D. Действительно, по теореме D сумма углов треугольников T_i вокруг каждой вершины не превосходит 2π, а по теореме B углы треугольников T_i^0 не больше углов треугольников T_i. Следовательно, сумма углов треугольников T_i^0 вокруг одной вершины не превосходит 2π, а это как раз означает, что многогранная метрика ρ^0 есть метрика положительной кривизны. Вторая часть теоремы F доказывается элементарными рассуждениями, основанными на оценках, получаемых в § 5.

Этим исчерпывается второй этап доказательства теоремы 1. Остаётся третий этап, представляющий уже собственно доказательство этой теоремы. Пусть R — пространство с метрикой положительной кривизны, гомеоморфное сфере. Согласно теореме E, мы можем построить последовательность его разбиений Z_n на всё более и более мелкие выпуклые треугольники. Отображая каждый такой треугольник на плоский треугольник со сторонами той же длины, мы сопоставим каждому разбиению Z_n развёртку R_n, составленную из плоских треугольников. Обратное отображение развёртки R_n на пространство R определит в нём многогранную метрику ρ_n положительной кривизны, как это только что было выяснено.

По теореме, доказанной в предыдущей главе, каждую такую метрику можно реализовать посредством замкнутого выпуклого многогранника P_n. Это значит, что существует такое отображение пространства R на многогранник P_n, при котором расстояния сохраняются, т. е. $\rho_n(XY) = \rho_{P_n}(\overline{X}_n\overline{Y}_n)$, где ρ_{P_n} — расстояние на P_n, а точки $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ суть образы точек X и Y из R.

Если многогранники P_n расположить так, чтобы они не удалялись на бесконечность, то из них можно будет выбрать такую последовательность P_{n_i}, что все последовательности точек $\overline{X}_{n_i}$, соответствующих одной и той же точке X из R, будут сходиться. Таким образом каждой точке X из R будет поставлена в соответствие предельная точка $\overline{X}$ последовательности $\overline{X}_{n_i}$. Мы доказываем, что все эти точки образуют некоторую выпуклую поверхность F, к которой сходятся многогранники P_{n_i}. Тогда, по теореме о сходимости метрик сходящихся выпуклых поверхностей, мы заключаем, что

$$\lim_{i\to\infty} \rho_{P_{n_i}}(\overline{X}_{n_i}\overline{Y}_{n_i}) = \rho_F(XY).$$

А так как $\rho_{P_n}(\overline{X}_n\overline{Y}_n) = \rho_n(XY)$, то

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) = \lim_{i\to\infty} \rho_{n_i}(XY). \tag{1}$$

С другой стороны, используя вторую часть теоремы F, можно показать, что многогранные метрики ρ_{n_i} сходятся к данной метрике ρ, т. е.

$$\lim_{i\to\infty} \rho_{n_i}(XY) = \rho(XY). \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), мы видим, что

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) = \rho(XY),$$

т. е. расстояние между точками поверхности F равно расстоянию между соответствующими точками пространства R. Это значит, что поверхность F изометрична пространству R, и тем самым теорема 1 оказывается доказанной.

Намеченный путь довольно длинен, чему едва ли следует удивляться, если принять во внимание, что он приводит от абстрактного метрического пространства, подчинённого немногим общим условиям, к достаточно конкретному объекту — выпуклой поверхности. Главная трудность заключена в первом этапе доказательства, но её можно было бы уменьшить, если заранее подчинить рассматриваемое метрическое пространство более сильным условиям, например, условию выпуклости. Теоремы A, B, C, как было показано в § 4 гл. III, являются его непосредственными следствиями и, значит, осталось бы только доказать теорему D. Если же ещё постулировать, что полный угол вокруг всякой точки не превосходит 2π, то весь первый этап, а с ним и главная трудность доказательства исчезнут. Это мы имели бы право сделать, потому что нам известно, что полный угол вокруг точки на выпуклой поверхности действительно не превосходит 2π. Поэтому читатель, не заинтересованный специально в том, чтобы довести число постулатов до минимума, может принять теоремы A — D, или условие выпуклости и теорему D за аксиомы и начать доказательство теоремы 1 прямо с § 5, пропустив §§ 2—4.

§ 2. Основная лемма о выпуклых треугольниках.

В этом параграфе мы будем рассматривать достаточно малый выпуклый треугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны. Такой треугольник ABC был определён как замкнутое множество, ограниченное тремя кратчайшими AB, BC, CA, и априори он может иметь довольно странную форму.

Представляется, однако, удобным ради наглядности исключить из рассмотрения слишком «патологические» треугольники. Это можно сделать следующим образом.

Пусть, например, кратчайшие AB и AC имеют общие точки помимо A; тогда среди этих точек есть самая удалённая от A точка A'. Отрезки AA' обеих кратчайших равны, так как иначе, заменяя один отрезок более коротким, мы сократили бы одну из кратчайших. Поэтому, если один из этих отрезков заменить другим, то кратчайшие AB и AC будут совпадать на участке AA', но дальше не будут иметь общих точек. Ту же операцию можно проделать с другими парами сторон треугольника. После этого получится треугольник ABC, у которого стороны совпадают до некоторых точек A', B', C'. Может, конечно, случиться, что этот треугольник выродится в одну кратчайшую. Но такой случай можно исключить из рассмотрения как тривиальный.

Если стороны AB и AC совпадают на отрезке AA', то наименьший угол между ними равен нулю. А так как сумма углов треугольника не меньше π, то не все пары сторон могут налегать друг на друга. Отсюда ясно, что хотя бы одна из точек A', B', C' должна совпадать с A, B, C и во всяком случае точки A', B', C' не могут совпадать.

Следовательно, полученный треугольник ABC будет состоять из треугольника $A'B'C'$, гомеоморфного кругу (так как он ограничен тремя кратчайшими $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, не имеющими общих точек, кроме A', B', C'), из одной или двух вершин которого могут исходить отрезки, являющиеся продолжениями его сторон, например отрезок AA'. Дальше треугольник можно представлять себе именно в таком виде. Потом мы убедимся в том, что в многообразии с метрикой положительной кривизны выполняется условие неналегания кратчайших, и потому на самом деле треугольник не может иметь таких особенностей.

Основная лемма. *Пусть ABC — достаточно малый выпуклый треугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны, а $A_0B_0C_0$ — плоский треугольник со сторонами той же длины, так что $A_0B_0 = AB$ и т. д. Для каждой пары сторон треугольника ABC, например, для AB и AC, имеются только две возможности: либо нижний угол между ними не меньше соответствующего угла треугольника $A_0B_0C_0$, либо эти стороны являются продолжением друг друга, так что некоторые их отрезки AB_1 и AC_1 образуют вместе одну кратчайшую B_1C_1.* (На самом деле первое всегда верно; только мы не доказываем этого.)

В доказательстве этой леммы мы будем рассматривать переменные точки X и Y на сторонах AB и AC треугольника ABC и соединяющие их кратчайшие XY, проходящие в треугольнике ABC. Так как треугольник ABC — выпуклый, то такие кратчайшие существуют. Для удобства будем считать направления от вершины A к вершинам B и C направлениями слева направо, а обратные направления — направлениями справа налево. Например, если точка X_1 лежит от A дальше, чем X_2, то мы говорим, что она лежит правее этой точки. При данном положении точек X и Y может существовать несколько, или даже бесконечно много кратчайших XY, проходящих в треугольнике ABC. Об этих кратчайших мы докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 1. *Среди кратчайших XY, соединяющих данные точки X и Y на сторонах выпуклого треугольника ABC и проходящих в этом треугольнике, есть «самая левая», т. е. такая, что в вырезаемом ею из ABC треугольнике AXY нет никакой другой кратчайшей, соединяющей те же точки.*

Доказательство. Будем рассматривать только те кратчайшие XY, которые проходят в треугольнике ABC. Если такая кратчайшая — только одна, то она и есть «самая левая». Допустим, что имеются две такие кратчайшие: XY и $\overline{XY}$. Они вырезают из треугольника ABC два треугольника AXY и $A\overline{XY}$.

Пересечение этих треугольников снова будет треугольником, ограниченным некоторой кратчайшей $\overline{\overline{XY}}$, которая может совпадать с одной из кратчайших XY и $\overline{XY}$ или может состоять из их отрезков. Действительно, если XY и $\overline{XY}$ пересекаются в точках P и Q, то их отрезки PQ и $\overline{PQ}$ равны. Поэтому линия, составленная из таких отрезков, тоже будет кратчайшей. Если кратчайшие XY и $\overline{XY}$ пересекаются в бесконечном множестве точек, то строго следует рассуждать следующим образом. Каждая из кратчайших XY и $\overline{XY}$ может быть отображена с сохранением длин на прямолинейный отрезок L. Общая часть обеих кратчайших есть замкнутое множество; ему соответствует на отрезке некоторое замкнутое множество M. Дополнение этого множества есть открытое множество и, следовательно, состоит из счётного числа интервалов, не имеющих попарно общих точек. Каждому такому интервалу (pq) соответствуют отрезки PQ и $\overline{PQ}$ кратчайших XY и $\overline{XY}$. Из этих отрезков мы берём тот, который лежит «левее», т. е., например, отрезок PQ, если он лежит в треугольнике $A\overline{XY}$. Присоединяя к общей части кратчайших XY, $\overline{XY}$ все такие отрезки, мы получим некоторую линию $\overline{\overline{XY}}$. Из её построения ясно, во-первых, что она отображается на тот же прямолинейный отрезок L с сохранением длин, и потому является кратчайшей; во-вторых, что она ограничивает пересечение треугольников AXY и $A\overline{XY}$, т. е. лежит «левее» XY и $\overline{XY}$.

Отсюда ясно, что из конечного числа кратчайших, соединяющих точки X и Y, всегда можно выбрать или построить «самую левую».

Допустим теперь, что существует бесконечно много кратчайших, соединяющих точки X и Y. Будем говорить, что кратчайшая XY лежит левее $\overline{XY}$, если она содержится в треугольнике $A\overline{XY}$, вырезаемом кратчайшей $\overline{XY}$, и не совпадает с ней. Мы только что доказали, что из двух кратчайших всегда можно выбрать или построить такую, которая лежит левее. Поэтому, если какая-нибудь данная кратчайшая $\overline{XY}$ не есть самая левая, то существуют кратчайшие $\overline{XY}$, лежащие левее её. Каждая кратчайшая $\overline{XY}$, соединяющая точки X и Y, выделяет в треугольнике ABC часть, дополнительную к треугольнику $A\overline{XY}$. Внутренность этой части треугольника ABC мы будем обозначать $G(\overline{XY})$. Возьмём сумму всех таких множеств $G(\overline{XY})$ при данных X и Y. Это будет некоторое открытое множество G. В этом множестве G возьмём всюду плотное счётное множество точек Z_i и вокруг каждой из этих точек возьмём множество всех круговых окрестностей с рациональными радиусами. Получится счётное множество окрестностей. Из этого множества окрестностей выберем только те, которые содержатся хотя бы в каком-нибудь из множеств $G(\overline{XY})$. Эти окрестности мы перенумеруем: $U_1, U_2, \ldots$ Каждое множество $G(\overline{XY})$ есть сумма содержащихся в нём окрестностей U_i. А так как G есть сумма всех $G(\overline{XY})$, то

$$G = \sum G(\overline{XY}) = \sum_{i=1}^{\infty} U_i.$$

По выбору окрестностей U_i каждая из них содержится в каком-нибудь из $G(\overline{XY})$. Поэтому среди множеств $G(\overline{XY})$ есть такое, которое содержит U_1. Соответствующую кратчайшую $\overline{XY}$ обозначим L_1. Далее, если имеются кратчайшие $\overline{XY}$, лежащие левее L_1, то среди них найдётся L_2 такая, что $G(L_2) \supset U_2$. Продолжая такой выбор кратчайших L_n, получим последовательность их такую, что

$$G(L_n) \supset G(L_{n-1}) + U_n,$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} G(L_n) = G.$$

Из кратчайших L_n можно выбрать сходящуюся последовательность L_{n_i}. Предельная кратчайшая L и будет самой левой из кратчайших XY. Иначе существовала бы окрестность U_m, не содержащаяся в $G(L)$, так что при всяком $n_i > m$ кратчайшие L_{n_i} и L охватывали бы область $G(L_{n_i}) - G(L)$, содержащую U_m, что, очевидно, невозможно, если L_{n_i} сходятся к L. Лемма доказана.

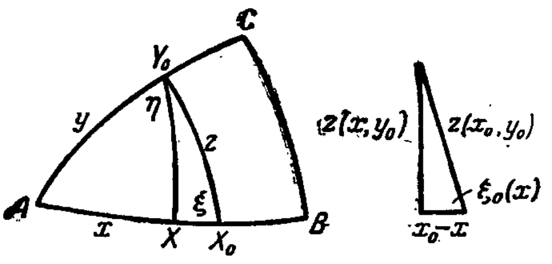
Лемма 2. *Если точки X_n, Y_n сходятся соответственно к X и Y слева, то самые левые кратчайшие X_nY_n сходятся к самой левой кратчайшей XY.*

Доказательство. Допустим, что самые левые кратчайшие X_nY_n не сходятся к самой левой кратчайшей XY. Тогда из них можно выбрать последовательность $X_{n_i}Y_{n_i}$, сходящуюся к некоторой другой кратчайшей $\overline{XY}$, и при достаточно больших n_i кратчайшие $X_{n_i}Y_{n_i}$ будут пересекать самую левую кратчайшую XY. Пусть, например, $X_{n_k}Y_{n_k}$ пересекается с XY в точках P и Q так, что на отрезке PQ кратчайшая XY проходит левее $X_{n_i}Y_{n_i}$ (т. е. внутри треугольника $AX_{n_i}Y_{n_i}$). Тогда, заменив отрезок PQ кратчайшей $X_{n_i}Y_{n_i}$ отрезком кратчайшей XY, получим кратчайшую, соединяющую те же точки X_{n_i} и Y_{n_i}, но лежащую левее кратчайшей $X_{n_i}Y_{n_i}$. Это противоречит тому, что эта последняя кратчайшая — самая левая из соединяющих те же точки. Лемма доказана.

Лемма 3. *Расстояния AX, AY, XY обозначим x, y, $z = z(x, y)$. Нижние углы, образуемые самой левой кратчайшей XY с отрезками AX и AY сторон AB и AC, обозначим* ξ и η. *Пусть, далее, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ обозначают левые верхние производные*[1]). *Эти производные связаны с углами* ξ *и* η *неравенствами*

$$\cos\xi \geqslant \frac{\partial z}{\partial x} \geqslant -1, \qquad \cos\eta \geqslant \frac{\partial z}{\partial y} \geqslant -1.$$

Доказательство. Достаточно, конечно, рассмотреть одну из этих производных, например $\frac{\partial z}{\partial x}$. Поэтому можно, выбрав произвольную точку Y_0, оставить её неизменной.



Черт. 62.

По неравенству треугольника

$$|X_0Y_0 - XY_0| \leqslant X_0X,$$

т. е.

$$|z(x_0, y_0) - z(x, y_0)| \leqslant |x_0 - x|,$$

откуда, очевидно, следует, что

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant 1.$$

Остаётся поэтому доказать, что $\frac{\partial z}{\partial x} \leqslant \cos\xi$. Для этого возьмём точку X слева от данной X_0 (черт. 62) и построим плоский треугольник со сторонами, равными

$$|x_0 - x|, \ z(x_0, y_0), \ z(x, y_0).$$

---

[1]) Т. е., например, $\frac{\partial z}{\partial x} = \overline{\lim_{h \to -0}} \frac{z(x+h, y) - z(x, y)}{h}$.

Угол этого треугольника, противолежащий третьей стороне, обозначим $\xi_0(x)$. По лемме 2 при $x \to x_0 - 0$ кратчайшие XY_0 сходятся к X_0Y_0. Поэтому из самого определения нижнего угла между кратчайшими X_0Y_0 и AX_0 следует, что

$$\underline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \xi_0(x) \geqslant \xi. \tag{1}$$

Вместе с тем, в построенном плоском треугольнике

$$z(x, y_0)^2 = z(x_0, y_0)^2 + (x_0 - x)^2 - 2z(x_0, y_0)(x_0 - x)\cos\xi_0(x),$$

откуда

$$\frac{z(x_0, y_0) - z(x, y_0)}{x_0 - x} = \frac{2z(x_0, y_0)}{z(x_0, y_0) + z(x, y_0)}\cos\xi_0(x) - \frac{x_0 - x}{z(x_0, y_0) + z(x, y_0)}.$$

Но при $x \to x_0 - 0$ также $z(x, y_0) \to z(x_0, y_0)$ и потому

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \overline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \frac{z(x_0, y_0) - z(x, y_0)}{x_0 - x} = \overline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \cos\xi_0(x).$$

Но в силу неравенства (1),

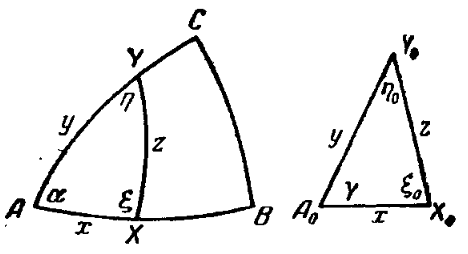
$$\overline{\lim}_{x \to x_0 - 0} \cos\xi_0(x) \leqslant \cos\xi.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} \leqslant \cos\xi,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Сохраняя обозначения леммы 3, рассматриваем плоский треугольник $A_0X_0Y_0$ со сторонами x, y, z и его угол при вершине A_0 обозначаем, как всегда, через $\gamma(x, y)$, углы же при вершинах X_0 и Y_0 обозначаем соответственно через ξ_0 и η_0 (черт. 63). Допустим, что при данных x и y $\xi > \xi_0$, и положим $\xi - \xi_0 = \varepsilon$. Тогда либо $\xi_0 = 0$, так что треугольник $A_0X_0Y_0$ вырождается, либо найдётся такое $x' < x$, что*



$$\gamma(x', y) - \gamma(x, y) > \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{x}{x'}.$$

Черт. 63.

Доказательство. Допустим, что $\xi_0 \neq 0$. Функции $z(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ априори могут быть недифференцируемыми. Поэтому под символами $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$ мы будем понимать их левые верхние производные по x при постоянном y. Тогда, на основании леммы 3, можно утверждать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \leqslant \cos\xi. \tag{2}$$

С другой стороны, в треугольнике $A_0B_0C_0$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma$$

и потому [1])

$$z\frac{\partial z}{\partial x} = x - y\cos\gamma + xy\sin\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

[1]) Здесь, конечно, важно, что $\gamma(x, y)$ есть непрерывная функция x и y и что $xy\sin\gamma \geqslant 0$.

А так как $x = y\cos\gamma + z\cos\xi_0$ и $xy\sin\gamma = xz\sin\xi_0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\xi_0 + x\sin\xi_0 \frac{\partial\gamma}{\partial x}. \tag{3}$$

Так как $\xi_0 \neq 0$, то из этого равенства следует, между прочим, что $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ имеет конечное значение, потому что, по лемме 3, $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqslant 1$. Вместе с неравенством (2) уравнение (3) даёт, что

$$\cos\xi \geqslant \cos\xi_0 + x\sin\xi_0 \frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} \leqslant \frac{\cos\xi - \cos\xi_0}{x\sin\xi_0} \leqslant \frac{\cos\xi - \cos\xi_0}{x}, \tag{4}$$

потому что $\xi > \xi_0$ и, следовательно, $\cos\xi - \cos\xi_0 < 0$.

Так как мы положили $\xi - \xi_0 = \varepsilon > 0$, то[1])

$$\cos\xi_0 - \cos\xi = 2\sin\frac{\xi_0+\xi}{2}\sin\frac{\xi-\xi_0}{2} \geqslant 2\sin^2\frac{\xi-\xi_0}{2} = 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

А так как, кроме того, $\frac{1}{x} = \frac{d\ln x}{dx}$, то из неравенства (4) следует, что

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} \leqslant -2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{d\ln x}{dx}. \tag{5}$$

Здесь $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ есть левая верхняя производная, т. е.

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \overline{\lim_{x'\to x-0}} \frac{\gamma(x,y)-\gamma(x',y)}{x-x'}.$$

Поэтому при $x' < x$

$$\gamma(x,y) - \gamma(x',y) < \frac{\partial\gamma}{\partial x}(x-x') + \delta_1\cdot(x-x'), \tag{6}$$

где δ_1 — бесконечно малое вместе с $x - x'$. Вместе с тем,

$$\ln\frac{x}{x'} = \ln x - \ln x' = \frac{d\ln x}{dx}(x-x') + \delta_2\cdot(x-x'), \tag{7}$$

где δ_2 — также бесконечно малое вместе с $x - x'$.

Воспользовавшись формулами (6) и (7), получаем из неравенства (5) соответствующее неравенство для конечных приращений:

$$\gamma(x,y) - \gamma(x',y) < -\ln\frac{x}{x'}\cdot 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \delta\cdot(x-x'), \tag{8}$$

где δ бесконечно мало вместе с $x - x'$. Можно, конечно, взять $x - x'$ столь малым, чтобы было

$$\delta\cdot(x-x') < \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\ln\frac{x}{x'}.$$

Тогда из неравенства (8), очевидно, последует, что

$$\gamma(x',y) - \gamma(x,y) > \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\ln\frac{x}{x'}.$$

Лемма доказана.

---

[1]) Так как $\xi \leqslant \pi$, то $\cos\frac{\xi}{2} \geqslant 0$, а потому $\sin\frac{\xi+\xi_0}{2} = \sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi_0}{2} + \sin\frac{\xi_0}{2}\cos\frac{\xi}{2} \geqslant$
$\geqslant \sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{\xi_0}{2} - \sin\frac{\xi_0}{2}\cos\frac{\xi}{2} = \sin\frac{\xi-\xi_0}{2}$.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству основной леммы о выпуклых треугольниках. Напомним её содержание:

Пусть ABC — достаточно малый выпуклый треугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны, а $A_0B_0C_0$ — плоский треугольник со сторонами $A_0B_0 = AB$, $A_0C_0 = AC$, $B_0C_0 = BC$. Для каждой пары сторон треугольника ABC, например, для AB и AC имеются только две возможности: либо нижний угол между ними не меньше соответствующего угла треугольника $A_0B_0C_0$, либо эти стороны являются продолжением друг друга, т. е. некоторые отрезки AB_1 и AC_1 этих сторон образуют вместе одну кратчайшую.

Доказательство. Допустим, что нижний угол α между сторонами AB и AC треугольника ABC меньше соответствующего угла α_0 треугольника $A_0B_0C_0$, так что

$$2\varepsilon = \alpha_0 - \alpha > 0. \tag{9}$$

Нужно доказать, что отсюда следует, что стороны AB и AC являются продолжением друг друга.

Сторона BC может быть не единственной кратчайшей, проходящей в треугольнике ABC и соединяющей B с C. В таком случае, по лемме 1, имеется самая левая из этих кратчайших. ~~Ею~~ мы заменим сторону BC и получим таким образом новый треугольник ABC, который также будет выпуклым (это очевидно само по себе и кроме того следует из теоремы 4 § 5 гл. II). Дальше мы будем рассматривать только этот треугольник. Как и раньше, на его сторонах AB и AC мы берём переменные точки X и Y и под XY понимаем каждый раз самую левую кратчайшую. Обозначения, которые были введены в леммах 3, 4, мы оставляем в силе (см. черт. 63). Мы будем говорить, что пара точек X_1, Y_1 лежит левее пары X_2, Y_2, если $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant y_2$ и хотя в одном случае имеет место строгое неравенство.

Если длины AB и AC обозначить через b и c, то в принятых нами обозначениях $\gamma(b, c)$, $\xi_0(b, c)$, $\eta_0(b, c)$ обозначают углы треугольника $A_0B_0C_0$, а $\xi(b, c)$, $\eta(b, c)$ обозначают нижние углы между сторонами AB, AC и стороной BC.

По предположению (9)

$$2\varepsilon = \gamma(b, c) - \alpha > 0. \tag{9}$$

А по условию положительности кривизны

$$\alpha + \xi(b, c) + \eta(b, c) \geqslant \pi,$$

т. е.

$$\alpha + \xi(b, c) + \eta(b, c) \geqslant \gamma(b, c) + \xi(b, c) + \eta(b, c).$$

Отсюда, в силу неравенства (9), следует, что хотя бы один из углов ξ, η превосходит соответствующий угол ξ_0, η_0 не менее чем на ε.

Пусть, например,

$$\xi(b, c) \geqslant \xi_0(b, c) + \varepsilon.$$

Тогда по лемме 4 возможно одно из двух: либо $\xi_0(b, c) = 0$, либо найдётся такое $x < b$, что

$$\gamma(x, c) - \gamma(b, c) > \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\ln\frac{b}{x} = \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{bc}{xc}.$$

В силу неравенства (9) $\gamma(b, c) > 0$; поэтому, если $\xi_0(b, c) = 0$, то треугольник $A_0B_0C_0$ вырождается в отрезок и $A_0B_0 + A_0C_0 = B_0C_0$, т. е. $AB + AC = BC$, так что стороны AB и AC образуют одну кратчайшую. Поэтому можно сказать, что $\xi_0(b, c) \neq 0$ и так же $\eta_0(b, c) \neq 0$. Если

$$\eta(b, c) \geqslant \eta_0(b, c) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \eta_0(b, c) \neq 0,$$

то найдётся такое $y < c$, что

$$\gamma(b, y) - \gamma(b, c) > \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\ln\frac{c}{y} = \sin^2\frac{\varepsilon}{2}\ln\frac{bc}{by}.$$

Поэтому, так или иначе, левее пары (b, c) есть такая пара (x_1, y_1) с $y_1 = c$ или $x_1 = b$, что

$$\gamma(x_1, y_1) - \gamma(b, c) > \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \ln \frac{bc}{x_1 y_1}. \tag{10}$$

Так как $\gamma(x_1, y_1) > \gamma(b, c)$, то, в силу формулы (9),

$$\gamma(x_1, y_1) - \alpha > 2\varepsilon.$$

Поэтому, применяя то же рассуждение к треугольнику AX_1Y_1, в котором либо $X_1 = B$, либо $Y_1 = C$, мы будем иметь две возможности: либо AX_1 и AY_1 образуют одну кратчайшую, либо найдётся новая пара (x_2, y_2), лежащая левее пары (x_1, y_1) и такая, что

$$\gamma(x_2, y_2) - \gamma(x_1, y_1) > \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}.$$

Складывая это неравенство с неравенством (10), получим, что

$$\gamma(x_2, y_2) - \gamma(b, c) > \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{bc}{x_2 y_2}. \tag{11}$$

Так как $\gamma(x_2, y_2) > \gamma(b, c)$, то, в силу неравенства (9),

$$\gamma(x_2, y_2) - \alpha > 2\varepsilon. \tag{12}$$

Этот процесс можно продолжать до бесконечности, получая всё более и более «левые» пары (x, y), для которых 1) отрезки AX и AY не образуют одной кратчайшей и 2) имеют место неравенства вида (11) и (12).

Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — точная нижняя граница таких пар, т. е. такая пара, что существуют указанные пары (x, y) с x и y, сколь угодно близкими к $\bar{x}$ и $\bar{y}$, но не существует никакой такой же пары (x, y), лежащей левее пары $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ни одно из чисел $\bar{x}$, $\bar{y}$ не может равняться нулю. Действительно, если, например, $\bar{x} = 0$, то мы имели бы сходящуюся к $(\bar{x}, \bar{y})$ последовательность пар (x_n, y_n), для которых выполняются неравенства (11) и вместе с тем $x_n \to 0$. А это, очевидно, невозможно, потому что при $x_n \to 0$ $\ln \frac{bc}{x_n y_n} \to \infty$ и получалось бы, что $\gamma(x_n, y_n) \to \infty$, в то время как $\gamma(x_n, y_n) \leqslant \pi$ (ведь $\gamma(x_n, y_n)$ есть угол плоского треугольника!). Следовательно, ни одно из чисел $\bar{x}$, $\bar{y}$ не равно нулю.

В открытом слева промежутке $0 < x \leqslant b$, $0 < y \leqslant c$ функции $\gamma(x, y)$ и $\ln \frac{bc}{xy}$ непрерывны. Поэтому неравенства (11) и (12) должны быть верны также при $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, поскольку $(\bar{x}, \bar{y})$ есть точная нижняя граница таких пар (x, y), для которых эти неравенства выполняются.

Следовательно, для пары $(\bar{x}, \bar{y})$ применимы прежние рассуждения, т. е. для неё имеются две возможности: 1) отрезки $A\bar{X}$ и $A\bar{Y}$ образуют одну кратчайшую, или 2) существует пара (x, y), лежащая левее $(\bar{x}, \bar{y})$, для которой выполняются неравенства (11) и (12). Но по определению $(\bar{x}, \bar{y})$ есть точная нижняя граница пар, удовлетворяющих этим неравенствам. Поэтому вторая возможность исключается и остаётся только первая возможность, что и требовалось доказать.

§ 3. Следствия основной леммы о выпуклых треугольниках.

Из доказанной в предыдущем параграфе основной леммы о выпуклых треугольниках легко получается ряд важных следствий:

Теорема 1. *Между сторонами всякого достаточно малого выпуклого треугольника в многообразии с метрикой положительной кривизны суще-*

ствуют углы в обычном смысле. Если две стороны не являются продолжением друг друга, то обычный и нижний углы между ними равны. (На самом деле эти углы равны также и тогда, когда стороны являются одна продолжением другой. Только мы оставляем это утверждение без доказательства.)

Доказательство. Пусть ABC — малый выпуклый треугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны. Если его стороны AB и AC являются одна продолжением другой, то, очевидно, между ними существует угол в обычном смысле и притом равный π. Допустим поэтому, что стороны AB и AC не являются одна продолжением другой, и докажем, что в этом случае нижний угол между ними сводится к углу в обычном смысле.

Пусть, как всегда, X и Y — переменные точки на AB и AC; $x = AX$, $y = AY$, $z = XY$. Пусть $\gamma(x, y)$ имеет обычный смысл, т. е. представляет угол в плоском треугольнике со сторонами x, y, z, лежащий против стороны z. Пусть, наконец, α — нижний угол между AB и AC.

Из самого определения нижнего угла следует, что

$$\underline{\lim}_{x, y \to 0} \gamma(x, y) \geqslant \alpha.$$

С другой стороны, применяя к любому из треугольников AXY основную лемму предыдущего параграфа, мы получим, что

$$\gamma(x, y) \leqslant \alpha.$$

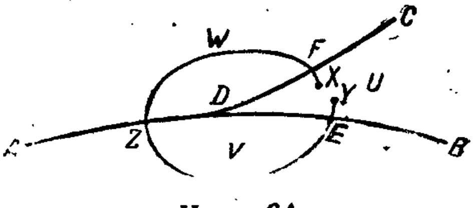
Следовательно, $\lim\limits_{x, y \to 0} \gamma(x, y)$, т. е. угол между AB и AC, существует и равен α.

Теорема 2. *Углы достаточно малого выпуклого треугольника ABC не меньше соответствующих углов плоского треугольника $A_0B_0C_0$ со сторонами той же длины.*

Доказательство. Если стороны AB и AC треугольника ABC являются продолжением друг друга, то угол между ними равен π и потому заведомо не меньше угла в плоском треугольнике. Если же стороны AB и AC не являются продолжением друг друга, то, по основной лемме предыдущего параграфа, нижний угол между ними не меньше соответствующего угла треугольника $A_0B_0C_0$. А по теореме 1, в этом случае нижний угол совпадает с обычным. Следовательно, теорема доказана.

Теорема 3. *В многообразии с метрикой положительной кривизны выполняется условие неналегания кратчайших.*

Доказательство. Пусть AB и AC — две кратчайшие, исходящие из точки A. Допустим, что они налегают друг на друга на отрезке AD и дальше расходятся.

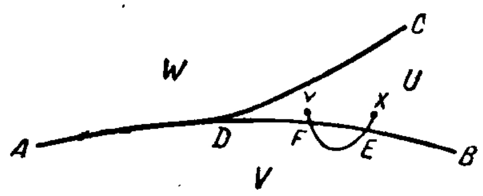


Черт. 64.

Тогда их отрезки AD, DB и DC разбивают достаточно малую окрестность точки D на три сектора U, V, W (черт. 64).

Докажем, что сектор U, заключённый между DB и DC — выпуклый. Пусть X, Y — две точки этого сектора (настолько близкие к D, что кратчайшая XY не может огибать линии DA, DB, DC, т. е. при переходе из U, например, в V она обязана пересечь DB). Допустим, что кратчайшая XY не содержится в секторе U, и пусть EF — её отрезок, лежащий вне U (не исключено, конечно, что XY имеет также другие отрезки вне U). Допустим, для определённости, что точка E лежит на DB. Для точки F имеются две возможности: 1) F лежит на DC (черт. 64), 2) F лежит на DB (черт. 65).

Если F лежит на DC, то отрезок EF кратчайшей XY необходимо пересекает AD в какой-нибудь точке Z. Но тогда части EZ и FZ отрезка EF равны отрезкам EZ и FZ кратчайших AB и AC. Следовательно, эти отрезки кратчайших AB и AC образуют вместе одну кратчайшую $\overline{EF}$, что невозможно, так как линию, которую они образуют, можно сократить, исключив отрезок ZD. Следовательно, точка F не может лежать на DC. Этим также доказано, что кратчайшая XY не может пересекать AD.



Черт. 65.

Пусть теперь точка F лежит на DB. Это значит, что оба конца отрезка EF лежат на кратчайшей DB, и потому этот отрезок равен отрезку EF кратчайшей DB. Поэтому отрезок EF кратчайшей XY можно заменить отрезком EF кратчайшей DB. Произведя такую замену для всех отрезков кратчайшей XY, проходящих вне сектора U, мы заменим её кратчайшей, проходящей целиком в секторе U. Этим доказано, что сектор U — выпуклый.

Возьмём внутри линий DB и DC точки P и Q так, что $DP = DQ$ и проведём в секторе U кратчайшую PQ. По доказанному это возможно. Мы получим треугольник DPQ, который будет выпуклым. Действительно, если X и Y две точки этого треугольника, то по доказанному их можно соединить кратчайшей, проходящей в секторе U. Если эта кратчайшая не лежит целиком в треугольнике DPQ, то она тем самым пересекает его сторону PQ. Но всякий отрезок кратчайшей XY между двумя её точками пересечения с PQ можно заменить соответствующим отрезком стороны PQ. Таким образом, всегда имеется кратчайшая XY, проходящая в треугольнике DPQ, т. е. треугольник DPQ выпуклый.

Если к треугольнику DPQ присоединить малый отрезок GD кратчайшей AD, то получится снова выпуклый треугольник GPQ, в чём легко убедиться, потому что AD является продолжением обеих его сторон DP и DQ. Но в треугольнике GPQ угол между сторонами GP и GQ равен нулю. Поэтому, согласно теореме 2, соответствующий угол плоского треугольника со сторонами той же длины должен быть равен нулю и потому должно быть

$$GP + PQ = GQ$$

или

$$GQ + PQ = GP.$$

Но так как, по выбору точек P и Q, $GP = GQ$, то отсюда следует, что $PQ = 0$, т. е. точки P и Q совпадают, вопреки предположению о том, что кратчайшие AB и CD расходятся. Следовательно, кратчайшие AB и AC, совпадающие на отрезке AD, не могут дальше расходиться, что и требовалось доказать.

Поскольку в многообразии с метрикой положительной кривизны выполняется условие неналегания кратчайших, постольку выполняются и все его следствия, полученные в главе II.

Особенно важной будет для нас теорема § 8 гл. II о разбиении на треугольники:

Теорема 4. *Всякий выпуклый многоугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны можно разбить на сколь угодно малые выпуклые треугольники.*

В § 4 гл. III была доказана основная теорема о сходимости углов между кратчайшими на выпуклых поверхностях (теорема 4 § 4 гл. III). Её вывод был основан только на том, что углы треугольника на выпуклой поверхности не меньше углов плоского треугольника, а это свойство установлено нами для выпуклых треугольников. Поэтому мы можем утверждать следующее:

Теорема 5. *Если кратчайшие L, M, являющиеся сторонами переменного выпуклого треугольника в многообразии с метрикой положительной* *кривизны, сходятся к кратчайшим L_0, M_0, то угол между L_0 и M_0 не больше нижнего предела углов между L и M* [1]).

Самая эта теорема будет нужна нам только в следующей главе. Здесь мы заметим ещё, что вывод теорем о сложении углов, данный в § 1 гл. IV, был основан только на существовании угла, а вывод теоремы о том, что сумма смежных углов равна π, данный в § 2 гл. IV, был основан ещё на условии неналегания кратчайших и на приведённой теореме о сходимости углов. Поэтому мы можем перенести в многообразие с метрикой положительной кривизны общую теорему сложения углов на выпуклых поверхностях, установленную в § 2 гл. IV, высказав её для трёх кратчайших, что будет для нас достаточно:

Теорема 6. *Пусть из точки O в многообразии с метрикой положительной кривизны исходят три кратчайшие L_1, L_2, L_3. Пусть между ними существуют углы, которые обозначим α_{ij}. Тогда, если для точек X_1 X_3 на L_1 и L_3, сколь угодно близких к O, кратчайшая X_1X_3 имеет с кратчайшей L_2 общие точки, то $\alpha_{13} = \alpha_{12} + \alpha_{23}$.*

В частности, если L_1 и L_3 являются одна продолжением другой, то кратчайшая X_1 X_3 налегает на них и имеет с L_2 общую точку O; вместе с тем угол между L_1 и L_2 равен в этом случае π, и теорема сводится к тому, что сумма смежных углов равна π.

§ 4. Полный угол вокруг точки.

Кратчайшие, исходящие из одной точки O в многообразии с метрикой положительной кривизны, разбивают окрестность этой точки на секторы, потому что, в силу условия неналегания, никакие две из них не могут пересекаться сколь угодно близко к точке O, если только одна не является частью другой. Сектор, ограниченный кратчайшими L, M, мы назовём выпуклым, если некоторые отрезки кратчайших L, M оказываются сторонами выпуклого треугольника, содержащего этот сектор [2]), или служат один продолжением другого, образуя вместе одну кратчайшую. В выпуклом секторе каждые две точки соединимы кратчайшей, содержащейся в этом секторе. Стороны сектора присоединяются к нему. Между кратчайшими, ограничивающими выпуклый сектор, существует угол. Мы будем рассматривать произвольное число n кратчайших $L_1, \ldots, L_n$, исходящих из одной точки O и перенумерованных в порядке их расположения вокруг точки O, т. е. так, что L_i и L_{i+1} (а также L_n и L_1) ограничивают сектор, не содержащий других кратчайших L_j. Угол между L_i и L_j, если он существует, будет обозначаться α_{ij}.

Теорема 1. *Если кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$, исходящие из точки O в многообразии с метрикой положительной кривизны, разбивают окрестность точки O на выпуклые секторы, то сумма углов $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \ldots + \alpha_{n1}$ не зависит от этих кратчайших и может зависеть только от точки O.*

Доказательство. Пусть из точки O проведены кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$ и $M_1, \ldots, M_k$ и пусть $\alpha_{i,i+1}$ обозначает угол между L_i и L_{i+1}, а $\beta_{j,j+1}$ — угол между M_j и M_{j+1}. Если кратчайшие L_i в отдельности и кратчайшие M_j в отдельности разбивают окрестность точки на выпуклые секторы, то и все они вместе разбивают её тоже на выпуклые секторы. Поэтому если перенумеровать их все подряд, обозначив $N_1, N_2, \ldots, N_{n+k}$, то между N_i и N_{i+1} будет существовать определённый угол $\gamma_{i,i+1}$. В силу общей теоремы о сложении углов, доказанной в § 1 гл. IV, угол $\alpha_{i,i+1}$ между $L_i = N_p$ и $L_{i+1} = N_q$ будет равен сумме углов между N_p и N_{p+1}, N_{p+1} и $N_{p+2}, \ldots, N_{q-1}$ и N_q.

---

[1]) Кратчайшие L_0M_0 будут сторонами выпуклого треугольника или продолжением друг друга, потому что из малых треугольников, имеющих стороны L, M, можно выбрать сходящуюся последовательность.

[2]) См. определение сектора, данное в начале § 3 гл. IV.

Следовательно,

$$\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{n1}=\gamma_{12}+\ldots+\gamma_{n+k,1},$$

и точно так же

$$\beta_{12}+\ldots+\beta_{k1}=\gamma_{12}+\ldots+\gamma_{n+k,1},$$

что и требовалось доказать.

Так как по доказанному сумма углов выпуклых секторов, образующих окрестность точки O, зависит только от самой этой точки, то её естественно назвать *полным углом вокруг точки* O. Это определение отличается от введённого в § 3 гл. IV только тем, что вместо любых секторов здесь рассматриваются только выпуклые секторы.

Более существенно то обстоятельство, что мы вовсе не доказали возможности разбить окрестность **всякой** точки на выпуклые секторы, хотя это и можно было бы сделать. Поэтому приходится применять понятие полного угла только к тем точкам, для которых такое разбиение заведомо возможно. Такие точки существуют, потому что всякий выпуклый многоугольник можно разбить на сколь угодно малые выпуклые треугольники. Вершины этих треугольников и будут такими точками. Кроме того, вокруг точки, лежащей внутри кратчайшей. всегда существует полный угол, потому что две исходящие из неё ветви кратчайшей разбивают её окрестность на два выпуклых сектора. Полный угол вокруг этой точки, очевидно, равен 2π. Ни для каких других точек, кроме указанных, понятие полного угла нам не понадобится. Когда будет доказано, что окрестность любой точки изометрична выпуклой поверхности, выяснится, что все указанные ограничения вызваны только ходом доказательства.

Теорема 2. *Полный угол вокруг точки в многообразии с метрикой положительной кривизны не превосходит* 2π.

Эту теорему удобнее доказывать в несколько более общей форме:

Пусть кратчайшие $L_1, \ldots, L_n$, *исходящие из одной точки* O *в многообразии с метрикой положительной кривизны, перенумерованы в порядке их расположения вокруг* O. *Тогда, если каждые две соседние из них* L_i, L_{i+1} (*а также* L_n, L_1) *образуют друг с другом определённый угол* $\alpha_{i,i+1}$ (*но не обязательно ограничивают выпуклый сектор*), *то сумма этих углов не превосходит* 2π.

Доказательство. Если кратчайших только две, то эта сумма сводится к $\alpha_{12}+\alpha_{21}=2\alpha_{12}$, и так как $\alpha_{12}\leqslant\pi$, то в этом случае теорема верна. В дальнейшем можно предполагать, что число кратчайших L_i не меньше трёх.

Возьмём переменные точки X_1 и X_{n-1} на кратчайших L_1 и L_{n-1}. При X_1 и X_{n-1} сколь угодно близких к O, для кратчайшей X_1X_{n-1} имеются три возможности:

1) X_1X_{n-1} неизменно имеет общие точки с L_n;
2) X_1X_{n-1} неизменно не имеет общих точек с L_n;
3) X_1X_{n-1} то имеет общие точки с L_n, то не имеет их.

Когда кратчайшая X_1X_{n-1} не имеет с L_n общих точек, то она пересекает кратчайшие $L_2, \ldots, L_{n-2}$ (если только эти кратчайшие существуют, т. е. если $n>3$, потому что при $n=3$ L_{n-1} есть L_2).

Если при некотором положении точек X_1X_{n-1} кратчайшая X_1X_{n-1} проходит через точку O, то кратчайшие L_1 и L_{n-1} оказываются одна продолжением другой, и, следовательно, при всех X_1 и X_{n-1}, достаточно близких к O, кратчайшая X_1X_{n-1} имеет с L_n общую точку O, т. е. в этом случае имеет место первая из трёх указанных возможностей, и, следовательно, в двух других случаях кратчайшая X_1X_{n-1} никогда не проходит через точку O.

Рассмотрим сначала третий случай. Воспользуемся общей леммой 2 § 1 гл. IV. Эта лемма утверждает, что если при X_1 и X_{n-1}, сколь угодно близких к O, кратчайшая X_1X_{n-1} пересекает L_n, но не в точке O и может быть только при некоторых положениях точек X_1, X_{n-1}, то

$$\varliminf_{x_1, x_n \to 0} \gamma_{n1}(x_1, x_n) + \varliminf_{x_{n-1}, x_n \to 0} \gamma_{n-1, n}(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{x_1, x_{n-1} \to 0} \gamma_{1, n-1}(x_1, x_{n-1}), \qquad (1)$$

где $\gamma_{ij}(x_i, x_j)$ имеет обычный смысл [1]) и пределы берутся по тем x_1, x_{n-1}, x_n, которые соответствуют кратчайшим $X_1 X_{n-1}$, пересекающим L_n. Но так как между L_1 и L_n, L_{n-1} и L_n существуют углы, то нижние пределы, стоящие в (1) слева, можно заменить этими углами и тогда получится, что

$$\alpha_{1n} + \alpha_{n-1, n} \leqslant \varliminf_{x_1, x_{n-1} \to 0} \gamma_{1, n-1}(x_1, x_{n-1}). \qquad (2)$$

Совершенно так же, если $X_1 X_{n-1}$ пересекает $L_2, \ldots, L_{n-2}$, то

$$\alpha_{12} + \ldots + \alpha_{n-2, n-1} \leqslant \varliminf_{x_1, x_{n-1} \to 0} \gamma_{1, n-1}(x_1, x_{n-1}). \qquad (3)$$

А так как $\gamma_{1, n-1}(x_1, x_{n-1}) \leqslant \pi$, то из неравенств (2) и (3) следует, что

$$\alpha_{12} + \ldots + \alpha_{n-1, n} + \alpha_{n1} \leqslant 2\pi,$$

т. е. в третьем случае теорема доказана.

Во втором случае кратчайшая $X_1 X_{n-1}$ не пересекает L_n и значит неизменно пересекает $L_2, \ldots, L_{n-2}$ в точках, отличных от O (если только вообще эти кратчайшие имеются, т. е. если $n > 3$). Здесь мы можем воспользоваться теоремой 3 § 1 гл. IV, согласно которой при этих условиях существует угол между L_1 и L_{n-1}, равный сумме углов между L_1 и $L_2, \ldots, L_{n-2}$ и L_{n-1}. Поэтому, не меняя общую сумму углов, можно исключить все кратчайшие $L_2, \ldots, L_{n-2}$. Останутся только три кратчайшие, а условия теоремы для них будут выполняться.

В первом случае кратчайшая $X_1 X_{n-1}$ неизменно пересекает L_n. Поэтому, если она не проходит через точку O, то, согласно той же теореме 3 § 1 гл. IV, существует угол между L_1 и L_{n-1}, равный сумме углов между L_1 и L_n, L_n и L_{n-1}. Если же $X_1 X_{n-1}$ проходит через точку O, то L_1 и L_{n-1} являются одна продолжением другой: угол между ними равен π и по теореме о сумме смежных углов равен сумме углов между L_1 и L_{n-1}, L_n и L_{n-1}. Следовательно, не меняя общую сумму углов, можно всегда исключить кратчайшую L_n. Условия теоремы будут выполняться для оставшихся кратчайших, и мы можем повторить применительно к ним наше рассуждение с тремя случаями. Это приведёт к тому, что рано или поздно мы придём к одной из следующих возможностей:

1) Останутся только две кратчайшие, и теорема будет доказана.

2) Придём к «третьему случаю», и опять теорема будет доказана.

3) Придём ко «второму случаю», причём останутся только три кратчайшие L_1, L_2, L_3. Только эту последнюю возможность и нужно рассмотреть.

Во «втором случае» кратчайшая $X_1 X_2$ не пересекает L_3 и, следовательно, неизменно проходит в секторе между L_1 и L_2 (теперь $n = 3$ и потому $n - 1 = 2$). Но, если бы, скажем, кратчайшая $X_2 X_3$ с концами на L_2 и L_3 при X_2 и X_3, сколь угодно близких к O, пересекала L_1, то, пользуясь предыдущим рассуждением (третий случай), мы получили бы, что сумма углов α_{12}, α_{23}, α_{31} не превосходит 2π. Поэтому остаётся рассмотреть такую возможность, когда никакая из кратчайших $X_1 X_2$, $X_2 X_3$, $X_3 X_1$ не пересекает соответственно L_3, L_1, L_2; иными

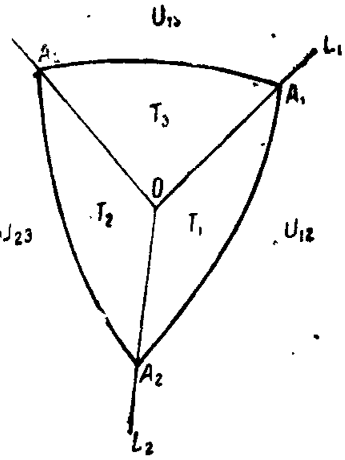
[1]) Например, $\gamma_{1n}(x_1, x_n)$ есть угол в плоском треугольнике со сторонами, равными $OX_1 = x_1$, $OX_n = x_n$, $X_1 X_n$, где X_n — точка пересечения кратчайшей $X_1 X_{n-1}$ с L_n.

словами, каждая из этих кратчайших неизменно остаётся в своём секторе, откуда следует, что секторы, ограниченные кратчайшими L_1, L_2, L_3, — выпуклые [1]).

Итак, нужно доказать следующее:

Если из точки O исходят кратчайшие L_1, L_2, L_3, разбивающие её окрестность на выпуклые секторы и такие, что никакие две из них не являются продолжением друг друга, то сумма углов между этими кратчайшими не превосходит 2π.

Для доказательства возьмём на L_1, L_2, L_3 точки X_1, X_2, X_3, достаточно близкие к O, и проведём кратчайшие X_iX_j. Они будут проходить каждая внутри своего сектора U_{ij}, потому что секторы — выпуклые и никакие две из кратчайших L_i не являются продолжением друг друга. Следовательно, точка O окажется внутри треугольника $X_1X_2X_3$.



Черт. 66.

Если точки X_1, X_2, X_3 взяты достаточно близко к точке O, то, согласно теореме, доказанной в § 4 гл. II, существует выпуклый геодезический треугольник T, содержащий треугольник $X_1X_2X_3$. Он характеризуется тем свойством, что среди всех геодезических треугольников, содержащих $X_1X_2X_3$, он имеет наименьший периметр. Вершины треугольника T либо совпадают с X_1, X_2, X_3, либо могут быть «не настоящими» вершинами, т. е. две стороны, сходящиеся в одной вершине, могут образовывать одну геодезическую. Так как секторы U_{ij}—выпуклые, то пересечения их с треугольником T тоже выпуклы, т. е. представляют собой выпуклые геодезические треугольники T_1, T_2, T_3 (черт. 66). Поэтому, если A_1 и A_2 — точки пересечения периметра треугольника T с кратчайшими L_1 и L_2, то в треугольнике $T_1 = TU_{12}$ существует кратчайшая $\overline{A_1A_2}$. Если бы сторона A_1A_2 треугольника T_1 не была кратчайшей, то, заменяя её кратчайшей $\overline{A_1A_2}$, мы получили бы вместо T новый геодезический треугольник, содержащий $X_1X_2X_3$ [2]) и имеющий меньший периметр. Это, однако, противоречило бы тому, что из всех треугольников, содержащих $X_1X_2X_3$, треугольник T имеет наименьший периметр. Следовательно, стороны треугольника T — кратчайшие, вершины его лежат на кратчайших L_1, L_2, L_3 и эти кратчайшие разделяют его на три «частичных» выпуклых треугольника T_1, T_2, T_3. Если точки X_1, X_2, X_3 взяты достаточно близко к точке O, то треугольник T будет достаточно мал, и тем самым мы показали, что существуют сколь угодно малые выпуклые треугольники T, обладающие указанными свойствами.

Пусть α_{12}, α_{23}, α_{31} — углы между нашими кратчайшими L_1, L_2, L_3. Допустим, вопреки доказываемому, что их сумма больше 2π, и положим

$$3\varepsilon = \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} - 2\pi > 0. \tag{1}$$

Пусть $\gamma_{ij}(x_i, x_j)$ обозначает, как всегда, угол в плоском треугольнике со сторонами, равными $OX_i = x_i$, $OX_j = x_j$, X_iX_j, лежащий против стороны X_iX_j. Так как $\lim\limits_{x_i, x_j \to 0} \gamma_{ij}(x_i, x_j) = \alpha_{ij}$, то можно взять столь малый выпуклый треуголь-

---

[1]) Пусть, например, точки X и Y лежат в секторе U_{12}, ограниченном L_1 и L_2. Пусть отрезок EF кратчайшей XY лежит вне U_{12}, причём точка E лежит на L_1. Тогда точка F не может лежать на L_1, как это следует из условия неналегания кратчайших (теорема 1 § 3 гл. II). Но точка F не может лежать и на L_2, потому что если E лежит на L_1, а F — на L_2, то EF пересекает L_3, что противоречит предположению о том, что никакая кратчайшая с концами на L_1 и L_2 не пересекает L_3. Следовательно, кратчайшая XY не может иметь отрезков вне сектора U_{12}, т. е. этот сектор — выпуклый.

[2]) A_1A_2 не может пересекать X_1X_2, как явствует из условия неналегания кратчайших.

ник $A_1A_2A_3$ с вершинами на кратчайших L_i, что для всех точек X_iX_j, лежащих на отрезках OA_i, OA_j будет

$$|\alpha_{ij}-\gamma_{ij}(x_i, x_j)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (i, j=1, 2, 3). \tag{2}$$

Треугольник $A_1A_2A_3$ разбивается кратчайшими L_1, L_2, L_3 на три треугольника OA_iA_j, каждый из которых — выпуклый, потому что секторы, ограниченные кратчайшими L_i, — выпуклые.

Пусть ω, ω_{ij} обозначают кривизны треугольников $A_1A_2A_3$, OA_iA_j $(i, j=1, 2, 3)$, т. е. суммы их углов без π. Углы треугольника $A_1A_2A_3$ слагаются из углов треугольников OA_iA_j, а потому

$$\omega_{12}+\omega_{23}+\omega_{31}=\omega+\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31}-2\pi,$$

или, вследствие (1),

$$\omega_{12}+\omega_{23}+\omega_{31}=\omega+3\varepsilon.$$

Так как $\omega\geqslant 0$, то среди чисел ω_{ij} хотя бы одно должно быть не меньше ε. Это будет всегда, как бы ни был мал треугольник $A_1A_2A_3$. Поэтому среди трёх данных треугольников OA_iA_j есть хотя бы один такой, что для сколь угодно малых содержащихся в нём аналогичных треугольников $OA_i'A_j'$ будет $\omega_{ij}'\geqslant\varepsilon$.

Допустим для определённости, что этим свойством обладает треугольник OA_1A_2. Возьмём на его сторонах OA_1, OA_2 точки X_1, X_2 и, проведя кратчайшую X_1X_2, получим содержащийся в нём треугольник OX_1X_2. По предположению, этот треугольник будет содержать такие треугольники $OA_1'A_2'$, для которых $\omega(OA_i'A_j')>\varepsilon$. Треугольник $OA_1'A_2'$ содержится в треугольнике OX_1X_2 и имеет вершины на его сторонах. Отсюда легко заключить, что $\omega(OX_1X_2)\geqslant\omega(OA_1'A_2')$[1]. Следовательно, для всяких точек X_1 и X_2, лежащих на сторонах,

$$\omega(OX_1X_2)\geqslant\varepsilon.$$

Обозначим углы треугольника OX_1X_2 при вершинах X_1 и X_2 через ξ_1 и ξ_2, а соответствующие углы плоского треугольника со сторонами той же длины — через ξ_{10}, ξ_{20}. Тогда

$$\alpha_{12}+\xi_1+\xi_2-\pi=\omega(OX_1X_2)\geqslant\varepsilon,$$
$$\gamma_{12}(x_1, x_2)+\xi_{10}+\xi_{20}-\pi=0$$

и, следовательно,

$$(\alpha_{12}-\gamma_{12})+(\xi_1-\xi_{10})+(\xi_2-\xi_{20})\geqslant\varepsilon.$$

Вместе с тем, в силу неравенства (2)

$$\alpha_{12}-\gamma_{12}(x_1, x_2)<\frac{\varepsilon}{2},$$

а потому

$$(\xi_1-\xi_{10})+(\xi_2-\xi_{20})>\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для всяких точек X_1 и X_2, т. е. при всяких x_1 и x_2, хотя бы одна из разностей $\xi_1-\xi_{10}$, $\xi_2-\xi_{20}$ не меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. Но если, скажем $\xi_1(x_1,x_2)-\xi_{10}(x_1, x_2)\geqslant\frac{\varepsilon}{4}$, то по лемме 4 § 2 существует такое $x_1'<x_1$, что

$$\gamma(x_1', x_2)-\gamma(x_1, x_2)>\sin^2\frac{\varepsilon}{8}\cdot\ln\frac{x_1}{x_1'}.$$

[1] Проведя $X_1A'_2$, разобьём треугольник OX_1X_2 на три: $OA_1'A_2'$, $X_1A_1'A_2'$, $X_2A_2'X_1$ Эти треугольники выпуклые. Поэтому они имеют углы, и простое сложение углов приводит к тому, что $\omega(OX_1X_2)=\omega(OA_1'A_2')+\omega(X_1A_1'A_2')+\omega(X_2A_2'X_1)$, и так как $\omega(X_1A_1'A_2')$ и $\omega(X_2A_2'X_1)\geqslant 0$, то $\omega(OX_1X_2)\geqslant\omega(OA_1'A_2')$.

Поэтому мы можем рассуждать буквально так же, как в доказательстве основной леммы о выпуклых треугольниках (§ 2). Смещая точки X, X_2 к точке O, начиная от A_1 и A_2 так, чтобы каждый раз угол $\gamma(x_1, x_2)$ получал соответствующее приращение, мы будем тогда получать такие его значения, что

$$\gamma(x_1, x_2)-\gamma(a_1, a_2)>\sin^2\frac{\varepsilon}{8}\ln\frac{a_1a_2}{x_1x_2},$$

где $a_1=OA_1$, $a_2=OA_2$. Но при x_1 и x_2 достаточно малых, правые части этого неравенства становятся сколь угодно большими, что абсурдно, так как $\gamma(x_1,x_2)\leqslant\pi$. Другая возможность, имеющаяся в основной лемме, а именно тот случай, что стороны OA_1 и OA_2 являются одна продолжением другой, исключается, так как, по условию, кратчайшие L_1, L_2, отрезками которых они являются, не суть продолжение одна другой. Получается противоречие, которое показывает невозможность сделанного предположения, что $\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31}>2\pi$. Следовательно, $\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31}\leqslant 2\pi$, что и требовалось доказать.

§ 5. Кривизна и две связанные с нею оценки.

Теперь мы можем ввести понятие о кривизне некоторых простых множеств в многообразии с метрикой положительной кривизны, аналогично тому, как это было сделано в § 1 гл. V. Существенная разница будет состоять в том, что вместо любых треугольников мы будем рассматривать только достаточно малые выпуклые треугольники и вместо любых точек — только те, вокруг которых определён полный угол. Согласно определению, данному в предыдущем параграфе, понятие полного угла приложимо пока лишь к тем точкам, окрестности которых разбиваются на выпуклые секторы. На самом деле это возможно для всех точек, но пока это не доказано, приходится оговаривать, что речь идёт только о таких точках.

Кривизну мы определяем для трёх типов основных множеств: внутренних областей выпуклых треугольников, кратчайших с исключёнными концами и точек. *Кривизна внутренней области выпуклого треугольника определяется как сумма его углов минус π. Кривизна кратчайшей с исключёнными концами полагается равной нулю. Кривизна точки определяется как разность между 2π и полным углом вокруг неё.* При таком определении кривизна не отрицательна, потому что углы выпуклого треугольника не меньше, чем у плоского, а полный угол вокруг точки $\leqslant 2\pi$. После этого можно было бы ввести «элементарные» множества и определить для них кривизну точно так же, как это было сделано в § 1 гл. V. Однако нам достаточно ограничиться теоремой о кривизне многоугольника.

Теорема. *Пусть выпуклый многоугольник P разбит на выпуклые треугольники $T_1,\ldots,T_n$ с вершинами $X_1,\ldots,X_m$, лежащими внутри P. Сумма кривизн внутренних областей треугольников T_i и кривизн вершин X_i не зависит от вида разбиения и выражается формулой*

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(T_i)+\sum_{i=1}^{m}\omega(X_i)=2\pi\chi-\sum_{j=1}^{k}(\pi-\alpha_j), \tag{1}$$

где χ — эйлерова характеристика, а α_j — углы многоугольника P.

Эта теорема буквально повторяет теорему 1 § 1 гл. V, с той лишь разницей, что речь идёт здесь специально о выпуклом многоугольнике. Но именно благодаря этому углы многоугольника заведомо существуют: это углы между его сторонами, которые ограничивают, конечно, выпуклые секторы. По той же причине угол многоугольника P равен сумме углов треугольников T_i с той же вершиной. Таким образом, чтобы получить доказательство данной теоремы, следует лишь дословно повторить доказательство теоремы 1 § 1 гл. V. Эта теорема приложена ко всякому выпуклому многоугольнику, потому что доказано, что такой многоугольник всегда можно разбить на выпуклые треугольники. Величину, выражаемую формулой (1), естественно назвать кривизной внутренней области многоугольника P.

Если многоугольник P гомеоморфен кругу, то $\chi = 1$ и формула (1) даёт:

$$\omega(P) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j - (k-2)\pi,$$

что в случае треугольника совпадает с определением его кривизны, данным выше. Если же P гомеоморфен сфере, то углы α_j отсутствуют, а $\chi = 2$, так что $\omega(P) = 4\pi$.

В формуле (I) *заключается два важных свойства кривизны: неотрицательность и аддитивность.* Первое следует из того, что все кривизны $\omega(T_i)$ и $\omega(X_i)$ не отрицательны. Второе получается простым сложением: *Если выпуклый многоугольник P составлен из выпуклых многоугольников P_i с вершинами Y_j, лежащими внутри P, то*

$$\omega(P) = \sum \omega(P_i) + \sum_j (Y_j), \tag{2}$$

где $\omega(P_i)$ обозначают кривизны внутренних областей многоугольников P_i. Чтобы доказать равенство (2), достаточно разбить многоугольники P_i на выпуклые треугольники и взять сумму кривизн внутренних областей этих треугольников и их вершин, лежащих внутри P.

Дальше, при рассмотрении приближения данной метрики положительной кривизны многогранными метриками, нам понадобятся две оценки, связанные с кривизной. Первая из них даётся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть ABC — достаточно малый выпуклый треугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны и X, Y — две точки на его сторонах AB и AC. Пусть x, y, z обозначают расстояния AX, AY, XY. Построим плоский треугольник $A_0B_0C_0$ со сторонами той же длины, что и у ABC, т. е. такой, что $A_0B_0 = AB$ и т. д. На его сторонах A_0B_0, A_0C_0 возьмём точки X_0, Y_0 так, что $A_0X_0 = x$, $A_0Y_0 = y$, и положим $X_0Y_0 = z_0$. Тогда, если ω — кривизна внутренней области треугольника ABC, а d — длина его наибольшей стороны, то*

$$|z - z_0| \leqslant \omega d.$$

Эта лемма буквально повторяет теорему 2 § 6 гл. V, и доказательство её то же самое, потому что в нём не используется ничего, кроме аддитивности кривизны и элементарной тригонометрии. Следовательно, лемму 1 можно считать доказанной.

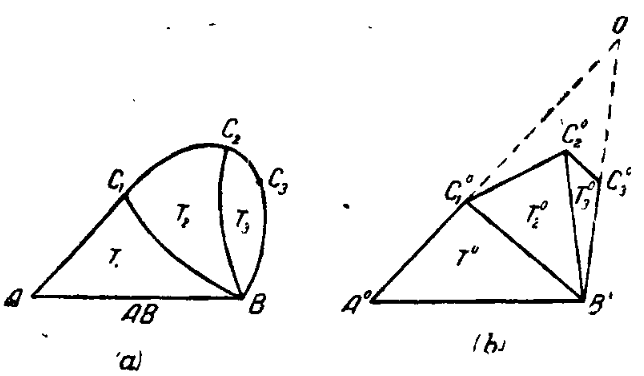
Другая оценка, также интересная сама по себе, выражается следующей леммой:

Лемма 2. *Пусть две точки A и B в многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны соединены кратчайшей AB и ещё некоторой геодезической $\overline{AB}$ так, что эти линии ограничивают двуугольник D, гомеоморфный кругу. Пусть a и b обозначают соответственные длины линий AB и $\overline{AB}$, а ω — кривизну внутренней области двуугольника D (т. е. сумму его углов, как ясно из определения кривизны). Тогда, если $\omega < \pi$, то*

$$a \geqslant b \cos\frac{\omega}{2}.$$

Доказательство. Вырежем двуугольник D из данного многообразия и, взяв второй экземпляр D' такого же двуугольника, отождествим у них соответственные стороны. В результате получится многообразие $D + D'$, гомеоморфное сфере. На нём естественно определится многогранная метрика положительной кривизны, потому что углы двуугольников меньше $<\pi$ и, следовательно, полный угол вокруг всякой точки многообразия будет не больше 2π.

По теореме о реализуемости многогранной метрики положительной кривизны, многообразие $D+D'$ изометрично замкнутому выпуклому многограннику, а сам двуугольник D изометричен, так сказать, половине этого многогранника. Впрочем, это замечание нам, собственно говоря, не нужно. Важно только то, что двуугольник D оказывается выпуклым в многообразии $D+D'$. Действительно, если точки X,Y двуугольника D соединены в $D+D'$ кратчайшей, которая на отрезке $\overline{X_1Y_1}$ проходит в D', то вследствие полной симметрии между D и D', в самом D есть кратчайшая X_1Y_1. Заменяя отрезок $\overline{X_1Y_1}$ этою кратчайшею X_1Y_1 и делая так для всех отрезков, проходящих в D', получим кратчайшую XY, проходящую полностью в двуугольнике D. Следовательно, дальше можно рассуждать так, как если бы двуугольник D был выпуклым, хотя в исходном многообразии он мог и не быть выпуклым.



Черт. 67.

Так как геодезическая $\overline{AB}$ является кратчайшей на всяком достаточно малом отрезке, то мы можем разбить её на отрезки, каждый из которых будет кратчайшей. Если два соседних отрезка вместе образуют одну кратчайшую, то мы соединим этот отрезок в один. Проделав такие операции, мы придём, в конце концов, к разбиению линии $\overline{AB}$ точками A, C_1, $C_2, \ldots$, C_n, B, на такие кратчайшие $\overline{AC_1}$, $\overline{C_1C_2}, \ldots$, $\overline{C_nB}$, что никакая пара из них не будет образовывать вместе одну кратчайшую. Так как линия $\overline{AB}$ — геодезическая, то точек C_i не будет вовсе только тогда, когда $\overline{AB}$ — тоже кратчайшая. В таком случае $a=b$, и лемма тривиальна. Поэтому мы можем считать, что точки C_i существуют.

Проведём в двуугольнике D кратчайшие BC_1, $BC_2, \ldots$, BC_n (черт. 67, a). Они не могут проходить через вершину A, потому что угол при этой вершине меньше π. (По условию леммы даже сумма углов при вершинах A и B меньше π.) Кроме того, эти линии не будут пересекаться. Все они, кроме BC_n, проходят внутри двуугольника, потому что, по выбору точек C_i, ни один из отрезков $\overline{BC_i}$ линии $\overline{AB}$ не будет кратчайшей, кроме отрезка $\overline{BC_n}$, который, напротив, является кратчайшей [1]). Мы берём линию BC_n так, чтобы она совпадала с $\overline{BC_n}$. Из сказанного ясно, что линии $BC_1, \ldots$, BC_{n-1} разобьют двуугольник на треугольники $T_1=BAC_1$, $T_2=BC_1C_2, \ldots$, $T_n=BC_{n-1}C_n$, стороны которых будут кратчайшими.

Построим теперь на плоскости треугольники $T_1^0=B^0A^0C_1^0$, $T_2^0=B^0C_1^0C_2^0, \ldots$, $T_n^0=B^0C^0_{n-1}C_n^0$ со сторонами, равными сторонам треугольников T_1, $T_2, \ldots$, T_n. Эти треугольники T_i^0 мы прикладываем друг к другу так же, как приложены друг к другу треугольники T_1, $T_2, \ldots$, T_n (черт. 67, b). В результате мы получаем многоугольник Q_n, и я утверждаю, что он выпуклый.

Для доказательства представим себе, что многоугольник Q_n получается последовательным прикладыванием треугольников друг к другу. Тогда мы получаем сперва треугольник $Q_1=T_1^0$, потом четырёхугольник $Q_2=T_1^0+T_2^0$ и т. д. То, что все они — выпуклые, докажем по индукции. Треугольник $Q_1=T_1^0$

---

[1]) То, что линии BC_i проходят внутри двуугольника и не пересекаются, следует из общих свойств кратчайших в многогранной метрике положительной кривизны (см. § 2 гл. III).

очевидно, выпуклый. Пусть мы уже убедились в том, что многоугольник Q_k — выпуклый. Многоугольник Q_{k+1} получается из Q_k прикладыванием к стороне его $B^0C_k^0$ треугольника $T^0_{k+1}=B^0C_k^0C^0_{k+1}$. При этом угол при вершине B^0 остаётся меньше π. Действительно, этот угол составлен из углов треугольников $T_1^0, \ldots, T^0_{k+1}$, а углы этих треугольников не больше соответствующих углов треугольников $T_1, \ldots, T_{k+1}$ [1]), сумма же углов треугольников $T_1, \ldots, T_{k+1}$ при вершине B не больше π, так как, по условию леммы, даже сумма углов двуугольника D меньше π.

Угол при вершине C_k^0 в многоугольнике Q_{k+1} составлен из углов треугольников T_k^0 и T^0_{k+1}, которые не больше соответствующих углов треугольников T_k и T_{k+1}. А сумма этих последних углов равна углу между двумя отрезками $\overline{C_{k-1}C_k}$, $\overline{C_kC_{k+1}}$ геодезической $\overline{AB}$, т. е. равна π. Следовательно, когда многоугольник Q_{k+1} получается из Q_k прикладыванием к Q_k треугольника T^0_{k+1}, то углы при вершинах B^0 и C_k^0 остаются не больше π. Отсюда ясно, что если Q_k был выпуклым, то и Q_{k+1} будет выпуклым. Этим выпуклость многоугольника Q_n доказана.

Сторона A^0B^0 многоугольника Q_n соответствует кратчайшей AB, а ломаная $\overline{A^0B^0}=A^0C_1^0\ldots C_n^0B^0$ соответствует геодезической $\overline{AB}$. При этом, в смысле равенства длин

$$A^0B^0=AB=a, \quad \overline{A^0B^0}=\overline{AB}=b.$$

Углы α_0 и β_0 при вершинах A^0 и B^0 в многоугольнике Q_n будут не больше, чем углы α и β при вершинах A и B нашего двуугольника. Это ясно из того, что, при переходе от треугольников T_i к T_i^0, углы не увеличиваются. Итак,

$$\alpha_0\leqslant\alpha, \quad \beta_0\leqslant\beta,$$

и потому

$$\alpha_0+\beta_0\leqslant\alpha+\beta=\omega<\pi. \tag{3}$$

Продолжим стороны многоугольника Q_n, исходящие из вершин A^0 и B^0 так, как указано на черт. 57, b. Они при этом пересекутся в некоторой точке O, потому что $\alpha_0+\beta_0<\pi$. Пусть c и d — длины сторон A^0O и B^0O треугольника A^0B^0O. Очевидно, в силу выпуклости ломаной $\overline{A^0B^0}$, $A^0O+B^0O\geqslant\overline{A^0B^0}$, т. е.

$$c+d\geqslant b. \tag{4}$$

Если γ_0 — угол при вершине O в треугольнике A^0B^0O, то

$$a\geqslant(c+d)\sin\frac{\gamma_0}{2}. \tag{5}$$

Действительно, среди всех треугольников с данным основанием a и противолежащим ему углом γ_0 наибольшую сумму боковых сторон имеет равнобедренный треугольник. А если $2l$ — сумма боковых сторон такого равнобедренного треугольника, то

$$a=2l\sin\frac{\gamma_0}{2},$$

и так как $2l\geqslant c+d$, то отсюда и следует (5).

Так как $\alpha_0+\beta_0+\gamma_0=\pi$, а по (3) $\alpha_0+\beta_0\leqslant\omega$, то

$$\sin\frac{\gamma_0}{2}=\cos\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\geqslant\cos\frac{\omega}{2}. \tag{6}$$

[1]) Углы треугольника на выпуклом многограннике не меньше углов плоского треугольника со сторонами той же длины.

Используя это неравенство и неравенство (4), мы из (5) немедленно получаем

$$a \geqslant b \cos \frac{\omega}{2},$$

что и требовалось доказать.

(Заметим, что оценка, данная в лемме 2, может быть точно так же доказана для двуугольников в многообразии с любой метрикой положительной кривизны, если воспользоваться теоремой о склеивании, которая будет доказана в § 1 гл. VIII. Эта оценка является точной, т. е. при всяких $a < b$ и $\omega < \pi$ можно построить такой двуугольник на выпуклом многограннике, что для него $a - b \cos \frac{\omega}{2}$ будет сколь угодно мало.)

§ 6. Приближение к метрике положительной кривизны многогранной метрикой.

Пусть выпуклый многоугольник P в многообразии с метрикой положительной кривизны разбит на малые выпуклые треугольники T_i, причём у треугольников T_i сумма каждых двух сторон больше третьей. По теореме § 6 гл. II такое разбиение возможно. Поставим в соответствие каждому треугольнику T_i плоский треугольник $\overline{T}_i$ со сторонами той же длины. Треугольники $\overline{T}_i$ не будут вырождаться в отрезки, так как у них сумма каждых двух сторон больше третьей. Поэтому треугольники T_i можно отобразить на соответствующие треугольники $\overline{T}_i$ гомеоморфно. Так как стороны треугольников T_i и $\overline{T}_i$ соответственно равны, то это отображение можно произвести так, чтобы соответствующие друг другу при отображении отрезки сторон треугольников T_i и $\overline{T}_i$ имели равные длины. Стороны треугольников T_i, не лежащие на границе многоугольника P, налегают друг на друга; и если отрезок стороны треугольника T_j совпадает с отрезком стороны треугольника T_k, то мы отождествляем друг с другом соответствующие отрезки сторон треугольников $\overline{T}_j$ и $\overline{T}_k$. В результате из треугольников $\overline{T}_i$ составится развёртка $\overline{P}$, гомеоморфная многоугольнику P. (В этой развёртке треугольники $\overline{T}_i$ прилегают друг к другу, вообще говоря, не целыми сторонами, так как треугольники T_i могут не прилегать целыми сторонами.)

В развёртке $\overline{P}$ естественно определяется метрика $\overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y})$. За расстояние между точками $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ в развёртке $\overline{P}$ принимается длина кратчайшей кривой, соединяющей эти точки. Длина кривой в развёртке определяется сама собою, поскольку в каждом треугольнике $\overline{T}_i$ длина отрезка кривой определена в силу того, что этот треугольник — плоский. Кратчайшая же кривая существует, так как развёртка $\overline{P}$ составлена из конечного числа треугольников и, следовательно, компактна. (Здесь мы несколько обобщаем понятие о развёртке, введённое в гл. I, так как в развёртке $\overline{P}$ стороны треугольников, образующие её границу, если эта граница существует, не склеиваются ни с какими сторонами других треугольников.)

При переходе от треугольников T_i к плоским треугольникам $\overline{T}_i$ со сторонами той же длины, углы, в силу теоремы 2 § 3, не увеличиваются. Сумма углов треугольников T_i вокруг одной точки, лежащей внутри многоугольника P, равна полному углу вокруг этой точки и, следовательно, не больше 2π. Поэтому суммы углов вокруг внутренних вершин развёртки $\overline{P}$ также будут не больше 2π. Следовательно, многогранная метрика $\overline{\rho}$ в развёртке $\overline{R}$ есть метрика положительной кривизны.

(Нужно, правда, заметить, что если развёртка имеет границу, то у точек её границы нет окрестности, гомеоморфной кругу, и потому развёртка не представляет собой многообразия. Но обобщая здесь понятие о многогранной метрике, можно считать, что в развёртке $\overline{P}$ определяется многогранная метрика. Можно, впрочем, обойтись и без этого обобщения, если ограничиться только внутренней частью развёртки $\overline{P}$. Действительно, углы выпуклого многоугольника P не превосходят π. Поэтому углы при внешних вершинах развёртки $\overline{P}$ тем более не превосходят π, так как при переходе от треугольников T_i к треугольникам $\overline{T}_i$ углы не возрастают. Следовательно, развёртка $\overline{P}$ представляет собою многогранный многоугольник с углами, не превосходящими π. А в таком многоугольнике кратчайшая в нём линия, соединяющая его внутренние точки, должна проходить внутри него. Поэтому, ограничиваясь только внутренней частью $\overline{P}$, мы получим многообразие с многогранной метрикой положительной кривизны, в котором любые две точки можно соединить кратчайшей.)

Наконец, сделаем ещё одно замечание, которое нам будет дальше полезно. Пусть $\overline{\alpha}_j$ — углы на границе развёртки $\overline{P}$, а $\chi(\overline{P})$ — её эйлерова характеристика. Тогда кривизна её внутренней части будет

$$\omega(\overline{P}) = 2\pi\chi(\overline{P}) - \sum(\pi - \overline{\alpha}_j).$$

Так как развёртка $\overline{P}$ и многоугольник P одинаково составляются из треугольников $\overline{T}_i$ и T_i, то их эйлеровы характеристики равны: $\chi(\overline{P}) = \chi(P)$. Далее, так как при переходе к плоским треугольникам углы не увеличиваются, то углы на границе $\overline{P}$ не больше соответствующих углов α_j многоугольника P, т. е. $\overline{\alpha}_j \leqslant \alpha_j$. Поэтому из данного выражения кривизны следует, что $\omega(\overline{P}) \leqslant \omega(P)$. Всё сказанное можно коротко резюмировать в виде следующей леммы:

Лемма 1. *Если выпуклый многоугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны разбит на малые выпуклые треугольники, то, заменяя каждый из этих треугольников плоским треугольником со сторонами той же длины, мы получаем многогранную метрику положительной кривизны, определённую развёрткой, все углы на границе которой $\leqslant \pi$. Кривизна этой развёртки не больше кривизны многоугольника.*

Пусть X и Y — две точки из нашего многоугольника P, а $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — те точки в развёртке $\overline{P}$, в которые отображаются X и Y в силу установленных нами отображений треугольников T_i на треугольники $\overline{T}_i$. Пусть $\overline{\rho}(\overline{X}\,\overline{Y})$ — расстояние между точками $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, измеренное в развёртке $\overline{P}$, а $\rho(XY)$ — расстояние между X и Y в рассматриваемой метрике. Нашей задачей будет — оценить разность $\overline{\rho}(\overline{X}\,\overline{Y}) - \rho(XY)$. Здесь мы докажем прежде всего следующее:

Лемма 2. *Если диаметры треугольников T_i, на которые разбит многоугольник P, не превосходят d, а кривизна внутренней области многоугольника P равна ω, то для всякой пары точек X и Y из P*

$$\overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y}) < \rho(XY) + (\omega + 2)\, d. \tag{1}$$

Доказательство. Возьмём кратчайшую L в данной метрике ρ, соединяющую точки X и Y многоугольника P. Так как он — выпуклый, то можно считать, что L проходит в этом многоугольнике по каким-то треугольникам T_i; а так как все эти треугольники — выпуклые, то в каждом из них она имеет только один отрезок. Перенумеруем эти отрезки и треугольники, по которым они проходят, в порядке их расположения на кратчайшей L, начиная от точки X и кончая точкой Y: $L_1, L_2, \ldots, L_n$ и $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Концам отрезка L_i в треугольнике T_i соответствуют определённые точки в треугольнике $\overline{T}_i$, и мы сопоставляем отрезку L_i прямолинейный отрезок $\overline{L}_i$;

соединяющий эти точки в треугольнике $\overline{T_i}$. В результате всей кратчайшей L ставится в соответствие ломаная $\overline{L}$ в развёртке $\overline{P}$, составленная из отрезков $\overline{L_i}$ и соединяющая точки $\overline{X}$ и $\overline{Y}$. Оценим длину $\overline{s}(\overline{L})$ этой ломаной.

Так как стороны треугольников T_i и $\overline{T_i}$ равны, то диаметры треугольников $\overline{T_i}$ также не больше d. Поэтому длина каждого отрезка $\overline{L_i}$ не больше d, и потому заведомо $\overline{s}(\overline{L_i}) < s(L_i) + d$, где $\overline{s}$ и s — длины, измеренные соответственно в $\overline{P}$ и P. В частности, для первого и последнего отрезков мы имеем:

$$\overline{s}(\overline{L_1}) < s(L_1) + d, \quad \overline{s}(\overline{L_n}) < s(L_n) + d. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь другие отрезки (если они существуют). Отрезок L_i, войдя в треугольник T_i в какой-то точке A, выходит из него в какой-то точке B. Если они лежат на одной стороне этого треугольника, то L_i сводится к отрезку AB этой стороны, а отрезок $\overline{L_i}$ будет отрезком $\overline{AB}$ соответствующей стороны треугольника $\overline{T_i}$. По условию, соответственные отрезки сторон треугольников T_i и $\overline{T_i}$ имеют равные длины, а потому в этом случае

$$\overline{s}(\overline{L_i}) = s(L_i). \tag{3}$$

Если же концы A и B отрезка L_i лежат на разных сторонах треугольника T_i, то концы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ отрезка лежат на соответственных сторонах треугольника $\overline{T_i}$ и отсекают на них отрезки той же длины, какие отсекают точки A, B на сторонах треугольника T_i. Поэтому, согласно лемме 1 предыдущего параграфа,

$$\overline{s}(\overline{L_i}) \leqslant s(L_i) + \omega_i d, \tag{4}$$

где ω_i — кривизна треугольника T_i.

Длины $s(L)$ и $\overline{s}(\overline{L})$ линий L и $\overline{L}$ равны суммам длин их отрезков. Поэтому, суммируя длины этих отрезков и пользуясь формулами (2), (3), (4), мы получаем, что

$$\overline{s}(\overline{L}) < s(L) + \left[2 + \sum_{i=1}^{n} \omega_i\right] d. \tag{5}$$

Так как кратчайшая L проходит через каждый треугольник не более одного раза, то в сумме, стоящей в неравенстве (5), каждый треугольник, т. е. каждое из ω_i, встречается не более одного раза. Вместе с тем, в силу неотрицательности и аддитивности кривизны все $\omega_i \geqslant 0$, а сумма их по всем треугольникам разбиения не больше кривизны ω многоугольника P. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \leqslant \omega. \tag{6}$$

Так как L — кратчайшая, то

$$s(L) = \rho(XY), \tag{7}$$

а так как расстояние $\overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y})$ есть нижняя граница длин кривых, соединяющих точки $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, то

$$\overline{s}(\overline{L}) \geqslant \overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y}). \tag{8}$$

Принимая во внимание (6), (7) и (8), мы получаем из (5):

$$\overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y}) < \rho(XY) + (2 + \omega) d,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть выпуклый многоугольник P, гомеоморфный кругу и имеющий кривизну внутренней области $\omega < \pi$, разбит на малые выпуклые* *треугольники так, что диаметры этих треугольников не превосходят d. Тогда для каждой пары точек X и Y из P*

$$|\rho(XY)-\bar{\rho}(\bar{X}\bar{Y})|<Cd,$$

где ρ и $\bar{\rho}$ имеют тот же смысл, что и раньше, а C — постоянная. Можно взять $C=14$ для всех P, удовлетворяющих указанным условиям. В доказательстве устанавливается, что

$$C=2\omega+\frac{\omega^2}{2}+2.$$

Доказательство. В силу предыдущей леммы, достаточно, очевидно, установить существование такой постоянной C, что

$$\rho(XY)<\bar{\rho}(\bar{X}\bar{Y})+Cd.$$

Для доказательства рассмотрим кратчайшую $\bar{L}$ в развёртке $\bar{P}$, соединяющую точки $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Она проходит по каким-то треугольникам $\bar{T}_i$, но априори может иметь в одном треугольнике более одного отрезка, так как ещё неизвестно, будут ли эти треугольники выпуклыми в метрике $\bar{\rho}$, имеющейся в развёртке $\bar{P}$. Поэтому доказательство не может быть проведено простым повторением доказательства предыдущей леммы с заменой ρ на $\bar{\rho}$ и обратно.

Будем проходить кратчайшую $\bar{L}$ от точки $\bar{X}$ к точке $\bar{Y}$.

Первый отрезок $\bar{L}_1=\bar{X}\bar{Z}$ кратчайшей $\bar{L}$, лежащий в том треугольнике $\bar{T}_i$, в каком лежит точка $\bar{X}$, мы заменяем кратчайшей XZ, соединяющей соответствующие точки X и Z в треугольнике T_i. Точно так же мы поступаем с последним отрезком $\bar{L}_n$ кратчайшей $\bar{L}$. Для соответствующих этим отрезкам кратчайших L_1 и L_n в многоугольнике P мы имеем $s(L_1)\leqslant d$, $s(L_n)\leqslant d$. А потому

$$s(L_1)<s(\bar{L}_1)+d, \quad s(L_n)<s(\bar{L}_n)+d. \tag{9}$$

Выйдя из того треугольника, где лежит точка $\bar{X}$, кратчайшая $\bar{L}$ попадает в другой треугольник $\bar{T}_j$. Здесь может быть три случая:

1) $\bar{L}$ проходит по стороне этого треугольника $\bar{T}_j$, имея с ней общий отрезок $\bar{L}_2$. Тогда мы берём в L соответствующий отрезок L_2 стороны треугольника T_j и для длин получаем:

$$s(L_2)=\bar{s}(\bar{L}_2). \tag{10}$$

2) $\bar{L}$ пересекает сторону $\bar{a}$ треугольника $\bar{T}_j$ в точке $\bar{A}$ и дальше уже нигде не пересекает сторону $\bar{a}$. Тогда она выходит из этого треугольника в какой-то точке $\bar{B}$, лежащей на другой его стороне $\bar{b}$. Отрезок $\bar{L}_2=\bar{A}\bar{B}$ кратчайшей $\bar{L}$ мы заменяем соответствующей кратчайшей $L_2=AB$ в треугольнике T_j. Тогда, в силу леммы 1 предыдущего параграфа,

$$s(L_2)\leqslant\bar{s}(\bar{L}_2)+\omega(T_j)\,d. \tag{11}$$

3) $\bar{L}$ пересекает сторону $\bar{a}$ в точке $\bar{A}$ и дальше снова пересекает её в точке $\bar{B}$ (черт. 68)[1]. Тогда весь отрезок $\bar{L}_2$ кратчайшей $\bar{L}$ между точками $\bar{A}$ и $\bar{B}$ мы заменяем отрезком $L_2=AB$ соответствующей стороны a в треугольнике T_j. Так

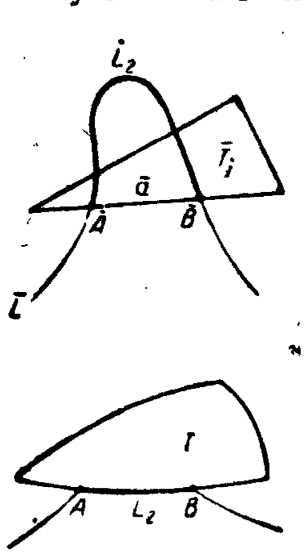
[1] Черт. 68 имеет «топологический характер»: размеры не соблюдены — на самом деле $\bar{L}_2$ короче $\bar{A}\bar{B}$.

как стороны треугольников T_j и $\overline{T}_j$ отображены друг на друга изометрически, то длина отрезка AB стороны a равна длине отрезка $\overline{AB}$ стороны $\overline{a}$:

$$s(L_2) \equiv s(AB) = \overline{s}(\overline{AB}). \tag{12}$$

Отрезок $\overline{L}_2$ кратчайшей $\overline{L}$ и отрезок $\overline{AB}$ стороны $\overline{a}$ образуют простую замкнутую кривую, и так как развёртка $\overline{P}$ гомеоморфна кругу, то, по теореме Жордана, эта кривая ограничивает область, гомеоморфную кругу. Следовательно, отрезки $\overline{L}_2$ и $\overline{AB}$ ограничивают геодезический двуугольник, причём отрезок $\overline{L}_2$ является кратчайшей.

Кривизна $\omega(\overline{D})$ этого двуугольника $\overline{D}$ не больше кривизны всей развёртки $\overline{P}$, а, как было показано выше, кривизна развёртки $\overline{P}$ не больше кривизны ω многоугольника P и так как, по предположению, $\omega < \pi$, то $\omega(\overline{D}) < \pi$. Следовательно, мы можем воспользоваться леммой 2 предыдущего параграфа и получим тогда, что



Черт. 68.

$$\overline{s}(\overline{L}_2) \geqslant \overline{s}(\overline{AB}) \cos \frac{\omega(\overline{D})}{2},$$

или, в силу (12),

$$\overline{s}(\overline{L}_2) \geqslant s(L_2) \cos \frac{\omega(\overline{D})}{2}.$$

Отсюда, после простого преобразования,

$$s(L_2) \leqslant \overline{s}(\overline{L}_2) + \left(1 - \cos \frac{\omega(\overline{D})}{2}\right) s(L_2).$$

А так как $s(L_2) = s(AB)$, очевидно, не больше диаметра треугольника T_j и тем самым не больше d, то

$$s(L_2) \leqslant \overline{s}(\overline{L}_2) + \left(1 - \cos \frac{\omega(\overline{D})}{2}\right) d. \tag{13}$$

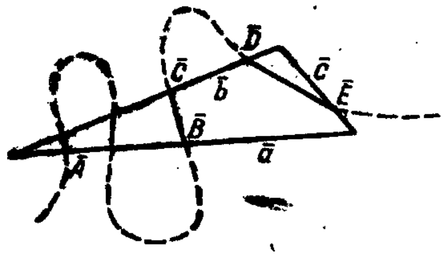
Если кратчайшая $\overline{L}$ пересекает сторону $\overline{a}$ в третий раз в какой-то точке $\overline{C}$, то мы опять получаем двуугольник с вершинами $\overline{B}$ и $\overline{C}$ и с ним мы поступаем точно так же.

Такие замены отрезков кратчайшей $\overline{L}$ отрезками L_i в многоугольнике P мы проделываем и дальше во всех треугольниках, по которым последовательно проходит $\overline{L}$. При этом уже заменённый отрезок $\overline{L}_i$ целиком исключается из рассмотрения при следующих заменах. В результате кратчайшая $\overline{L}$ будет заменена линией L в многоугольнике P, соединяющей точки X и Y. Длины $\overline{s}(\overline{L})$ и $s(L)$ линий $\overline{L}$ и L равны суммам длин их отрезков. Поэтому, суммируя все эти отрезки и пользуясь соотношениями (9), (10), (11), (13), применёнными — каждое в своём случае — ко всем отрезкам, мы получим, что

$$s(L) < \overline{s}(\overline{L}) + \left[2 + \sum_i \omega(T_i) + \sum_j \left(1 - \cos \frac{\omega(\overline{D}_j)}{2}\right)\right] d. \tag{14}$$

Здесь первая сумма берётся по треугольникам T_i, соответствующим тем $\overline{T}_i$, внутри которых имеются отрезки линии $\overline{L}$, не вошедшие в двуугольники, а вторая сумма берётся по всем двуугольникам $\overline{D}_j$.

Я утверждаю, во-первых, что в первую сумму каждый треугольник входит не более двух раз. Действительно, пусть кратчайшая $\overline{L}$ входит в треугольник $\overline{T}_i$ в точке $\overline{A}$, лежащей на стороне $\overline{a}$ (черт. 69). Если она опять пересекает эту сторону, то мы имеем двуугольник. Пройдя все такие двуугольники с вершинами на стороне $\overline{a}$, мы можем опять войти в $\overline{T}_i$ в некоторой точке $\overline{B}$. Но так как все двуугольники с вершинами на стороне $\overline{a}$ уже пройдены, то $\overline{L}$ больше не будет пересекать сторону $\overline{a}$. Войдя в треугольник $\overline{T}_i$ в точке $\overline{B}$, она выйдет из него в какой-то точке $\overline{C}$, лежащей на другой стороне $\overline{b}$. Отрезок $\overline{B}\overline{C}$ есть первый отрезок, лежащий в треугольнике $\overline{T}_i$ и не принадлежащий никакому из рассмотренных двуугольников. Далее, кратчайшая $\overline{L}$ может образовывать двуугольники с вершинами на стороне $\overline{b}$. Пройдя все эти двуугольники, мы можем ещё в последний раз, пересекая сторону $\overline{b}$ в какой-то точке $\overline{D}$, войти в треугольник $\overline{T}_i$. Но ни сторону $\overline{a}$, ни сторону $\overline{b}$ мы больше пересечь не можем, так как все двуугольники с вершинами на этих сторонах уже рассмотрены.

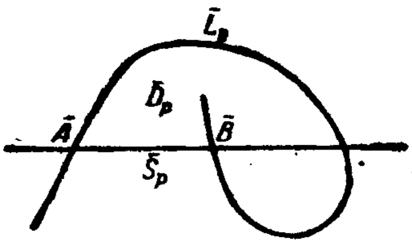


Черт. 69.

Поэтому мы должны выйти из треугольника $\overline{T}_i$ через третью сторону $\overline{c}$, пересекая её в какой-то точке $\overline{E}$. Больше мы не можем вернуться к треугольнику $\overline{T}_i$, так как, проходя по нему, мы должны были бы пересечь две его стороны [1]), а между тем ни $\overline{a}$, ни $\overline{b}$ мы не будем больше пересекать. Следовательно, отрезок $\overline{D}\overline{E}$ есть второй и последний отрезок кратчайшей $\overline{L}$, не включённый ни в какой двуугольник.

Этим доказано, что в первую сумму в формуле (14) каждый треугольник T_i может входить не более двух раз. А так как все кривизны треугольников T_i неотрицательны и сумма их по всем вообще треугольникам не больше кривизны ω многоугольника P, то

$$\sum_i \omega(T_i) \leqslant 2\omega. \qquad (15)$$



Черт. 70.

Докажем теперь, что никакие два из рассматриваемых нами двуугольников $\overline{D}$ не имеют общих внутренних точек.

Допустим, что двуугольники $\overline{D}_p$ и $\overline{D}_q$ имеют общие внутренние точки. Эти двуугольники ограничены отрезками $\overline{L}_p$ и $\overline{L}_q$ кратчайшей $\overline{L}$ и отрезками $\overline{S}_p$ и $\overline{S}_q$ сторон каких-то треугольников $\overline{T}_i$. Отрезки $\overline{L}_p$ и $\overline{L}_q$ не пересекаются как части одной кратчайшей. Отрезки $\overline{S}_p$ и $\overline{S}_q$ не пересекаются, так как стороны никаких треугольников $\overline{T}_i$ не пересекаются. Так как, по предположению, двуугольники $\overline{D}_p$ и $\overline{D}_q$ имеют общие внутренние точки, то возможны два случая: 1) один из них лежит внутри другого; скажем, $\overline{D}_q$ лежит внутри $\overline{D}_p$; 2) границы $\overline{D}_p$ и $\overline{D}_q$ пересекаются. Но так как отрезки $\overline{L}_p$ и $\overline{L}_q$, $\overline{S}_p$ и $\overline{S}_q$ не могут пересекаться, то во втором случае, например, отрезок $\overline{L}_q$ пересекает $\overline{S}_p$ и входит, следовательно, в двуугольник $\overline{D}_p$.

В первом случае, когда $\overline{D}_q$ лежит внутри $\overline{D}_p$, отрезок $\overline{L}_q$ лежит внутри $\overline{D}_p$. Следовательно, в обоих случаях можно считать, что кратчайшая $\overline{L}$ входит внутрь двуугольника $\overline{D}_p$ (см. черт. 70). Поэтому, идя от начала отрезка $\overline{L}_p$ вдоль $\overline{L}$, мы должны будем рано или поздно пересечь $\overline{S}_p$ и войти в двуугольник $\overline{D}_p$.

[1]) $\overline{L}$ — кратчайшая и потому каждый её отрезок в $\overline{T}_i$ прямолинейный.

Если $\overline{A}$ — начало $\overline{L}_p$, а $\overline{B}$ — первая точка пересечения $\overline{L}$ с $\overline{S}_p$, то мы получаем двуугольник $\overline{D}$ с вершинами $\overline{A}$ и $\overline{B}$: одна его сторона есть отрезок $\overline{A}\overline{B}$ кратчайшей $\overline{L}$, а другая — отрезок $\overline{A}\overline{B}$ линии $\overline{S}_p$. Так как в точке $\overline{B}$ кратчайшая $\overline{L}$ входит в $\overline{D}$, то угол в двуугольнике $\overline{D}$ при вершине $\overline{B}$ больше π. Тем самым кривизна двуугольника $\overline{D}$ подавно больше π. Это, однако, невозможно, так как его кривизна не больше кривизны $\omega(\overline{P})$ всей развёртки $\overline{P}$, а $\omega(\overline{P}) \leqslant \omega(P) < \pi$. Следовательно, доказано, что наши двуугольники $\overline{D}_j$ не имеют общих внутренних точек.

В таком случае, сумма их кривизн не превосходит кривизн $\omega(\overline{P})$ всей развёртки:

$$\sum_i \omega(\overline{D}_j) \leqslant \omega(\overline{P}) \leqslant \omega(P) < \pi.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_j \left(1 - \cos\frac{\omega(\overline{D}_j)}{2}\right) = \sum_j 2\sin^2\frac{\omega(\overline{D}_j)}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_j \frac{1}{2}\omega(\overline{D}_j)^2 \leqslant \frac{\omega(\overline{P})}{2}\sum_j \omega(\overline{D}_j) \leqslant \frac{\omega^2}{2}. \qquad (16)$$

Теперь, подставляя неравенства (15) и (16) в неравенство (14), мы получаем:

$$s(L) < \overline{s}(\overline{L}) + \left(2\omega + \frac{\omega^2}{2} + 2\right)d. \qquad (17)$$

Кроме того, так как $\overline{L}$ — кратчайшая, то

$$\overline{s}(\overline{L}) = \overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y});$$

и так как расстояние $\rho(XY)$ не может быть больше длины кривой, соединяющей точки X и Y, то

$$s(L) \geqslant \rho(XY).$$

Поэтому из неравенства (17) следует, что

$$\rho(XY) < \overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y}) + Cd,$$

где

$$C = 2\omega + \frac{\omega^2}{2} + 2.$$

Сравнивая это с формулой (1) леммы 1, мы видим, что

$$|\rho(XY) - \overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y})| < Cd,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если уточнить наши рассуждения и разумно выбрать отображения треугольников T на $\overline{T}_i$, то можно, повидимому, получить оценку:

$$0 \leqslant \rho(XY) - \overline{\rho}(\overline{X}\overline{Y}) \leqslant \omega d,$$

которая уже не может быть улучшена.

§ 7. Реализуемость метрики положительной кривизны, заданной на сфере.

Теперь мы докажем нашу основную теорему:

Теорема. *Всякая метрика положительной кривизны, заданная на сфере, реализуема посредством замкнутой выпуклой поверхности.*

Доказательство. 1. Пусть на сфере S задана метрика $\rho(XY)$ положительной кривизны. Так как сфера с такой метрикой представляет собою выпуклый многоугольник в смысле принятого нами общего определения, то её можно разбить на сколь угодно малые выпуклые треугольники. (Речь идёт, конечно, о треугольниках в смысле метрики ρ!) Эти треугольники мы разбиваем на ещё более мелкие, и т. д. В результате получается последовательность разбиений $R_1, R_2, \ldots$ сферы S, причём всякое последующее разбиение является подразделением предыдущего и наибольшие диаметры $d_1, d_2, \ldots$ треугольников этих разбиений стремятся к нулю.

Сопоставляя каждому треугольнику разбиения R_i плоский треугольник со сторонами той же длины, мы получим, согласно лемме 1 предыдущего параграфа, развёртку $\overline{R_i}$, гомеоморфную сфере и имеющую выпуклую многогранную метрику. Согласно теореме, доказанной в гл. VI, из каждой развёртки $\overline{R_i}$ можно склеить замкнутый выпуклый многогранник P_i.

Каждый треугольник разбиения R_i отображён на соответствующий треугольник развёртки $\overline{R_i}$ так, что на сторонах это отображение является изометрическим. Поэтому сфера S оказывается отображённой на развёртку $\overline{R_i}$ и тем самым на склеенный из неё многогранник P_i. Точку на многограннике P_i, соответствующую при этом точке X (или A и т. п.) сферы S, мы будем обозначать $\overline{X_i}$ (или $\overline{A_i}$ и т. п.). Черта наверху будет всегда обозначать, что точка лежит в пространстве, а не на абстрактной сфере S.

Можно, конечно, считать, что все многогранники P_i проходят через одну и ту же точку: достаточно лишь передвинуть каждый из них соответствующим образом.

2. *Докажем, что из многогранников P_i можно выбрать такую последовательность, что для каждой точки X сферы S последовательность соответствующих точек $\overline{X_i}$ на многогранниках выбранной последовательности будет сходящейся* [1].

Потом мы докажем, что предельные точки этих последовательностей $\overline{X_i}$ образуют выпуклую поверхность, реализующую данную метрику.

Так как кривизна сферы равна 4π, то, согласно лемме 2 предыдущего параграфа, мы имеем неравенство

$$\rho_i(\overline{X_i Y_i}) < \rho(XY) + (4\pi + 2)\, d_i, \tag{1}$$

где ρ_i — метрика на многограннике P_i. Пространственные расстояния между точками многогранников не превосходят, конечно, расстояний на многогранниках. Многогранники P_i, по предположению, проходят через одну точку и потому из неравенства (1) следует, что все они лежат в ограниченной части пространства.

На сфере S мы имеем счётное множество вершин $A^1, A^2, \ldots$ всех разбиений R_i. Каждой точке A^n на каждом многограннике P_i соответствует точка $\overline{A_i^n}$. Так как многогранники расположены в ограниченной части пространства, то из них можно выбрать такую последовательность

$$P_{11}, P_{12}, P_{13}, \ldots,$$

[1] Это утверждение и его доказательство носят совершенно общий характер, а именно мы доказываем по существу следующее: пусть в компактной области S (в данном случае на сфере) задана метрика $\rho(XY)$. Пусть имеется последовательность поверхностей P_i (в данном случае многогранников), проходящих через одну и ту же точку и гомеоморфных S, причём S отображено на каждую поверхность P_i. Допустим, что имеют место неравенства $\overline{\rho_i}(\overline{X_i}\overline{Y_i}) < \rho(XY) + \varepsilon_i$, где $\overline{\rho_i}(\overline{X_i}\overline{Y_i})$ — расстояния на P_i между точками, соответствующими точкам X и Y области S, а $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда из поверхностей P_i можно выбрать такую последовательность, что для каждой точки X области S последовательность точек $\overline{X_i}$ на поверхностях выбранной последовательности будет сходящейся. Предельные точки $\overline{X}$ образуют предел выбранной последовательности поверхностей P_i.

в которой будут сходиться точки, соответствующие точке A^1. Далее, из этой последовательности можно выбрать другую

$$P_{21},\ P_{22}, P_{23}, \ldots,$$

в которой будут сходиться точки, соответствующие точке A^2. Продолжая такой выбор последовательностей и беря диагональную последовательность $P_{11}, P_{22}, \ldots$, мы получаем тем самым последовательность из наших многогранников, в которой сходятся точки, соответствующие всем точкам A^n. Все многогранники, не вошедшие в эту последовательность, мы исключаем из рассмотрения; чтобы не усложнять записи, мы будем обозначать многогранники этой последовательности (и вместе с ними разбиения сферы S и т. п.) так же, как обозначались многогранники исходной последовательности.

Итак, мы имеем последовательность многогранников P_i, у которых точки $\bar{A}_i^n$, соответствующие точкам A^n сферы S, сходятся к некоторым точкам $\bar{A}^n$.

Пусть теперь X — любая точка на сфере S, а $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, ... — соответствующие ей точки на многогранниках P_1, $P_2, \ldots$ Докажем, что эти точки $\bar{X}_i$ сходятся к некоторой точке $\bar{X}$.

Зададим произвольно малое $\varepsilon > 0$. Так как диаметры треугольников разбиения R_i сферы S стремятся к нулю, то найдётся такая вершина A какого-нибудь разбиения, что

$$\rho(XA) < \varepsilon \tag{2}$$

(индекс при вершине A мы для простоты записи опускаем).

Далее, в силу неравенства (1)

$$\rho_i(\bar{X}_i\bar{A}_i) < \rho(XA) + (4\pi + 2)\, d_i. \tag{3}$$

А так как $d_i \to 0$ при $i \to \infty$, то найдётся такое N_ε, что при всех $i > N_\varepsilon$ будет

$$(4\pi + 2)\, d_i < \varepsilon.$$

Тогда, в силу (2) и (3)

$$\rho_i(\bar{X}_i\bar{A}_i) < 2\varepsilon \qquad (i > N_\varepsilon). \tag{4}$$

Пусть теперь $\bar{X}_i$, $\bar{A}_i$ и $\bar{X}_j$, $\bar{A}_j$ — точки на многогранниках P_i и P_j, соответствующие точкам X и A. Пусть ρ_0 обозначает расстояние в пространстве. Тогда мы, очевидно, имеем

$$\rho_0(\bar{X}_i\bar{X}_j) \leqslant \rho_0(\bar{X}_i\bar{A}_i) + \rho_0(\bar{A}_i\bar{A}_j) + \rho_0(\bar{A}_j\bar{X}_j). \tag{5}$$

Но расстояния в пространстве не больше, чем расстояния на многограннике P_i, т. е., например, $\rho_0(\bar{X}_i\bar{A}_i) \leqslant \rho_i(\bar{X}_i\bar{A}_i)$. Поэтому из (5) следует:

$$\rho_0(\bar{X}_i\bar{X}_j) \leqslant \rho_i(\bar{X}_i\bar{A}_i) + \rho_j(\bar{X}_j\bar{A}_j) + \rho_0(\bar{A}_i\bar{A}_j). \tag{6}$$

Но в силу (4)

$$\rho_i(\bar{X}_i\bar{A}_i) + \rho_j(\bar{X}_j\bar{A}_j) < 4\varepsilon \qquad (i,\ j > N_\varepsilon). \tag{7}$$

С другой стороны, так как точки $\bar{A}_k$ сходятся, то $\rho_0(\bar{A}_i\bar{A}_j)$ становятся меньше ε, как только i и j больше некоторого M_ε. Поэтому из неравенства (6) вытекает, что

$$\rho_0(\bar{X}_i\bar{X}_j) < 5\varepsilon \qquad (i,\ j > \max(M_\varepsilon,\ N_\varepsilon)).$$

Так как ε произвольно мало, то это означает, что точки $\bar{X}_i$ сходятся к какой-то точке $\bar{X}$.

3. Итак, все точки $\overline{X}_i$ многогранников P_i сходятся к каким-то точкам $\overline{X}$. Пусть F есть множество всех этих точек $\overline{X}$. Докажем, что *многогранники P_i сходятся к F.*

Так как каждая точка из F есть предел последовательности точек $\overline{X}_i$, лежащих на многогранниках P_i, то нужно лишь доказать, что никакая точка, не принадлежащая F, не может быть точкой сгущения для точек, лежащих на разных многогранниках P_i.

Допустим, что точка $\overline{B}$ есть предел точек $\overline{C}_i$, лежащих на многогранниках P_i. (Мы берём точки на всех многогранниках для простоты записи. Если точка $\overline{B}$ есть точка сгущения, но не предел точек $\overline{C}_i$, то можно, конечно, выбрать сходящуюся последовательность из точек $\overline{C}_i$ и ограничиться рассмотрением только соответствующих многогранников.) Пусть C_i — точки на сфере S, соответствующие точкам $\overline{C}_i$. Из этих точек можно выбрать сходящуюся последовательность; чтобы не менять обозначения, мы будем считать, что точки C_i сходятся к некоторой точке D. Наконец, точке D отвечают на многогранниках P_i точки $\overline{D}_i$ и, по доказанному выше, $\overline{D}_i$ сходятся к некоторой точке $\overline{D}$, принадлежащей F.

Мы имеем, следовательно,

$$\overline{C}_i \to \overline{B},\ C_i \to D,\ \overline{D}_i \to \overline{D},$$

где $\overline{C}_i$ соответствуют C_i, а $\overline{D}_i$ соответствуют D.

Пусть ρ_0 обозначает, как и выше, расстояние в пространстве. Очевидно,

$$\rho_0(\overline{B}\overline{D}) \leqslant \rho_0(\overline{B}\overline{C}_i) + \rho_0(\overline{C}_i\overline{D}_i) + \rho_0(\overline{D}_i\overline{D}). \tag{8}$$

Так как $\overline{C}_i \to \overline{B}$ и $\overline{D}_i \to \overline{D}$, то

$$\rho_0(\overline{B}\overline{C}_i) \to 0, \quad \rho_0(\overline{D}_i\overline{D}) \to 0. \tag{9}$$

Далее, так как расстояние в пространстве не больше расстояния на многограннике P_i, то

$$\rho_0(\overline{C}_i\overline{D}_i) \leqslant \rho_i(\overline{C}_i\overline{D}_i). \tag{10}$$

Наконец, так как точки $\overline{D}_i$ и $\overline{C}_i$ соответствуют точкам D и C_i сферы S, то, в силу неравенства (1),

$$\rho_i(\overline{C}_i\overline{D}_i) \leqslant \rho(C_iD) + (4\pi + 2)\, d_i,$$

и потому из (10) следует, что

$$\rho_0(\overline{C}_i\overline{D}_i) < \rho(C_iD) + (4\pi + 2)\, d_i.$$

Но $d_i \to 0$, а $C_i \to D$, поэтому

$$\rho_0(\overline{C}_i\overline{D}_i) \to 0. \tag{11}$$

Сравнивая (8), (9) и (11), мы видим, что $\rho_0(\overline{B}\overline{D}) = 0$, т. е. что точки $\overline{B}$ и $\overline{D}$ совпадают. А так как точка $\overline{D}$ принадлежит F, то и B принадлежит F. Следовательно, всякая точка сгущения для точек разных многогранников P_i принадлежит F, и тем самым доказано, что многогранники P_i сходятся к F.

4. Предел сходящейся ограниченной последовательности замкнутых выпуклых многогранников есть либо замкнутая выпуклая поверхность (включая дважды покрытые плоские области), либо отрезок, либо точка. (Дополнение, § 6, теорема 3). Поэтому F есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо отрезок, либо точка. Для краткости мы будем называть F поверхностью.

Каждой точке X сферы S соответствует на поверхности F точка $\overline{X}$: предел точек $\overline{X}_i$, соответствующих X на многогранниках P_i. С другой стороны, по самому определению поверхности F, всякая точка на F есть такой предел и, тем самым, соответствует некоторой точке сферы S. Следовательно, мы имеем отображение h сферы S на поверхность F; при этом отображении X переходит в $\overline{X}$.

В том случае, когда F есть дважды покрытая область на плоскости, каждая внутренняя её точка считается дважды: с одной и с другой стороны области. Это приводит к известной неоднозначности в определении указанного отображения S на F. Именно, если X переходит в $\overline{X}$, то мы ещё не знаем, на какой стороне лежит точка $\overline{X}$. Покажем, что эту неоднозначность можно устранить.

Пусть F лежит в плоскости Q. Возьмём положительное направление нормали к плоскости Q и ориентируем в этом направлении каждую прямую, перпендикулярную Q. Верхом мы называем ту сторону Q, откуда эти прямые выходят; другую сторону Q мы называем низом. Если прямая L, перпендикулярная Q, пересекает многогранник P_i, входя в него в точке $\overline{A}$ и выходя в $\overline{B}$, то $\overline{B}$ мы считаем лежащей сверху, а $\overline{A}$ — снизу. Если L только касается многогранника, то точки её касания можно считать верхними и нижними. Если точка $\overline{X}$ лежит внутри F и, скажем, именно сверху (снизу), то последовательность точек $\overline{X}_i$, лежащих на многогранниках P_i, мы считаем сходящейся к $\overline{X}$ только в том случае, если при достаточно больших i точки $\overline{X}_i$ также оказываются сверху (снизу) на многогранниках P_i. Если точка $\overline{X}$ лежит на краю F, то никакого дополнительного условия на сходимость точек $\overline{X}_i$ не накладывается. Всё это было уже оговорено нами в § 1 гл. III.

Пусть, как и выше, $A^1, A^2, \ldots$ — вершины разбиений R_i. Если точка $\overline{A}^1$ лежит на краю F, то $\overline{A}_i^1$ сходятся к ней, и дополнительные условия не нужны. Если же $\overline{A}^1$ лежит внутри F и точки $\overline{A}_i^1$ на многогранниках P_i при сколь угодно больших i лежат на разных сторонах, то мы выбираем из многогранников P_i последовательность

$$P_{11},\ P_{12},\ P_{13}, \ldots$$

так, чтобы в ней точки $\overline{A}_{1k}^1$ лежали на одинаковых сторонах многогранников P_{1k}. Из этой последовательности мы выбираем такую последовательность

$$P_{21},\ P_{22},\ P_{23}, \ldots,$$

в которой точки $\overline{A}_{2k}^2$ лежат на одинаковых сторонах многогранников P_{2k}. Если поступать так же далее и взять диагональную последовательность $P_{11}, P_{22}, \ldots$, то в ней все точки $\overline{A}_{kk}^n$ будут сходиться (при каждом данном n и $k \to \infty$) также с поставленным выше дополнительным условием. Чтобы не менять обозначений, мы будем считать, что последовательность P_{kk} совпадает с прежней P_i.

Докажем, что теперь для любой точки X сферы S точки $\overline{X}_i$ на многогранниках P_i будут сходиться к точке $\overline{X}$ на F с выполнением нашего дополнительного условия. Это нужно доказывать только в том случае, если $\overline{X}$ лежит внутри F.

Если $\overline{X}$ лежит внутри F, то вокруг $\overline{X}$ можно описать круг K некоторого радиуса $r > 0$, лежащий внутри F. На этом круге K мы построим прямой цилиндр C (черт. 71). Возьмём на сфере S одну из точек A^n, которую мы обозначим просто A, так, что

$$\rho(XA) < \frac{r}{2},$$

где X — точка на S, соответствующая взятой точке $\overline{X}$.

Так как по формуле (1)

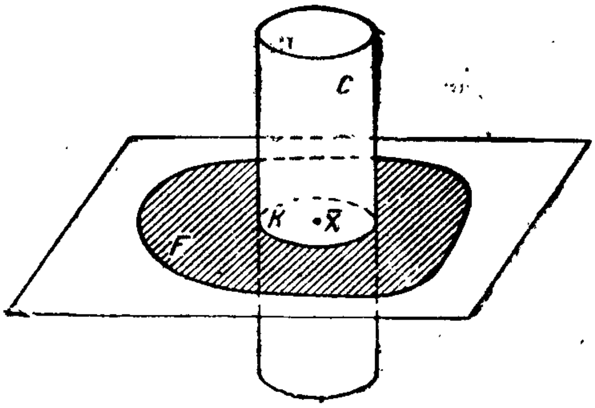
$$\rho_i(\overline{A}_i\overline{X}_i) < \rho(AX) + (4\pi + 2)\, d_i$$

и $d_i \to 0$, то при достаточно больших i будет также

$$\rho_i(\overline{A}_i\overline{X}_i) < \frac{r}{2}. \tag{12}$$

Точки $\overline{X}_i$ сходятся к $\overline{X}$, поэтому при достаточно больших i точки $\overline{X}_i$ будут удалены от $\overline{X}$ не более чем на $\frac{r}{2}$. А тогда, в силу (12), точки $\overline{A}_i$ окажутся на расстоянии от $\overline{X}$, не большем, чем r, и тем самым попадут в цилиндр C. Поэтому их предельная точка $\overline{A}$ будет лежать в круге K, т. е. внутри F.

Допустим для определённости, что $\overline{A}$ лежит на F сверху. Тогда точки $\overline{A}_i$ будут лежать на многогранниках P_i сверху (в силу сделанного нами выбора последовательности многогранников). Так как цилиндр C пересекает F по кругу K, лежащему внутри F, то при достаточно больших i он будет пересекать многогранники P_i так, что в нём не будет «крайних» точек многогранников P_i, т. е. тех точек, которые при проектировании на плоскость Q дают граничные точки проекции многогранника [1]).



Черт. 71.

Поэтому, если бы точки $\overline{X}_i$ при сколь угодно больших i лежали на многогранниках P_i снизу, то кратчайшие, соединяющие их с точками $\overline{A}_i$, должны были бы переходить с нижней стороны на верхнюю. Следовательно, они должны были бы выходить за пределы цилиндра C. Однако если точка $\overline{X}_i$ достаточно близка к $\overline{X}$, то всякая кривая, исходящая из $\overline{X}_i$ и выходящая из цилиндра C, будет иметь длину, не меньшую, чем $\frac{r}{2}$. Таким образом, при больших i мы имели бы

$$\rho_i(\overline{A}_i\overline{X}_i) > \frac{r}{2}, \tag{13}$$

а это противоречит неравенству (12). Следовательно, точки $\overline{X}_i$ при достаточно больших i остаются на одной стороне многогранников P_i и тем самым сходятся к $\overline{X}$ с выполнением поставленного выше дополнительного условия.

5. Теперь, когда дополнительное условие выполнено, наше отображение h, переводящее точки X сферы S в точки $\overline{X}$ поверхности F, определено однозначно. Это есть отображение S на всю F. Докажем, что оно изометрическое, т. е. при всяких X и Y

$$\rho(XY) = \rho_F(\overline{X}\overline{Y}),$$

где ρ — данная метрика на S, а ρ_F — расстояние на F. Этим будет доказано, что *поверхность F реализует метрику ρ*.

[1]) Если C содержит крайнюю точку $\overline{Z}_i$ многогранника P_i, то у P_i есть опорная плоскость Q_i, проходящая через $\overline{Z}_i$ перпендикулярно Q. Она пересекает круг K. Поэтому, если бы при сколь угодно больших i цилиндр C содержал крайние точки многогранников P_i, то круг K не мог бы лежать внутри предела многогранников P_i, т. е. внутри F.

Для доказательства заметим прежде всего, что метрики многогранников P_i сходятся к метрике поверхности F, как это следует из теоремы 1 § 1 гл. III. Согласно этой теореме, если точки $\overline{X}_i$ и $\overline{Y}_i$ на многогранниках P_i сходятся к точкам $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, то

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) = \lim_{i\to\infty} \rho_i(\overline{X}_i\overline{Y}_i). \tag{14}$$

Но, в силу неравенства (1),

$$\rho_i(\overline{X}_i\overline{Y}_i) < \rho(XY) + (4\pi + 2)\,d_i,$$

и так как $d_i \to 0$, то, воспользовавшись этим неравенством, мы из (14) получим, что

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) \leqslant \rho(XY). \tag{15}$$

Для доказательства обратного неравенства возьмём на поверхности F кратчайшую $\overline{X}\overline{Y}$ и рассмотрим одно из имеющихся разбиений R_i сферы S. Так как сфера S отображена на F, то каждому треугольнику T из R_i соответствует какая-то фигура $\overline{T}$ на поверхности F; эту фигуру мы также назовём треугольником.

Допустим, что кривизна треугольника T меньше π. Тогда к нему можно применить лемму 3 предыдущего параграфа. Из этой леммы следует, что, по мере дробления разбиений R_i, метрики ρ_i в пределах треугольника T будут сходиться к данной метрике ρ. Вместе с тем метрики ρ_i реализуются на многогранниках P_i и сходятся к метрике поверхности F. Отсюда вытекает следующий результат. Пусть $\overline{N}\overline{M}$ — отрезок кратчайшей $\overline{X}\overline{Y}$, лежащий в треугольнике $\overline{T}$, соответствующем взятому треугольнику T. Точки N и M на сфере, которым соответствуют $\overline{N}$ и $\overline{M}$, лежат в треугольнике T, и потому

$$\rho(NM) = \lim_{i\to\infty} \rho_i(\overline{N}_i\overline{M}_i).$$

Но по формуле (14)

$$\rho_F(\overline{N}\overline{M}) = \lim_{i\to\infty} \rho_i(\overline{N}_i\overline{M}_i),$$

следовательно,

$$\rho(NM) = \rho_F(\overline{N}\overline{M}). \tag{16}$$

Поэтому, сопоставляя каждому отрезку $\overline{N}\overline{M}$ кратчайшей $\overline{X}\overline{Y}$ кратчайшую NM на сфере S, мы получим линию, равную по длине той части кратчайшей $\overline{X}\overline{Y}$, которая лежит в треугольнике $\overline{T}$. (Число отрезков $\overline{N}\overline{M}$ в одном треугольнике $\overline{T}$ могло бы быть бесконечным. Это, однако, не меняет дела, так как сумма длин бесконечного счётного числа отрезков кривой равна длине суммы этих отрезков.)

Однако кратчайшая $\overline{X}\overline{Y}$ может проходить также по треугольникам $\overline{T}$, соответствующим таким T, у которых кривизна $\geqslant \pi$. Пусть $\overline{X}\overline{Y}$ подходит к такому треугольнику в точке $\overline{N}$ и выходит из него в точке $\overline{M}$ (если $\overline{X}\overline{Y}$ пересекает $\overline{T}$ неоднократно, то берутся самые крайние точки на ней, принадлежащие $\overline{T}$). Тогда отрезку $\overline{N}\overline{M}$ нашей кратчайшей мы сопоставим кратчайшую NM на сфере S. Так как диаметр треугольника T в разбиении R_i не больше d_i, то

$$\rho(NM) \leqslant d_i. \tag{17}$$

Возьмём теперь все кратчайшие NM, которые мы сопоставляли отрезкам кратчайшей $\overline{X}\overline{Y}$. Они образуют кривую, соединяющую точки X и Y. Длина этой кривой (в метрике ρ) $\geqslant \rho(XY)$.

При суммировании отрезков NM, отрезки, лежащие в треугольниках T с кривизной $\geqslant \pi$, встретятся не более четырёх раз. Действительно, число таких треугольников не больше четырёх, так как кривизна всей сферы равна 4π. Следовательно, суммируя все отрезки NM и пользуясь формулами (16) и (17), мы получим:

$$\rho(XY) = \sum \rho(NM) \leqslant \sum \rho_F(\overline{N}\overline{M}) + 4d_i. \tag{18}$$

Из (18) следует[1]), что

$$\rho(XY) \leqslant \rho_F(\overline{X}\overline{Y}) + 4d_i.$$

Но $d_i \to 0$ при $i \to \infty$; поэтому

$$\rho(XY) \leqslant \rho_F(\overline{X}\overline{Y}). \tag{19}$$

Сравнивая (19) и (15), мы получаем, что

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) = \rho(XY),$$

и, следовательно, F реализует метрику ρ.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, нужно доказать ещё, что F не представляет собою ни точку, ни отрезок. Но теперь, когда известно, что F реализует метрику ρ, это совершенно очевидно. Изометрическое соответствие между сферой S с метрикой ρ и поверхностью F есть гомеоморфизм, а ни отрезок, ни точка не гомеоморфны сфере.

[1]) В сумме, стоящей в правой части неравенства (18), каждый отрезок входит не более одного раза, но отрезки, лежащие в $\overline{T}$, соответствующих тем T, у которых кривизна $\geqslant \pi$, отсутствуют. Если их прибавить, то неравенство усилится и вместе с тем тогда $\sum \rho_F(\overline{N}\overline{M}) = \rho_F(\overline{X}\overline{Y})$.

ГЛАВА VIII.

ДРУГИЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ.

§ 1. Теорема о склеивании.

Способ построения многогранной метрики из развёртки, составленной из плоских многоугольников, может быть обобщён: вместо развёртки из плоских многоугольников можно брать систему многоугольников из многообразий с метрикой положительной кривизны и, отождествляя их стороны, получать многообразие опять-таки с метрикой положительной кривизны. Теорема о склеивании, которую мы здесь докажем, даёт условия, при которых это действительно можно сделать.

Будем называть многоугольником всякую замкнутую область в многообразии с внутренней метрикой, у которой 1) граница состоит из кратчайших и 2) никакая точка границы не является точкой сгущения для множества точек, лежащих на различных из этих кратчайших. В этом определении многоугольника мы отказываемся от требования компактности. Поэтому, например, бесконечная область на плоскости, ограниченная бесконечной ломаной, или сектор, вырезанный из открытой полусферы, будут теперь считаться многоугольниками. Сектор полусферы открыт со стороны экватора, но он замкнут относительно самой полусферы, т. е. всякая его предельная точка, принадлежащая полусфере, принадлежит также ему самому.

Пусть из многообразий с метрикой положительной кривизны вырезаны многоугольники $P_1, \ldots, P_n$. Будем говорить, что некоторое новое многообразие R' с внутренней метрикой склеено из многоугольников $P_1, \ldots, P_n$, если оно может быть разбито на геодезические многоугольники $P_1', \ldots, P_n'$ так, что каждый многоугольник P_i' изометричен многоугольнику P_i [1]). Если многообразие R' есть поверхность в пространстве, то естественно говорить, что поверхность склеена из многоугольников $P_1, \ldots, P_n$.

У многоугольников $P_1', \ldots, P_n'$ стороны попарно отождествлены и вершины также отождествлены некоторым образом. Эти отождествления естественно, в силу изометрии многоугольников P_i и P_i', переносятся на многоугольники P_i. (Может случиться, что целая сторона многоугольника P_i разбивается вершинами P_i', тогда мы можем считать соответствующие точки также вершинами P_i.)

Если произвести эти отождествления у многоугольников P_i, то они образуют многообразие R, гомеоморфное R'. В этом многообразии R естественно определяется внутренняя метрика; действительно, мы можем определить длину кривой в многообразии R, как сумму длин отрезков этой кривой, лежащих в каждом из многоугольников P_i. После этого расстояние между точками определяем как точную нижнюю границу длин кривых, соединяющих эти точки. При таком опре-

[1]) Внутри каждого многоугольника P_i индуцируется своя собственная внутренняя метрика, может быть отличная от той, какую он имеет как часть содержащего его многообразия (см. теорему 5 § 2 гл. II). Здесь говорится об изометрии многоугольников P_i и P_i' именно в смысле их собственных внутренних метрик.

делении метрики в многообразии R оно будет изометрично R'; поэтому, если R' — абстрактное многообразие, а не поверхность в пространстве, мы можем не различать многообразий R и R', и мы также говорим, что многообразие R склеено из многоугольников P_i.

Многообразие, склеиваемое из данных многоугольников, вполне определяется указанием «закона» отождествления сторон и вершин, т. е. тем, какие стороны и вершины отождествляются и в каких направлениях отождествляются стороны. Напомним, что отождествления должны удовлетворять следующим условиям:

1. Углы, сходящиеся в одной вершине, должны сходиться в ней так, как в центре круга сходятся секторы, на которые этот круг разбит. (Отсюда уже следует, что стороны отождествляются попарно.)

2. От одного многоугольника можно перейти к другому, проходя по многоугольникам, имеющим отождествлённые стороны.

3. Отождествляемые стороны имеют равные длины и при их отождествлении соответственные их отрезки также должны иметь равные длины.

Из первых двух условий следует, что многоугольники образуют многообразие. Таким образом, задав многоугольники $P_1, \ldots, P_n$ и закон склеивания, удовлетворяющий трём поставленным условиям, получаем многообразие R с внутренней метрикой.

В § 4 предыдущей главы было доказано, что полный угол вокруг точки в многообразии с метрикой положительной кривизны не может превосходить 2π. Поэтому для того чтобы метрика в многообразии R была положительной кривизны, необходимо чтобы суммы углов многоугольников P_i, сходящихся в одной вершине, были не больше 2π. Если многоугольники P_i вырезаны из многообразий с метрикой положительной кривизны, или, как мы будем говорить, многоугольники P_i имеют метрики положительной кривизны, то это условие оказывается также достаточным. В этом и состоит «теорема о склеивании». Однако прежде чем доказывать её, следует сделать существенную оговорку. Во-первых, мы не доказали ещё, что *всякий* многоугольник в любом многообразии с метрикой положительной кривизны имеет определённые углы. Это было доказано только для выпуклых многоугольников (§ 5 гл. VII). Во-вторых, мы не доказали, что полный угол вокруг *всякой* точки в таком многообразии $\leqslant 2\pi$. Это было доказано только для тех точек, о которых заранее известно, что их окрестности можно разбить на выпуклые секторы (§ 4 гл. VII). Поэтому наше утверждение об углах многоугольников P_i имеет определённый смысл пока только для выпуклых многоугольников. Но потом мы докажем, что всякая точка в многообразии с метрикой положительной кривизны имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности. Этим будет показано, что все свойства углов, установленные в гл. IV для случая выпуклой поверхности, переносятся в любое многообразие с метрикой положительной кривизны. Тогда станет ясным, что нет надобности ограничиваться в теореме о склеивании выпуклыми многоугольниками. Мы проведём её доказательство так, что выпуклость многоугольников P_i не будет играть никакой роли, не считая лишь того, что *пока* существование углов и теоремы о их сложении применимы лишь к выпуклым многоугольникам.

Теорема о склеивании. *Если многообразие R склеено из многоугольников $P_1, \ldots, P_n$ с метриками положительной кривизны так, что в каждой вершине сумма сходящихся в ней углов этих многоугольников не больше 2π, то метрика во всём многообразии R также будет метрикой положительной кривизны.*

Доказательство. Метрика положительной кривизны характеризуется тем, что она внутренняя и сумма нижних углов всякого достаточно малого выпуклого треугольника $\geqslant \pi$. То, что метрика в многообразии R — внутренняя, непосредственно следует из её определения.

Для доказательства второго характеристического свойства мы покажем, что

1. В многообразии R между двумя сторонами выпуклого треугольника всегда существует определённый угол.
2. Сумма углов малого выпуклого треугольника в R не меньше π.
3. Между сторонами всякого малого выпуклого треугольника существует угол в сильном смысле.

Из этих трёх утверждений, конечно, следует нужный нам результат.

Если точка, из которой исходят две кратчайшие, лежит внутри одного из склеиваемых многоугольников, то между этими кратчайшими есть определённый угол, поскольку в самих многоугольниках метрика — положительной кривизны.

Пусть точка O лежит на границе многоугольников — на стороне или в вершине; пусть в ней сходятся углы многоугольников $P_1, P_2, \ldots, P_m$, разделённые кратчайшими $L_1, L_2, \ldots, L_m$; эти кратчайшие суть отрезки сторон указанных многоугольников. (Если O лежит на стороне, то в ней сходятся два «угла», равные π.) Покажем, что никакая кратчайшая M, исходящая из точки O, не может пересекать ни одну из кратчайших $L_1, \ldots, L_m$.

Действительно, допустим, что M пересекает L_1 в точке A, переходя из многоугольника P_m внутрь многоугольника P_1. Тогда, заменяя отрезок OA кратчайшей M отрезком OA кратчайшей L_1, мы получим новую кратчайшую $\overline{M}$, проходящую в многоугольнике P_1. Эта кратчайшая совпадает с L_1 на участке OA и дальше отходит от неё. Но метрика в многоугольнике P_1 есть метрика положительной кривизны и, следовательно (как показано в § 3 гл. VII), в нём выполняется условие неналегания кратчайших, утверждающее, что такое налегание кратчайших L_1 и $\overline{M}$ невозможно. Следовательно, кратчайшая M не может пересекать L_1. Отсюда легко заключить, что в многообразии R вообще выполняется условие неналегания кратчайших.

Пусть из точки O исходят две кратчайшие M и N, являющиеся сторонами выпуклого треугольника T. Пусть $L_1, \ldots, L_k$ будут те кратчайшие из разделяющих многоугольники $P_1, \ldots, P_m$, которые проходят из точки O в треугольнике T. Допустим для простоты, что они перенумерованы в порядке их расположения от кратчайшей M к кратчайшей N. Между парами соседних кратчайших M и L_1, L_1 и $L_2, \ldots, L_k$ и N существуют определённые углы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, потому что эти пары лежат каждая в одном многоугольнике P_i[1]. Так как M и N являются сторонами выпуклого треугольника T, то как только точки X и Y на них достаточно близки к O, кратчайшая XY пересекает кратчайшие $L_1, \ldots, L_k$. Если она проходит через точку O, то M и N являются одна продолжением другой, а тогда угол между ними существует и равен π. Если же кратчайшая XY никогда не проходит через точку O, то можно воспользоваться теоремой 3 § 1 гл. IV, согласно которой в этом случае угол между M и N также существует и равен сумме углов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Итак, мы доказали, что в многообразии R между сторонами всякого выпуклого треугольника существуют определённые углы.

Докажем теперь, что у всякого достаточно малого выпуклого треугольника сумма углов не меньше π. Пусть T — малый выпуклый треугольник. Если он содержится внутри одного из склеиваемых многоугольников P_i, то сумма его углов $\geqslant \pi$, потому что метрика в каждом P_i — положительной кривизны. Допустим, что треугольник T пересекается с разными многоугольниками P_i. Тогда он разбивается на многоугольники $Q_1, \ldots, Q_m$, каждый из которых содержится в одном многоугольнике P_i и поэтому их внутренние области имеют неотри-

[1] Если многоугольник P_1 (P_m) выпуклый, то, отсекая от него малый выпуклый треугольник с вершиной O, убедимся, что кратчайшие M (N) и L_1 (L_k) ограничивают выпуклый сектор и, следовательно, угол между ними существует.

цательную кривизну [1])

$$\omega(Q_k) \geqslant 0 \qquad (k=1, \ldots, m). \tag{1}$$

Пусть $A_1, \ldots, A_l$ — вершины многоугольников Q_k, лежащие внутри треугольника T. Так как полные углы вокруг них $\leqslant 2\pi$, то кривизны их неотрицательны:

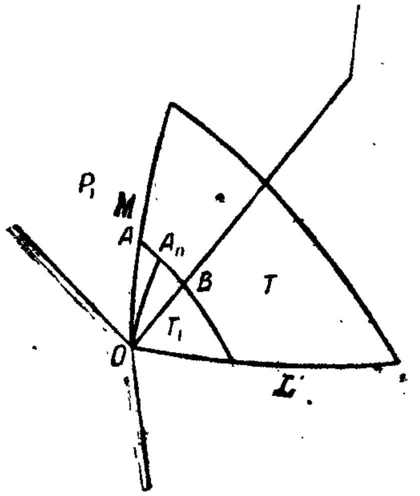
$$\omega(A_j) \geqslant 0 \qquad (j=1, \ldots, l). \tag{2}$$

Это верно и для тех вершин, которые являются вершинами многоугольников P_i, потому что, по условию теоремы, сумма углов этих многоугольников вокруг одной вершины не превосходит 2π.

Применяя теорему о сложении кривизн, доказанную в § 1 гл. V, мы получим, что кривизна внутренней области треугольника T, т. е. сумма его углов минус π, выражается формулой

$$\omega(T) = \sum_{k=1}^{m} \omega(Q_k) + \sum_{j=1}^{l} \omega(A_j).$$

В силу неравенств (1) и (2) $\omega(T) \geqslant 0$, что и требовалось доказать.



Черт. 72.

Остаётся показать, что между сторонами выпуклого треугольника в нашем многообразии R существует угол в сильном смысле. Для этого вспомним доказательство существования угла в сильном смысле между двумя кратчайшими L и M на выпуклой поверхности, проделанное в § 4 гл. III. Это доказательство, как было отмечено в конце § 4 гл. III, основано на трёх фактах: 1) на существовании обыкновенного угла, 2) на условии неналегания кратчайших, 3) на возможности провести между кратчайшими L и M такую кратчайшую M' (или L'), которая образует с L (или M) угол, сколь угодно близкий к углу между L и M. Но все эти три условия выполняются и в настоящем случае:

1. Существование обыкновенного угла между сторонами выпуклого треугольника доказано.

2. Условие неналегания кратчайших также доказано.

3. Возможность провести кратчайшую M', которая образует с L угол, близкий к углу между L и M, устанавливается следующим образом. Пусть L и M исходят из точки O и являются сторонами выпуклого треугольника T (черт. 72). Пусть P_1 — тот из многоугольников P_i, некоторая часть которого, отделённая кратчайшей M, входит в треугольник T. Отсечём от треугольника T достаточно малый треугольник T_1 с вершиной O и вершиной A внутри кратчайшей M. Сторона многоугольника P_1 отсечёт от этого треугольника треугольник OAB, содержащийся в P_1. Возьмём на стороне AB этого треугольника последовательность точек A_n, сходящихся к точке A. Тогда кратчайшие OA_n будут сходиться к OA (см. следствие 4 теоремы § 3 гл. II); и по теореме 4 § 3 гл. VII угол между OA_n и OA будет стремиться к нулю. А вследствие аддитивности угла угол между OA_n и L будет стремиться к углу между OA и L, т. е. между M и L. Но это и значит, что между L и M можно провести кратчайшую OA_n так, что угол между OA_n и L будет сколь угодно близок к углу между M и L.

[1]) Этих многоугольников Q_m — конечное число, потому что в R выполняется условие неналегания кратчайших, в силу которого конечное число кратчайших не может ограничивать бесконечного числа многоугольников. Кроме того, если многоугольники P_i выпуклые, то многоугольники Q_m также выпуклые, потому что они представляют пересечения выпуклого треугольника T с многоугольниками P_i (см. теорему 3 § 5 гл. II).

Таким образом, существование угла в сильном смысле можно считать установленным, и теорема о склеивании доказана.

Эта теорема имеет многочисленные приложения и, в частности, в соединении с основной теоремой реализуемости, доказанной в предыдущей главе, приводит к ряду других теорем о реализуемости метрики положительной кривизны и об изгибании выпуклых поверхностей.

§ 2. Применение теоремы о склеивании к теоремам реализуемости.

Теорема 1. *Всякий гомеоморфный кругу выпуклый многоугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны изометричен выпуклой поверхности.*

Доказательство. Пусть P — гомеоморфный кругу выпуклый многоугольник в многообразии с метрикой положительной кривизны. Возьмём второй экземпляр P' того же многоугольника и отождествим его стороны с соответственными сторонами многоугольника P. В результате мы получим многообразие $P+P'$, гомеоморфное сфере. Так как многоугольник P — выпуклый, то он имеет определённые углы, и все они не превосходят π. Поэтому сумма углов в каждой общей вершине многоугольников P и P' будет не больше 2π. Следовательно, на основании теоремы о склеивании, метрика в многообразии $P+P'$ будет положительной кривизны, а так как оно гомеоморфно сфере, то по основной теореме реализуемости, доказанной в предыдущей главе, существует выпуклая поверхность, изометричная многообразию $P+P'$. Часть этой поверхности, соответствующая многоугольнику P, и будет изометричной ему выпуклой поверхностью.

Теорема 2. *У каждой точки в многообразии с метрикой положительной кривизны есть окрестность, изометричная выпуклой поверхности.*

Доказательство. В § 3 предыдущей главы было доказано, что в многообразии с метрикой положительной кривизны выполняется условие неналегания кратчайших, а в § 4 гл. II было доказано, что при этом условии всякая точка имеет окрестность, являющуюся выпуклым многоугольником, гомеоморфным кругу. Применяя к такой окрестности теорему 1, получаем теорему 2.

Теорема 2 показывает, что *многообразие с метрикой положительной кривизны есть попросту такое многообразие, в котором* 1) *метрика — внутренняя, и* 2) *каждая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности.* Поэтому *в таком многообразии, во всяком случае «в малом», верны все результаты, которые мы получили выше, или получим потом для внутренней геометрии выпуклых поверхностей.* В частности, это относится к теоремам об углах между кратчайшими и об углах секторов. Поэтому в теореме о склеивании нет недобности ограничиваться выпуклыми многоугольниками: *теорема о склеивании верна для любых склеиваемых многоугольников.*

Доказательство теоремы 1 представляет собой частное приложение общей теоремы, которую можно назвать теоремой реализуемости склеенной метрики:

Теорема 3. *Если многообразие R, склеенное из многоугольников с метриками положительной кривизны, гомеоморфно сфере, и в каждой вершине этих многоугольников сумма сходящихся в ней углов не превосходит 2π, то многообразие R изометрично замкнутой выпуклой поверхности. Иными словами, существует замкнутая выпуклая поверхность, соответстеующим образом составленная из кусков, изометричных данным многоугольникам.*

Действительно, по теореме о склеивании метрика в R будет положительной кривизны, и так как R гомеоморфно сфере, то по теореме реализуемости, доказанной в предыдущей главе, оно изометрично замкнутой выпуклой поверхности. Теорема о существовании многогранника с данной развёрткой, доказанная в гл. VI, представляет собой, очевидно, частный случай теоремы 3.

Вот пример следствия теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть многоугольник P с метрикой положительной кривизны гомеоморфен замкнутой области на сфере. Он ограничен замкнутыми ломаными $L_1, \ldots, L_n$. Пусть на каждой из этих ломаных L_i все углы многоугольника P не превосходят π, кроме, может быть, одного, или даже двух, но расположенных так, что их вершины делят ломаную L_i пополам. Тогда существует выпуклая поверхность, изометричная многоугольнику P — точнее, изометричная его внутренней области.*

Доказательство. Пусть A_1, $B_1, \ldots, A_n$, B_n — те вершины ломаных $L_1, \ldots, L_n$, углы при которых могут быть больше π. По условию, они делят каждую ломаную пополам. Отождествив обе эти половины каждой ломаной L_i, мы превратим многоугольник P в многообразие R, гомеоморфное сфере. Суммы углов во всех вершинах будут не превосходить 2π, потому что углы при всех вершинах, кроме A_i, B_i, не превосходят π.

Следовательно, существует замкнутая выпуклая поверхность, изометричная R. Производя на ней разрезы по линиям, соответствующим сложенным вдвое ломаным L_i, получим поверхность, изометричную внутренности многоугольника P. Она получается даже определённого вида: замкнутая поверхность с разрезами по некоторым ломаным.

Можно получить поверхности, изометричные P, также другого вида. Если углы при вершинах A_i и B_i равны α_i и β_i, то можно взять сектор S_i, вырезанный меридианами из подходящей поверхности вращения и имеющий углы, равные $2\pi - \alpha_i$, $2\pi - \beta_i$, и периметр, равный периметру ломаной L_i[1]). Отождествляя стороны таких секторов с половинами ломаных L_i, получим опять многообразие, гомеоморфное сфере и имеющее метрику положительной кривизны. Если вырезать из изометричной ему замкнутой поверхности те области, которые соответствуют секторам S_i, то получится поверхность, изометричная многоугольнику P.

Теорема 1 о существовании выпуклой поверхности, изометричной выпуклому многоугольнику, представляет, очевидно, частный случай теоремы 4.

Аналогичное применение теоремы 3 позволяет доказать общую теорему реализуемости, формулированную ещё в § 9 гл. I.

Теорема 5. *Если многообразие R с метрикой положительной кривизны гомеоморфно области на сфере и каждые две его точки соединимы кратчайшей, то оно изометрично выпуклой поверхности.*

Недостаток места не позволяет нам воспроизвести здесь доказательство этой теоремы. Мы ограничимся тем, что наметим лишь его общий ход.

Строим в многообразии R последовательность расширяющихся многоугольников Q_n, покрывающих в сумме всё R. Для каждого многоугольника Q_n имеются две возможности: 1) к нему приложима теорема 4, и, следовательно, его можно реализовать в виде выпуклой поверхности F_n, 2) теорема 4 к многоугольнику Q_n неприменима. Но во втором случае мы доказываем, что к каждой замкнутой ломаной, входящей в границу Q_n, можно «подклеить» плоский многоугольник так, что будут выполнены условия теоремы 3[2]). Тогда много-

---

[1]) За сектор S_i можно взять поверхность, составленную из двух прямых круговых конусов с полными углами $2\pi - \alpha_i$ и $2\pi - \beta_i$ и разрезанную по меридиану; или, что то же самое, сектор S_i можно составить из двух плоских круговых секторов с углами $2\pi - \alpha_i$, $2\pi - \beta_i$ и суммой радиусов, равной полупериметру ломаной L_i.

[2]) Здесь играют роль две теоремы о многообразии R, удовлетворяющем условиям теоремы 5:

А. Во всякой связной замкнутой области из R каждые две точки можно соединить кривой, кратчайшей в этой области. (Если R не компактно, то замкнутая область в нём может не быть компактной и потому эта теорема вовсе не следует из общих теорем § 2 гл. II.)

Б. Если T есть «треугольная область» в R (т. е. замкнутая область, ограниченная тремя геодезическими, кратчайшими в самой области R), то её углы не меньше соотугольник Q_n реализуется в виде области на замкнутой поверхности. Таким образом, оказывается, что при всяком n многоугольник Q_n реализуем в виде некоторой выпуклой поверхности F_n. Поверхность, предельная для таких поверхностей F, и будет реализовать всё многообразие R.

Наметим ещё пример приложения теоремы 3, относящийся уже к вопросу об изгибании поверхностей. *Если выпуклая поверхность F получается из замкнутой поверхности удалением треугольника с положительной кривизной, то существует бесконечно много поверхностей, изометричных, но не равных F.*

Если треугольник ABC, удалённый из замкнутой выпуклой поверхности, имеет положительную кривизну, то, как можно доказать, его углы α, β, γ строго меньше углов плоского треугольника со сторонами той же длины. Поэтому существует бесконечно много разных выпуклых шестиугольников $AXBYCZ$, у которых суммы сторон $AX+XB$, $BY+YC$, $CZ+ZA$ равны сторонам треугольника ABC, а углы при вершинах A, B, C меньше α, β, γ. Отождествляя стороны такого шестиугольника с соответствующими отрезками границы поверхности F, получим многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы 3. Оно реализуется в виде замкнутой выпуклой поверхности. Если из этой поверхности удалить часть, соответствующую подклеенному к F шестиугольнику, то получится поверхность F', изометричная F. Беря разные шестиугольники, мы будем получать поверхности F', изометричные F, но, как нетрудно доказать, не равные друг другу.

Общий принцип приложений теоремы о склеивании к задачам о реализуемости и изгибании становится совершенно ясным из приведённых примеров. Дальше мы дадим ещё другие приложения этой теоремы также к задачам иного рода и укажем (в § 3 гл. IX) её широкое обобщение на случай склеивания уже не обязательно многоугольных областей.

§ 3. Реализуемость полной метрики положительной кривизны, заданной на плоскости.

Реализуемость полной метрики положительной кривизны, заданной на плоскости, также доказывается на основе теоремы о склеивании. Применение этой теоремы становится возможным благодаря следующей лемме:

Лемма. *На плоскости E с полной метрикой положительной кривизны всякий многоугольник можно заключить в гомеоморфный кругу многоугольник, все углы которого, кроме, может быть, одного, не превосходят π.*

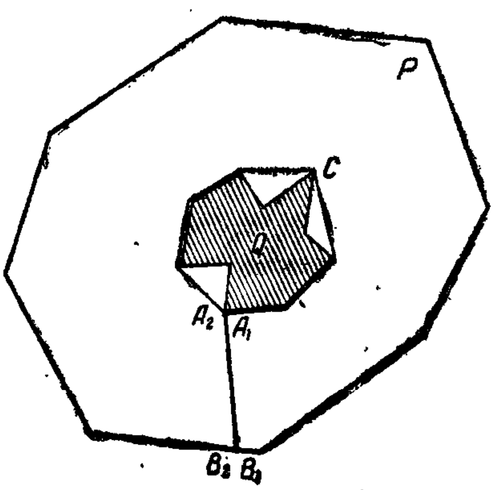
Доказательство. Пусть Q — данный многоугольник на плоскости E. Можно считать, что он гомеоморфен кругу, стоит лишь включить в него все окружённые им области. Заключим многоугольник Q в другой многоугольник P так, чтобы расстояние границы этого многоугольника от многоугольника Q было больше периметра Q. Для того чтобы доказать, что это действительно можно сделать, возьмём множество M всех точек, расстояние которых от многоугольника Q не больше его периметра q. Это множество ограничено, и так как метрика на плоскости E — полная, то оно будет компактным. Каждую точку множества M можно окружить многоугольной окрестностью и на основании леммы Бореля выбрать из этих окрестностей конечное число окрестностей, также покрывающих M. Эти многоугольные окрестности и образуют, очевидно,

ветствующих углов плоского треугольника со сторонами той же длины. (Область R может не быть ни компактной, ни односвязной, и, следовательно, данное утверждение сильно обобщает известную нам теорему об углах треугольника.) Дополнение внутренности многоугольника Q_n может состоять из нескольких областей. Пользуясь теоремой А, нетрудно доказать, что каждую из них можно разбить на треугольные области T. Заменяя каждую область T плоским треугольником, получим многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы 3 многоугольник P, граница которого удалена от Q более чем на его периметр q. Этот многоугольник мы можем считать гомеоморфным кругу, стоит лишь присоединить к нему окружённые им области.

Возьмём на границе многоугольника Q точку X, а на границе многоугольника P точку Y и соединим их кратчайшей XY. Может случиться, что эта кратчайшая имеет с границами многоугольников Q и P ещё другие общие точки. Во всяком случае из неё можно выделить отрезок AB так, что точки A и B будут лежать на границах Q и P и никаких других точек этих границ на AB не будет. Тогда кратчайшая AB будет проходить внутри многоугольника $P-Q$, получающегося из P исключением внутренних точек Q (см. черт. 73).

Если многоугольник $P-Q$ разрезать по кратчайшей AB, то он превратится в многоугольник, гомеоморфный кругу. Граница этого многоугольника R состоит из границ Q и P, разрезанных в точках A и B, и двух экземпляров кратчайшей AB; два экземпляра точек A и B обозначим A_1, A_2, B_1, B_2.

Мы доказали ещё в гл. II, что во всяком многоугольнике две точки можно соединить линией, кратчайшей в этом многоугольнике, и что эта линия является геодезической ломаной с вершинами в вершинах многоугольника (теорема 6 § 2 гл. II). Поэтому в многоугольнике R существует такая кратчайшая в нём геодезическая ломаная A_1A_2. Длина этой ломаной не больше периметра q многоугольника Q, потому что граница этого многоугольника тоже даёт в R линию, соединяющую точки A_1 и A_2. По выбору многоугольника P, его граница удалена от Q больше чем на q, и потому ломаная A_1A_2 не может иметь общих точек с границей P. Следовательно, все вершины этой ломаной лежат в вершинах многоугольника Q.



Черт. 73.

Пусть C — какая-нибудь вершина кратчайшей ломаной A_1A_2, отличная от A_1 и A_2; сходящиеся в ней стороны этой ломаной разбивают её окрестность на два сектора, один из которых содержится в $P-Q$ (см. черт. 73). Если бы угол этого сектора был меньше π, то, беря на его сторонах точки X и Y, достаточно близкие к C, мы имели бы $XY < BX+BY$. Поэтому, заменяя часть $XB+BY$ линии A_1A_2 кратчайшей XY, мы заменили бы эту линию более короткой, что невозможно в силу её определения. Следовательно, углы, образуемые звеньями ломаной A_1A_2 со стороны многоугольника $P-Q$, не меньше π. Другие же углы, обращённые к многоугольнику Q, будут поэтому, наоборот, не больше π.

Но на нашей плоскости E ломаная A_1A_2 представляет собою замкнутую ломаную: её концы лежат в одной точке A. Эта замкнутая ломаная ограничивает гомеоморфный кругу многоугольник Q', содержащий Q, и все углы этого многоугольника, кроме угла при вершине A, суть углы между звеньями ломаной A_1A_2, обращённые к Q. Поэтому все углы многоугольника Q', кроме, может быть, угла A, не превосходят π. Лемма доказана.

Теорема. *Полная метрика положительной кривизны, заданная на плоскости, реализуема посредством бесконечной полной выпуклой поверхности.*

Доказательство. Пусть на плоскости E задана полная метрика положительной кривизны. Построим на E последовательность многоугольников Q_1, $Q_2, \ldots$ так, что $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_n \subset Q_{n+1} \subset \ldots$ и все Q_i покрывают E. Такую последовательность можно получить, например, так. Плоскость E можно отобразить на эвклидову; тогда последовательности концентрических окружностей радиусов $1, 2, \ldots, n, \ldots$ будут соответствовать на E некоторые кривые.

Геодезические ломаные с достаточно малыми сторонами, вписанные в эти кривые, как раз ограничат многоугольники, обладающие нужными свойствами.

Согласно доказанной нами лемме, каждый из многоугольников Q_n можно заключить в гомеоморфный кругу многоугольник P_n, у которого все углы, кроме, может быть, одного, не превосходят π. Пусть A_n — именно та вершина многоугольника P_n, угол при которой больше π; если же такой вершины нет, то примем за A_n любую из вершин многоугольника P_n. Пусть B_n — такая точка на границе P_n, что оба отрезка A_nB_n границы P_n имеют равные длины. Отождествим эти отрезки так, чтобы отождествляемые точки отсекали на них от точки A_n отрезки равной длины. В результате получится многообразие R_n, гомеоморфное сфере. Сумма углов, сходящихся в отождествляемых точках, будет $\leqslant 2\pi$, потому что при всех вершинах, кроме A_n, углы $\leqslant \pi$. Поэтому можно воспользоваться теоремой о реализуемости «склеенной метрики», доказанной в предыдущем параграфе. В силу этой теоремы, существует замкнутая выпуклая поверхность, изометричная многообразию R. Если произвести на этой поверхности разрез по линии, соответствующей границе многоугольника P_n, то получим поверхность, изометричную внутренности многоугольника P_n [1]). Таким образом, для каждого многоугольника P_n существует изометричная ему замкнутая выпуклая поверхность F_n с разрезом.

В силу изометричности отображения P_n на F_n для каждой точки X (или A и т. п.) из P_n на поверхности F_n есть соответствующая точка, которую мы будем обозначать $\overline{X}_n$ (или $\overline{A}_n$ и т. п.). Так как многоугольники P_n, расширяясь, покрывают в конце концов всю плоскость E, то для каждой точки X плоскости E существует такое n_0, что при всех $n > n_0$ точка X содержится в P_n; тогда на каждой поверхности F_n с номером $n > n_0$ имеется соответствующая точка $\overline{X}_n$. Дальше, когда речь будет итти о точках плоскости E и соответствующих точках поверхностей F_n, мы не будем напоминать, что $\overline{X}_n$ существует каждый раз лишь при достаточно больших n.

Возьмём точку A, принадлежащую всем многоугольникам P_n (такая точка есть, потому что $P_n \supset Q_n$ и все Q_n содержат Q_1). Тогда на всех поверхностях F_n существуют точки $\overline{A}_n$, соответствующие A. Мы перенесём поверхности F_n так, чтобы все их точки $\overline{A}_n$ совпали. Эту общую всем поверхностям F_n точку мы обозначим $\overline{A}$; она соответствует на них всех точке A.

Пусть теперь X — любая точка плоскости E и $\overline{X}_n$ — соответствующая точка на F_n. Так как поверхность F_n реализует метрику ρ_{P_n} многоугольника P_n, то $\rho_{P_n}(AX) = \rho_{F_n}(\overline{A}\overline{X}_n)$. Расстояние же в пространстве всегда не больше расстояния на поверхности. Поэтому, если ρ_0 обозначает расстояние в пространстве, то для всякой точки X и для всякого n будет

$$\rho_0(\overline{A}\overline{X}_n) \leqslant \rho_{P_n}(AX). \qquad (1)$$

Возьмём теперь на плоскости E счётное всюду плотное множество точек $A^1, A^2, \ldots$ Из формулы (1) следует, что при всяком данном k, точки $\overline{A}_n^k$ находятся в ограниченной части пространства, и мы можем, следовательно, выбрать из поверхностей F_n такую последовательность, в которой сходятся точки, соответствующие точке A^1. Из этой последовательности мы выбираем последовательность, в которой сходятся точки, соответствующие точке A^2, и т. д. Тогда в диагональной последовательности будут сходиться уже все точки, соответствующие всем A^k. Поверхности из этой последовательности и соответствующие многоугольники в плоскости E мы также обозначим через F_n и P_n.

---

[1]) При условии, что в P_n берётся метрика, индуцированная в нём метрикой, заданной на всей плоскости E.

Совершенно так же, как в п. 2 доказательства теоремы о реализуемости метрики на сфере (§ 7 гл. VII), можно показать, что точки $\overline{X}_n$ на поверхностях $\overline{F}_n$, соответствующие одной и той же точке X плоскости E, сходятся к некоторой точке $\overline{X}$. Стоит лишь всюду вместо многогранников, фигурировавших в § 7 гл. VII, брать поверхности F_n, и вместо выведенного там неравенства (1) пользоваться неравенством (1) настоящего параграфа. Покажем, чте множество F всех таких точек $\overline{X}$ и будет выпуклой поверхностью, реализующей данную метрику.

Так как предел замкнутых выпуклых поверхностей есть граница выпуклого множества (см. Дополнение, § 6, теорема 3), то множество F будет либо полной выпуклой поверхностью, либо каким-либо её вырождением (точкой, прямой и т. п.). Однако если мы докажем, что расстояние между каждой парой точек X, Y на плоскости E равно расстоянию между соответствующими точками $\overline{X}$, $\overline{Y}$ множества F, то отсюда, конечно, последует, что F есть действительно выпуклая поверхность и что она реализует метрику, заданную на плоскости E.

Итак, пусть X и Y — две произвольно заданные точки плоскости E. Так как многоугольники P_n, расширяясь, покрывают всю плоскость E, то найдётся такое n_0, что при всех $n > n_0$ удвоенная сумма расстояний точек X и Y от выбранной выше точки A, общей всем P_n, будет меньше расстояний точек X, Y до границы многоугольника P_n. Тогда расстояние между самими X и Y будет меньше их расстояний от границы P_n, и соединяющая их кратчайшая XY будет содержаться в P_n. Поэтому расстояния между X и Y, измеренные в P_n и на всей плоскости E, будут равны:

$$\rho_{F_n}(XY) = \rho_F(XY). \tag{2}$$

Дальше мы ограничимся рассмотрением только тех n, которые больше указанного n_0.

Замкнутой поверхности F_n с разрезом, изометричной многоугольнику P_n, соответствует замкнутая поверхность $\overline{F}_n$ без разреза. Так как расстояние $\rho_{P_n}(XY)$ меньше расстояний точек X и Y до границы многоугольника P_n и поверхность F_n изометрична P_n, то расстояния $\rho_{F_n}(\overline{X}_n\overline{A}_n)$ и $\rho_{F_n}(\overline{Y}_n\overline{A}_n)$ на поверхности F_n будут меньше расстояний точек $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$, $\overline{A}_n$ до разреза. Отсюда следует, что расстояние между точками $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$, измеренное на поверхности $\overline{F}_n$, будет то же самое, что и на F_n и потому, на основании равенства (2),

$$\rho_{\overline{F}_n}(\overline{X}_n\overline{Y}_n) = \rho_E(XY), \tag{3}$$

и точно так же

$$\rho_{\overline{F}_n}(\overline{X}_n\overline{A}_n) = \rho_E(AX).$$

Опишем вокруг точки $\overline{A}$ шар S с радиусом

$$R > 2[\rho_E(AX) + \rho_E(AY)].$$

Тогда все точки $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ будут содержаться в этом шаре, и даже в шаре в два раза меньшего радиуса.

Общая часть шара S и выпуклого тела, ограниченного поверхностью $\overline{F}_n$, будет представлять собою выпуклое тело, границу которого мы обозначим F_n^*. Так как точки $\overline{X}_n$ и $\overline{Y}_n$ содержатся в шаре в два раза меньшего радиуса, то расстояние между ними, измеренное на F_n^*, будет то же самое, что и на $\overline{F}_n$.

Поэтому, в силу равенства (3),

$$\rho_{\overline{F}_n^*}(\overline{X}_n\overline{Y}_n) = \rho_E(XY). \qquad (4)$$

Выпуклые поверхности F_n^* сходятся к той части поверхности F, предельной для $\overline{F}_n$, которая содержится в шаре S, а точки $\overline{X}_n$, $\overline{Y}_n$ сходятся к точкам $\overline{X}$, $\overline{Y}$ на F. Поэтому, в силу теоремы о сходимости метрик,

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) = \lim_{n\to\infty} \rho_{F_n^*}(\overline{X}_n\overline{Y}_n),$$

и на основании (4)

$$\rho_F(\overline{X}\overline{Y}) = \rho_E(XY), \qquad (5)$$

т. е. расстояние на поверхности F равно расстоянию на плоскости E, что и требовалось доказать.

Если поверхность F вырождается в точку или прямую, то имеет место тот же результат, потому что теорема о сходимости метрик верна и в этом случае. Но из того, что F реализует метрику плоскости E, следует, что F не может быть ни точкой, ни прямой. Априори множество F, будучи пределом выпуклых поверхностей, могло бы ещё оказаться состоящим из двух параллельных плоскостей. Это, однако, также невозможно, потому что, взяв точки $\overline{X}$, $\overline{Y}$ на разных плоскостях и взяв соответствующие им точки X и Y на плоскости E, мы получили бы противоречие с равенством (5).

§ 4. Многообразия, на которых можно задать метрику положительной кривизны.

В связи с теоремами о реализуемости метрики положительной кривизны естественно встаёт вопрос о тех многообразиях, на которых вообще можно задать метрику положительной кривизны; иными словами, — вопрос о том, каких топологически различных типов могут быть многообразия с такой метрикой[1]). Метрику положительной кривизны мы будем называть собственной, если она, хотя бы в окрестности одной точки, не сводится к эвклидовой. В § 6 гл. V было доказано, что для того, чтобы метрика в области G на выпуклой поверхности была эвклидовой в малом, необходимо и достаточно, чтобы кривизна области G обращалась в нуль. Так как, по теореме 2 § 1, в многообразии R с метрикой положительной кривизны всякая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности, то аналогичный результат имеет место во всяком таком многообразии R; в частности, *для того, чтобы каждая точка многообразия R имела окрестность, изометричную части эвклидовой плоскости, неодходимо и достаточно, чтобы кривизна всего многообразия R равнялась нулю.*

Вопрос о топологических типах замкнутых, т. е. компактных многообразий с метрикой положительной кривизны решается следующей теоремой:

---

[1]) Вопрос о топологическом строении многообразий, на которых можно задать метрику, определённую линейным элементом того или иного типа, давно занимал внимание геометров. Для случая замкнутых многообразий он решается легко на основании теоремы Гаусса-Боннэ; здесь мы просто повторим классический вывод, выразив его в наших более общих терминах. Случай полной метрики постояной кривизны, в частности эвклидовой в малом, рассматривали Клейн и Киллинг в 1890 г. Случай полной метрики положительной кривизны был рассмотрен Кон-Фоссеном; в нашем выводе мы используем метод Кон-Фоссена. См. S. Cohn-Vossen, Kürzeste Wege und Total-krümmung auf **Flächen. Compositio mathematica**, т. 2, (1935) стр. 69—133. Классические результаты, восходящие к Клейну и Киллингу, излагаются, например, в книгах: Н. В. Ефимов, **Высшая геометрия**, § 87—104, Э. Картан, Геометрия римановых пространств, гл. III.

Теорема 1. *Собственная метрика положительной кривизны может быть задана на двух и только двух замкнутых многообразиях: на сфере и на проективной плоскости. Метрика же, эвклидовская в малом, может быть задана только на торе и на «бутылке Клейна» (или неориентируемом торе).*

Доказательство. Пусть R — замкнутое, т. е. компактное многообразие с метрикой положительной кривизны и пусть $\chi(R)$ — его эйлерова характеристика. Согласно результату, полученному в § 5 гл. VII, кривизна такого многообразия неотрицательна и равна

$$\omega(R) = 2\pi\chi(R).$$

Так как $\omega(R) \geqslant 0$, то необходимо $\chi(R) \geqslant 0$, и, следовательно, метрика положительной кривизны может быть задана лишь на многообразиях с неотрицательной характеристикой. Если $\chi(R) = 0$, то $\omega(R) = 0$ и, как только что было доказано, метрика многообразия R оказывается эвклидовой в малом. Следовательно, собственная метрика положительной кривизны может быть задана только на многообразиях с положительной эйлеровой характеристикой. А известно, что таких многообразий имеется только два: сфера и проективная плоскость.

На обоих этих многообразиях можно задать метрику положительной кривизны. На сфере её задаёт всякая замкнутая выпуклая поверхность. А метрику положительной кривизны на проективной плоскости мы получим, если отождествим противоположные точки любой замкнутой выпуклой поверхности, имеющей центр симметрии.

Нулевую эйлерову характеристику имеют только два замкнутых многообразия: тор и бутылка Клейна. Поэтому только на них можно задать метрику, эвклидову в малом. Тор и бутылка Клейна получаются, как известно, из прямоугольника, путём попарного отождествления его противолежащих сторон. При этом бутылка Клейна получается, если одну пару сторон ориентировать в противоположных направлениях, так что при их склеивании прямоугольник должен перекручиваться. Прямоугольник с попарно отождествлёнными сторонами есть не что иное, как развёртка; эта развёртка как раз и задаёт эвклидову метрику, соответственно, на торе и на бутылке Клейна.

Для незамкнутых многообразий дело обстоит совершенно не так, как для замкнутых, а именно имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *На всяком незамкнутом многообразии, которое может быть получено из замкнутого путём выбрасывания некоторого множества точек, можно задать как собственную, так и несобственную метрику положительной кривизны.*

Например, плоскость и цилиндр получаются выбрасыванием из сферы одной и двух точек. Конечно, не всякое многообразие получается таким образом из замкнутого. Однако не кажется невероятным, чтобы вообще на всяком незамкнутом многообразии можно было задать метрику положительной кривизны. Нам неизвестно ни доказательство, ни опровержение такого общего утверждения.

Доказательство теоремы 2. Пусть многообразие R получается из замкнутого многообразия $\overline{R}$ удалением каких-то точек. Если $\overline{R}$ есть сфера, или проективная плоскость, то на $\overline{R}$ можно задать метрику положительной кривизны, которая индуцирует в R метрику, совпадающую с ней в малой окрестности каждой точки (вследствие теоремы 5 § 2 гл. II). Эта метрика будет собственно положительной кривизны. Если мы удалим из сферы только одну точку, то с точки зрения топологии получим плоскость, а на плоскости, конечно, можно задать эвклидову метрику. Если же из проективной плоскости удалить одну точку, то получится лист Мёбиуса с исключённой границей. На листе Мёбиуса также можно задать эвклидову метрику, потому что общеизвестно, что лист Мёбиуса можно склеить из плоского прямоугольника, не производя растяжений или сжатий. Если теперь удалить из сферы или проективной плоскости новые точки, то эвклидова метрика, заданная после удаления одной точки, индуцирует в получающемся многообразии метрику, также эвклидову в малом.

Пусть теперь многообразие R получается удалением точек из замкнутого многообразия $\overline{R}$, отличного от сферы и проективной плоскости. Как известно, всякое такое многообразие $\overline{R}$ можно разрезать линиями, исходящими из одной точки, так, чтобы получилась фигура, гомеоморфная плоскому многоугольнику [1]). Этот плоский многоугольник P можно обратно отобразить на $\overline{R}$ так, чтобы все его вершины попали в одну произвольную точку A. Тогда на $\overline{R}$ окажется заданной метрика, эвклидова всюду, кроме, может быть, точки A. Но если точка A, как раз, и удаляется из $\overline{R}$; то тем самым мы получим в R метрику, везде эвклидову в малом. Здесь следует заметить, что при отображении многоугольника P на $\overline{R}$, его стороны попарно склеиваются. Метрика в окрестности любой точки на попарно склеенных сторонах будет эвклидовой точно так же, как метрика в окрестности точки на ребре многогранника.

Плоский многоугольник P можно заменить кругом с точками на окружности, играющими роль вершин. Построим полусферу, опирающуюся на эту окружность, и отобразим её на многообразии $\overline{R}$ так, чтобы «вершины» попали в одну из удаляемых точек. Тогда мы получим на R собственную метрику положительной кривизны: R будет в малом изометрично сфере. В окрестности любой точки на склеиваемых дугах окружности метрика будет, очевидно, такая же. Действительно, окрестность такой точки составляется из двух половин так же, как из кусков полушарий составляется окрестность точки на экваторе. Этим доказательство теоремы завершается.

Применяя те же соображения, можно на незамкнутом многообразии R задать весьма произвольную метрику. Однако наше построение приводит, как легко убедиться, к неполным метрикам. На замкнутом многообразии всякая метрика — полная, но для незамкнутых многообразий имеет смысл вопрос о тех многообразиях, на которых можно задать *полную* метрику положительной кривизны. Ответ на этот вопрос даётся следующей теоремой:

Теорема 3. *Единственное незамкнутое многообразие, на котором можно задать полную собственную метрику положительной кривизны, есть плоскость. Полную же метрику, эвклидову в малом, можно задать ещё только на ориентируемом или неориентируемом цилиндре (т. е. на листе Мёбиуса с исключённой границей).*

Наметим доказательство этой теоремы.

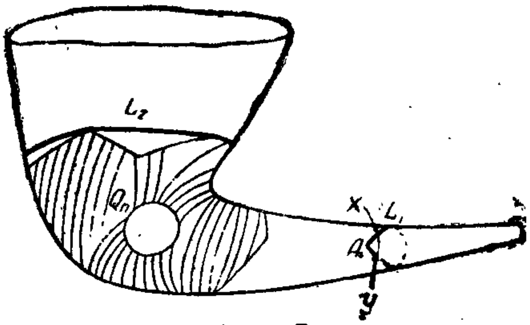
Пусть R — незамкнутое многообразие с полной метрикой положительной кривизны. Построим в нём расширяющуюся последовательность многоугольников Q_n, покрывающих всё R, т. е.

$$Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \ldots \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = R.$$

Возьмём один из многоугольников Q_n и, задавшись каким-нибудь положительным числом r, рассмотрим все такие многоугольники, содержащие Q_n, у которых каждая замкнутая ломаная, входящая в их границу, удалена от Q_n не более чем на r. Из полноты метрики следует, что среди таких многоугольников существует многоугольник P_n с наименьшим периметром. Так как заранее не известно, что многообразие R есть плоскость, то многоугольник P_n может быть неодносвязным, и граница его может состоять более чем из одной замкнутой ломаной.

[1]) См., например, Г. Зейферт и В. Трельфалль, Топология, гл. VI.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_{k_n}$ — замкнутые ломаные, ограничивающие многоугольник P_n. Каждая из них удалена от Q_n не более, чем на r. Пользуясь элементарными рассуждениями, подобными тем, какие мы применяли в § 4 гл. II, или в § 3 данной главы, рассматривая кратчайшие кривые, охватывающие данную область, легко доказать следующее: если ломаная L_i имеет общие точки с границей многоугольника Q_n, то все её вершины лежат в вершинах Q_n, и углы многоугольника P_n при этих вершинах не превосходят π. Если же ломаная L_i не имеет с границей Q_n общих точек, то она представляет собою геодезическую петлю с единственным углом в такой точке A_i, расстояние которой от Q_n как раз равно r. Угол многоугольника P_n при точке A_i будет тогда $\geqslant \pi$. Исключение может составлять только тот случай, когда L_i представляет собою просто замкнутую геодезическую. Итак, на каждой ломаной L_i все углы, кроме, может быть, одного при точке A_i, не превосходят π[1]).



Черт. 74.

Будем теперь увеличивать заданное число r. Тогда множество многоугольников, среди которых мы выбирали многоугольник P_n с наименьшим периметром, будет расширяться. Поэтому минимум их периметров, т. е. периметр многоугольника P_n, представляет собою невозрастающую функцию $p(r)$ от r. Зададим какое-либо $\varepsilon > 0$, и пусть при данном r многоугольник P_n имеет в некоторой точке A_i угол $\alpha_i > \pi + 2\pi\varepsilon$ (черт. 74). Возьмём на сторонах ломаной L_i, сходящихся в вершине A_i, две точки X и Y, равноудалённые от A_i. Заменив часть $XA_i + A_iY$ ломаной L_i кратчайшей XY, мы заменим ломаную L_i другой — L_i^*, и многоугольник P_n заменится многоугольником P_n^*. Так как расстояние точки A_i от многоугольника Q_n не больше r, то расстояние ломаной L_i^* от Q_n будет не больше $r + \Delta r = r + A_iX$. Так как $p(r + \Delta r)$ есть минимум периметров многоугольников, ограниченных ломаными, удалёнными от Q_n не более, чем на $r + \Delta r$, то $p(r + \Delta r)$ не превосходит периметра $p(P_n^*)$ многоугольника P_n^*:

$$p(r + \Delta r) \leqslant p(P_n^*) \qquad (\Delta r = A_iX). \tag{1}$$

Оценим теперь, насколько периметр $p(P_n^*)$ меньше периметра $p(P_n) = p(r)$ многоугольника P_n. Так как полный угол вокруг точки A_i не превосходит 2π, то угол β при вершине A_i в треугольнике A_iXY будет не больше $2\pi - \alpha_i$[2]), а так как $\alpha_i > \pi + 2\pi\varepsilon$, то

$$\beta < \pi - 2\pi\varepsilon. \tag{2}$$

Если же β_0 — соответствующий угол в плоском треугольнике со сторонами той же длины, то $\beta_0 \leqslant \beta$ и, следовательно, тем более

$$\beta_0 < \pi - 2\pi\varepsilon. \tag{3}$$

Основание XY равнобедренного треугольника связано с длиной его боковой стороны $A_iX = A_iY$ равенством

$$XY = 2A_iX \sin \frac{\beta_0}{2} \tag{4}$$

[1]) На черт. 74 наглядно видно, что линия L_1, стремясь сократиться, должна удалиться от Q_n, но так как её расстояние от Q_n не может быть больше r, то она натягивается, образуя в точке A_1 угол $> \pi$. Линия же L_2, стремясь сократиться, натягивается на границу Q_n.

[2]) Если X и Y достаточно близки к A_i, то угол β будет именно тот, который дополняет α_i до полного угла вокруг A_i, потому что $\alpha_i > \pi$.

и, следовательно,

$$XY < 2A_iX \sin\frac{\pi - 2\pi\varepsilon}{2} = 2AX\cos\pi\varepsilon.$$

Поэтому разность длин ломаных L_i и L_i^* будет

$$A_iX + A_iY - XY = 2A_iX - XY > 2A_iX(1 - \cos\pi\varepsilon). \qquad (5)$$

Но разность длин ломаных L_i и L_i^* как раз и есть разность периметров многоугольников P_n и P_n^*, так что

$$p(P_n) - p(P_n^*) > 2A_iX(1 - \cos\pi\varepsilon). \qquad (6)$$

А так как

$$p(P_n) = p(r),\ p(P_n^*) \leqslant p(r + \Delta r) \text{ и } A_iX = \Delta r,$$

то

$$p(r + \Delta r) - p(r) < -2\Delta r(1 - \cos\pi\varepsilon). \qquad (7)$$

Отсюда посредством интегрирования можно заключить, что если бы при всех r на ломаных L_i имелись углы $\alpha_i > \pi + \varepsilon$, то при $r = r_1$ было бы

$$p(r_1) < p(r) - 2(r_1 - r)(1 - \cos\pi\varepsilon).$$

И если взять r_1 достаточно большим, то получилось бы $p(r_1) < 0$, что невозможно. Следовательно, всегда существует такое r, при котором на каждой из ломаных L_i, ограничивающих многоугольник P_n, единственный угол, больший π, всё же меньше $\pi + 2\pi\varepsilon$.

Пусть P_n — именно такой многоугольник. Пусть k — число ограничивающих его ломаных L_i, а χ — его эйлерова характеристика. Пусть, наконец, α_i — те его углы, которые больше π, а γ_j — те углы, которые не больше π. Для кривизны многоугольника P_n мы имеем формулу:

$$\omega(P_n) = 2\pi\chi - \sum_i(\pi - \alpha_i) - \sum_j(\pi - \gamma_j). \qquad (8)$$

Так как $\gamma_j \leqslant \pi$, а $\alpha_i < \pi + 2\pi\varepsilon$ и число углов α_i не превосходит k, то

$$\omega(P_n) \leqslant 2\pi\chi + 2\pi\varepsilon k. \qquad (9)$$

Если каждую ломаную L_i отождествить (топологически) с окружностью плоского круга, то многоугольник P_n окажется дополненным до замкнутого многообразия, а эйлерова характеристика его увеличится на k. Поэтому, если χ_0 — эйлерова характеристика этого замкнутого многообразия, то

$$\chi = \chi_0 - k. \qquad (10)$$

Подставляя это выражение для χ в формулу (9), получим

$$\omega(P_n) \leqslant 2\pi\chi_0 - 2\pi k(1 - \varepsilon). \qquad (11)$$

Так как в исходном многообразии R задана метрика положительной кривизны, то $\omega(P_n) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\chi_0 \geqslant k(1 - \varepsilon). \qquad (12)$$

А так как $k \geqslant 1$ и ε произвольно мало, то $\chi_0 \geqslant 1$. Существует только два замкнутых многообразия с эйлеровой характеристикой $\chi_0 \geqslant 1$: сфера, $\chi_0 = 2$, и проективная плоскость $\chi_0 = 1$. Поэтому формула (12) представляет только следующие возможности: 1) $\chi_0 = 2$, $k = 1$, и многоугольник P_n гомеоморфен кругу; 2) $\chi_0=2$, $k=2$, и P_n гомеоморфен кольцу; 3) $\chi_0=1$, $k=1$ и P_n гомеоморфен листу Мёбиуса.

Если в R задана собственная метрика положительной кривизны, то при достаточно большом n

$$\omega(P_n)\geqslant\omega(Q_n)>0. \tag{13}$$

В двух же последних случаях $\chi_0=k$ и потому из (11) следует, что

$$\omega(P_n)\leqslant 2\pi k\varepsilon.$$

Но $k\leqslant 2$, и стоит взять ε столь малым, чтобы было $4\pi\varepsilon<\omega(Q_n)$, как получим $\omega(P_n)<\omega(Q_n)$ вопреки (13). Следовательно, при достаточно больших n многоугольник P_n гомеоморфен кругу, и потому само многообразие R гомеоморфно плоскости.

Если же метрика в R — эвклидова в малом, то для многоугольников P_n допустимы все три возможности, и в соответствии с этим многообразие R может быть гомеоморфно или плоскости, или цилиндру, или неориентируемому цилиндру.

Таким образом вопрос о тех многообразиях, на которых можно задать полную метрику положительной кривизны, решён [1]).

Более общий вопрос состоит в том, чтобы выяснить, на каких многообразиях можно задать такую метрику положительной кривизны, чтобы каждые две точки многообразия можно было соединить кратчайшей. Мы пока в состоянии решить этот вопрос не для любых многообразий, а только для таких, которые гомеоморфны областям на замкнутых многообразиях. Однако можно думать, что это ограничение не необходимо и что результат теоремы, которую мы сейчас формулируем, останется верным, если указанное ограничение снять.

Теорема 4. *Пусть в многообразии R, гомеоморфном области на каком-нибудь замкнутом многообразии, задана метрика ρ положительной кривизны так, что любые две точки многообразия R соединимы кратчайшей. Тогда, если метрика ρ — собственная положительной кривизны, то многообразие R гомеоморфно либо сфере, либо проективной плоскости, либо внутренности круга (т. е. обыкновенной плоскости), или же оно может быть дополнено до многообразия одного из этих типов присоединением некоторого множества точек M, причём дополненное многообразие также будет иметь метрику положительной кривизны, а каждая точка множества M будет обладать тем свойством, что через неё не проходит никакая кратчайшая.*

---

[1]) Другое доказательство. Пусть R — незамкнутое многообразие с полной собственной метрикой ρ положительной кривизны: $\omega(R)>0$. Как известно из топологии многообразий, всякое незамкнутое многообразие имеет в качестве накрывающего многообразия плоскость, причём при отображении накрытия многообразие покрывается бесконечное число раз, если оно само не есть плоскость (см. Зейферт и Трельфалль, Топология, гл. VIII). Если плоскость E накрывает R, то в ней индуцируется метрика ρ_1 следующим образом: за $\rho_1(XY)$ $(X, Y\in E)$ принимается точная нижняя граница длин тех кривых из R, которые являются образами кривых, соединяющих X и Y, при отображении накрытия. При таком определении метрики ρ_1, соответственные точки X и X_0 в E и в R имеют изометричные окрестности. Кон-Фоссен доказал, что если метрика ρ в R — полная, то метрика ρ_1 на E тоже будет полной [см. Доклады Академии Наук СССР, т. III, № 8 (1935), стр. 339—342; из доказанных там теорем данное утверждение легко получается для любой полной внутренней метрики]. Но мы доказали, что полная метрика положительной кривизны на плоскости реализуема. Отсюда следует, что кривизна плоскости E с метрикой ρ_1 не превосходит 2π. С другой стороны, на E имеется бесконечно много областей, изометричных частям R с положительной кривизной, потому что $\omega(R)>0$ и накрытие — бесконечно-листное. Получается противоречие, показывающее, что R не может не быть плоскостью. Эта идея использовать накрытие R плоскостью так же, как изящное соображение с оценкой $p(r+\Delta r)-p(r)$, заимствована из работы Кон-Фоссена, цитированной в начале данного параграфа.

Если же метрика ρ — эвклидова в малом, то многообразие R гомеоморфно одному из следующих многообразий: 1) *плоскости,* 2) *цилиндру,* 3) *неориентируемому цилиндру,* 4) *тору,* 5) *бутылке Клейна, либо же оно может быть дополнено до многообразия, гомеоморфного сфере, плоскости или проективной плоскости, путём присоединения некоторого множества точек M, причём дополненное многообразие будет иметь метрику положительной кривизны, а каждая точка множества M будет обладать тем свойством, что через неё не проходит никакая кратчайшая.* (Пример представляет выпуклый многогранник с исключёнными вершинами: метрика на нём всюду эвклидова.) Коротко говоря, с точностью до множества M, через точки которого не проходит ни одна кратчайшая, многообразие может быть только одним из тех, на которых можно задать полную метрику положительной кривизны.

Доказательство этой теоремы не может быть здесь изложено за недостатком места; оно проводится на основании теоремы о склеивании, причём, конечно, можно заранее предположить, что многообразие R незамкнуто. Тогда строим в нём расширяющуюся последовательность многоугольников Q_n, покрывающих в сумме всё R. Оказывается, что «дыры» в каждом треугольнике Q_n можно заклеить плоскими многоугольниками так, что получится замкнутое многообразие с метрикой положительной кривизны [1]). Отсюда немедленно следует, что самое R гомеоморфно области на одном из таких замкнутых многообразий, и основное утверждение теоремы 4 оказывается доказанным.

§ 5. Вопрос о единственности выпуклой поверхности с данной метрикой.

После того, как доказано существование поверхности, реализующей данную метрику, возникает вопрос о единственности такой поверхности. При этом единственность понимается, конечно, с точностью до движения и отражения. В общем случае ответ должен быть отрицательным, так как известно, что всякий достаточно малый кусок аналитической выпуклой поверхности можно изогнуть, т. е. непрерывно деформировать с сохранением длин кривых на нём. Однако для «больших» кусков поверхности и тем более для полной поверхности дело может обстоять иначе. Конечно, любую выпуклую поверхность можно изогнуть, продавливая её внутрь. Например, можно пересечь поверхность плоскостью и отразить одну её часть в этой плоскости. Непрерывно двигая плоскость, начиная от опорной плоскости и производя такие отражения, мы получим непрерывное изгибание поверхности. Но при такой операции поверхность перестаёт быть выпуклой. Поэтому естественно ограничиваться только такими изгибаниями, которые сохраняют выпуклость поверхности. Мы приведём без доказательства основные относящиеся сюда результаты.

Ещё Коши доказал, что два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленные из равных граней, равны. Этим, однако, не решается вопрос о единственности замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой, т. е. с данной метрикой. Могло бы случиться, что, допуская переламывание граней, можно получить разные замкнутые выпуклые многогранники, имеющие одну и ту же развёртку. Впрочем, простое обобщение метода Коши позволяет доказать невозможность этого и тем самым установить единственность замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой [2]). Более того, основываясь

---

[1]) Это доказывается на основании тех же соображений, какие были указаны в сноске в § 2 по поводу доказательства общей теоремы реализуемости.

[2]) Доказательство теоремы Коши можно найти в книге Ж. Адамар, Элементарная геометрия, часть II (стереометрия), прибавление L, стр. 534, Учпедгиз, 1938. Дополнение к методу Коши см. в работе А. Д. Александрова, «Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с данной метрикой», Мат. сборник, т. 11, вып. 1 (1941), стр. 20.

на неизменности площади сферического изображения при изометрических отображениях, легко доказать, что выпуклая поверхность, изометричная замкнутому выпуклому многограннику, сама есть многогранник. Этот результат, в соединении с указанным только что обобщением теоремы Коши, приводит к теореме: *Выпуклая поверхность, изометричная замкнутому выпуклому многограннику, сама есть равный ему многогранник* [1]). Иными словами, для всякой многогранной метрики положительной кривизны на сфере существует только одна (с точностью до движения и отражения) реализующая её выпуклая поверхность — многогранник.

Для любой метрики положительной кривизны, заданной на сфере, вопрос о единственности реализующей выпуклой поверхности представляется очень трудным [2]).

Здесь имеются пока только два результата. Первый результат принадлежит Кон-Фоссену, который доказал, что *если две трижды дифференцируемые замкнутые выпуклые поверхности со всюду положительной кривизной изометричны, то они равны.*

Доказательство теоремы Кон-Фоссена изложено им в статье «Изгибание поверхностей в целом», Успехи математических наук, вып. I.

Теорема Кон-Фоссена решает вопрос о единственности, если кривизна положительна и заранее предположено, что поверхность трижды дифференцируема. Однако могло бы быть, что ту же метрику также реализует и менее регулярная выпуклая поверхность, например, только дважды дифференцируемая, хотя это и представляетя невероятным.

Кроме того, неизвестно, какие условия, наложенные на метрику, обеспечивают существование трижды дифференцируемой реализующей поверхности. Здесь известен пока только результат Г. Леви, который доказал, что метрику, заданную на сфере аналитическим линейным элементом со всюду положительной кривизной, можно реализовать аналитической выпуклой поверхностью.

Второй результат, хотя и частный, но зато окончательный: можно доказать, что *единственная замкнутая выпуклая поверхность с постоянной гауссовой кривизной есть сфера.*

Здесь уже не требуются никакие предположения о регулярности. Это предложение есть очевидное следствие обобщённой теоремы Гаусса и следующей теоремы:

Если две замкнутые выпуклые поверхности обладают тем свойством, что каждые две области на этих поверхностях, имеющие одно и то же сферическое изображение, имеют равные площади, то такие поверхности равны и параллельно расположены [3]).

Относительно незамкнутых поверхностей можно доказать следующее: *Если из замкнутой выпуклой поверхности удалить сколь угодно малую область с положительной кривизной, то получится поверхность, которая уже не будет единственной выпуклой поверхностью с той же метрикой.* Существует континуум изометричных, но не равных ей поверхностей, и есть основание предполагать, что её можно даже непрерывно изгибать.

Для бесконечных выпуклых поверхностей имеет место теорема: *Если бесконечная полная выпуклая поверхность имеет полную кривизну* $< 2\pi$, *то*

---

[1]) Эта теорема была доказана впервые С. П. Оловянишниковым в 1941 г., без использования инвариантности сферического изображения.

[2]) Достаточно сказать, что ещё в 1838 г. Миндинг высказал предположение, что кроме сферы иет других замкнутых аналитических поверхностей с постоянной кривизной, и лишь в 1899 г. оно было доказано Либманом. После этого вопросом единственности аналитических замкнутых выпуклых поверхностей занимались Либман, Гильберт, Вейль, Бляшке, и только в 1927 г. вопрос был решён Кон-Фоссеном.

[3]) См. А. Александров, К теории смешанных объёмов выпуклых тел, III Матем. сборник, т. 3, вып. 1 (1938), стр. 36.

существует бесконечно много изометричных, но не равных ей выпуклых поверхностей. Тем более то же верно для всякого куска такой поверхности.

Доказательство обеих приведённых теорем о существовании изометричных, но не равных поверхностей основано на доказанных нами теоремах о реализуемости и на теореме о склеивании. Они также являются теоремами существовании и потому поддаются нашим методам, в то время, как теоремы единственности являются теоремами «несуществования», — несуществования изометричных, но неравных поверхностей, — и требуют иных методов.

Теорема о бесконечных поверхностях принадлежит Оловянишникову; при этом он получил даже более точный результат. Пусть F — бесконечная полная выпуклая поверхность с полной кривизной, или, что то же самое, с площадью сферического изображения, меньшей 2π. Если поверхность F бесконечно подобно сжимать к произвольной точке O, то она будет сходиться к выпуклому конусу с вершиной в точке O (или дважды покрытому углу на плоскости), который мы называем предельным конусом поверхности. Легко убедиться в том, что сферическое изображение этого конуса совпадает с замыканием сферического изображения поверхности F. (Сферическое изображение конуса, очевидно, замкнуто, а сферическое изображение поверхности F может и не быть замкнутым.) Теорема Оловянишникова гласит: *Пусть F — бесконечная полная выпуклая поверхность с полной кривизной $\omega < 2\pi$ и L — бесконечная в одну сторону кривая на F, каждый отрезок которой является кратчайшей (такие кривые можно проводить из любой точки на F). Пусть K — выпуклый конус с площадью сферического изображения, равной полной кривизне ω поверхности F, и L' — какая-либо образующая этого конуса. Существуют две выпуклые поверхности F_1, F_2, изометричные F, имеющие конус K в качестве своего предельного конуса и такие, что при их сжатии в конус K линии L_1 и L_2, соответствующие L, переходят в L'. Поверхности F_1 и F_2 отличаются ориентацией: если задано направление обхода на F_1, образующее с внешней нормалью правый винт, то соответствующее направление обхода на F_2 образует с внешней нормалью левый винт*[1]. (В частных случаях F_1 и F_2 могут быть равны).

Конус можно деформировать, не меняя полного угла при его вершине и не меняя тем самым площади его сферического изображения. Поэтому мы можем непрерывно изгибать конус K и вместе с ним будет изгибаться поверхность F_1. Впрочем, остаётся не выясненным, будет ли поверхность изгибаться также непрерывно. Можно оставлять конус K неизменным, но двигать по нему образующую L'; тогда поверхность F_1 будет как бы оборачиваться вокруг этого конуса. (Для поверхностей с полной кривизной, равной 2π, предельный конус вырождается в полупрямую, и теорема, оставаясь формально справедливой, становится бессодержательной.)

В заключение этого параграфа выскажем некоторые гипотезы, представляющиеся довольно вероятными:

1. Выпуклая поверхность с полной кривизной, равной 4π, определяется своей метрикой однозначно. (Такая поверхность может и не быть замкнутой.)

2. Бесконечная выпуклая поверхность с кривизной, равной 2π, определяется своей метрикой однозначно. (Такая поверхность может и не быть полной.)

Однозначная определяемость понимается в том смысле, что две изометричные выпуклые поверхности должны быть равны.

3. Выпуклые поверхности, получающиеся из поверхностей, указанных в гипотезах 1, 2, путём исключения областей с положительной кривизной, а так же бесконечные поверхности с кривизной $< 2\pi$ допускают непрерывные изги-

[1] С. П. Оловянишников, Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей, Матем. сборник, т. 18, № 3 (1946), стр. 434.

бания. Более того, возможно, что если две такие поверхности изометричны, то одну из них можно непрерывно изогнуть в другую или в поверхность, симметричную другой. Для малых кусков аналитических поверхностей со всюду положительной кривизной это доказано Леви (1912 г.).

4. Изометрические отображения бесконечных полных выпуклых поверхностей, указанные в теореме Оловянишникова, можно осуществлять непрерывным изгибанием с возможным добавлением отражения, и при данных F, K, L, L' и данной ориентации поверхность F_1 — единственная. Эти утверждения доказаны Оловянишниковым для многогранников.

Полное решение поставленных вопросов представляет, повидимому, исключительные трудности, поэтому даже отдельные частные результаты, решающие тот или иной вопрос для более или менее специального класса поверхностей, могут представлять большой интерес.

§ 6. Различные определения метрики положительной кривизны.

Метрика положительной кривизны определяется как такая внутренняя метрика, в которой сумма углов всякого достаточно малого треугольника не меньше π, и в зависимости от выбора того или иного определения угла, мы будем получать разные определения этой метрики. При этом, конечно, нужно брать такое определение, которое позволяет доказать, что во всяком многообразии с метрикой положительной кривизны каждая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности. Чтобы обойтись без специального условия существования угла, мы ввели понятие о нижнем угле и воспользовались им для определения метрики положительной кривизны. Однако, как уже было выяснено при самом введении определения этого угла, оно страдает тем недостатком, что в нём играет роль не только сколь угодно малая окрестность той точки, из которой исходят кратчайшие. Поэтому желательно заменить его другим. Другие определения углов приводят к новому определению метрики положительной кривизны и тем самым к новым условиям, необходимым и достаточным для того, чтобы каждая точка в многообразии с такой метрикой имела окрестность, изометричную выпуклой поверхности. Мы укажем без доказательств различные результаты, которые могут быть здесь получены. Они могут рассматриваться как разные системы аксиом, определяющие внутреннюю метрику выпуклых поверхностей.

Итак, мы берём за основу следующие условия, налагаемые на метрическое пространство R:

1. R есть двумерное многообразие.
2. Метрика в R — внутренняя.
3. Сумма углов между сторонами всякого достаточно малого треугольника в R не меньше π.

Во-первых, под углом можно понимать угол в смысле нашего обычного определения как $\lim\limits_{x,y \to 0} \gamma(x, y)$. В этом случае к условиям 1—3 нужно присоединить условие.

4. Между каждыми двумя кратчайшими в R, исходящими из одной точки, существует определённый угол, и ещё, скажем, условие 5 неналегания кратчайших.

Система условий 1—5 будет необходимой и достаточной для того, чтобы каждая точка в R имела окрестность, изометричную выпуклой поверхности. Однако доказательство достаточности оказывается существенно труднее, чем при введении нижнего угла. Условие 5, вероятно, является лишним, но мы пока не можем доказать этого.

Во-вторых, в условии 3 можно иметь в виду угол, определённый следующим образом. Пусть L_1 и L_2 — две кратчайшие, исходящие из точки O в многообразии R с метрикой ρ. Пусть X_1, X_2 — переменные точки в R, отличны-от O. Положим $z=\rho(X_1X_2)$, $x_i=\rho(OX_i)$, $\xi_i=\frac{\rho(X_iL_i)}{\rho(OX_i)}$ $(i=1,2)$, где $\rho(X_iL_i)$ — расстояние точки X_i от кратчайшей L_i. Пусть φ — угол плоского треугольника со сторонами x_1, x_2, z, лежащий против стороны z. За угол $\alpha(L_1L_2)$ между кратчайшими L_1 и L_2 принимается нижний предел угла φ при x_1, x_2, ξ_1, ξ_2, стремящихся к нулю. (Наглядный смысл условия, что x_1, x_2 и ξ_1, ξ_2 стремятся к нулю, очевиден.) Нижний предел всегда существует, а потому особое условие существования угла оказывается лишним.

Довольно просто доказывается следующее общее утверждение. Только что определённый угол $\alpha(L_1L_2)$ всегда не больше нижнего угла между L_1 и L_2 в смысле принятого нами определения. Поэтому, если под углом в условии 3 понимать угол $\alpha(L_1L_2)$, то из этого условия сразу следует, что сумма нижних углов между сторонами треугольника всегда не меньше π. А так как мы доказали достаточность такого условия, то, тем самым, условие 3 оказывается достаточным и с углом $\alpha(L_1L_2)$. Вместе с тем, угол $\alpha(L_1L_2)$, по определению, зависит только от сколь угодно малых отрезков кратчайших L_1, L_2 вблизи точки O, и, таким образом, такое понятие угла свободно от отмеченного нами недостатка понятия нижнего угла.

Однако неудобство угла $\alpha(L_1L_2)$ состоит в том, что при его введении необходимость условия 3 доказывается гораздо сложнее. Именно, используя свойство непрерывности кривизны можно доказать, что на выпуклой поверхности угол $\alpha(L_1L_2)$ равен углу между L_1 и L_2 в смысле нашего обычного определения (причём угол φ при x_1, x_2, ξ_1, $\xi_2\to 0$ имеет всегда определённый предел). А так как сумма обычных углов между сторонами треугольника на выпуклой поверхности не меньше π, то тем самым оказывается доказанной необходимость условия 3 с углом $\alpha(L_1L_2)$. Однако непрерывность кривизны есть свойство довольно глубокое, и, в частности, мы смогли установить его только в § 4 гл. V, а потому вводить столь трудно доказываемое необходимое условие представляется нерациональным.

Наконец, можно ввести ещё одно из двух определений угла:

$$(\mathrm{A})\ \text{как}\ \overline{\lim_{x,y\to 0}}\,\gamma(x, y)\ \text{и}\ (\mathrm{B})\ \text{как}\ \underline{\lim_{x,y\to 0}}\,\gamma(x, y).$$

Так как эти верхний и нижний пределы существуют, то особое условие существования угла не нужно, но оказываются необходимыми другие условия.

При определении угла (A) можно ввести условие 4(A). На каждой кратчайшей L почти все точки X (в смысле линейной меры) таковы, что сумма углов (A) между ветвями L, сходящимися в X, и любой кратчайшей, исходящей из X, не превосходит π. Необходимость этого условия нам известна, и можно доказать, что условия 1—3, 4(A) достаточны. Без условия 4(A) или какого-либо другого условия обойтись нельзя, потому что можно указать простые примеры метрик, удовлетворяющих условиям 1—3 (с определением угла (A)), но вовсе не реализуемых в малом посредствам каких бы то ни было поверхностей. Именно, определим на плоскости длину $|\bar{x}|$ вектора $\bar{x}$ так, чтобы выполнялись условия: 1) $|\bar{x}+\bar{y}|\leqslant|\bar{x}|+|\bar{y}|$, 2) $|\bar{x}|=0$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}=0$, 3) $|\lambda\bar{x}|=|\lambda|\,|\bar{x}|$, 4) если $\bar{x}=\bar{y}$ в смысле возможности совместить $\bar{x}$ и $\bar{y}$ параллельным перенесением, то $|\bar{x}|=|\bar{y}|$. В результате на плоскости определится метрика, которая, как легко видеть, будет внутренней и будет удовлетворять условию 3 с определением угла (A). Кратчайшими в такой метрике будут прямые, но обычный угол между ними (как $\lim\limits_{x,y\to 0}\gamma(x, y)$) будет существовать только тогда, когда введённая метрика эквивалентна эвклидовой. Если же, например, положить $|\bar{x}|=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, где x_i, y_i — прямоугольные координаты концов отрезка $\overline{x}$, то все условия, наложенные на $|\overline{x}|$, будут выполняться, но угол между прямыми не будет существовать [1]).

Если принять определение угла (В), то в качестве дополнительного условия можно ввести условие неналегания кратчайших. Однако представляется вероятным, что в этом случае можно обойтись без каких бы то ни было дополнительных условий. Если бы это удалось доказать, то условия 1—3 с определением угла (В) давали бы наиболее простую систему условий, необходимых и достаточных для того, чтобы в пространстве R каждая точка имела окрестность, изометричную выпуклой поверхности.

---

[1]) Вместо условия 4(А) можно ввести следующее: пространство имеет в каждой точке касательный конус (в смысле определения, данного в конце § 5 гл. IV). Метрика, заданная линейным элементом ds с непрерывными коэффициентами E, F, G, заведомо удовлетворяет этому условию (конус в этом случае будет во всех точках плоскостью), и поэтому, если ограничиваться заранее только такими метриками, то определение угла (А) оказывается наиболее удобным.

ГЛАВА IX.

КРИВЫЕ НА ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ.

§ 1. Направление кривой.

Из основных понятий теории кривых во внутренней геометрии мы рассмотрели пока только длину и угол между кривыми. Теперь мы обратимся к двум другим основным понятиям: о направлении кривой в данной точке и о повороте его вдоль кривой, что является обобщением понятия о кривизне кривой. Так как из данной точки на выпуклой поверхности кратчайшие могут исходить не во всех направлениях, то внутреннее определение направления кривой посредством касающейся её кратчайшей представляется неподходящим. Например, на прямом круговом конусе нет кратчайших, касающихся окружности его основания, так же, как на двояковыпуклой линзе нет кратчайших, касающихся её ребра. Между тем, как окружность основания прямого кругового конуса, так и ребро двояковыпуклой линзы представляют собой окружности как в пространстве, так и в смысле внутренней геометрии, и было бы довольно нелепо не считать их гладкими кривыми. Можно также указать примеры кривых, не являющихся рёбрами выпуклой поверхности и гладких в пространственном смысле, но не имеющих в некоторых точках касающихся их кратчайших [1]).

Эти соображения заставляют ввести иное определение направления кривой, что было сделано ещё в § 7 гл. I. Именно, мы исходим из понятия угла между кривыми. Пусть $X_t = X(t)$, $Y_s = Y(S)$ — две кривые, исходящие из одной точки $O = X_0 = Y_0$ на выпуклой поверхности или вообще в метрическом пространстве с метрикой ρ. При этом предполагается, что при t и s, достаточно близких к нулю, но отличных от нуля, точки X_t и Y_s отличны от O. (Это условие будет в дальнейшем всегда предполагаться выполненным [2]).) Пусть $\gamma(t, s)$ — угол в плоском треугольнике со сторонами, равными $\rho(OX_t)$, $\rho(OY_s)$, $\rho(X_tY_s)$, лежащий против стороны, равной $\rho(X_tY_s)$. Мы говорим, что кривые $X(t)$, $Y(s)$ образуют в точке O угол α, если $\lim\limits_{t, s \to 0} \gamma(t, s)$ существует и равен α.

Мы говорим далее, что какая-либо *кривая $X(t)$, исходящая из точки $O = X(0)$, имеет в этой точке определённое направление, если она сама с собой образует в точке O определённый угол.* Применяя данное только что определение угла, нужно понимать это следующим образом: кривую $X(t)$ рассматриваем как две совпадающие кривые с общим параметром; угол между этими совпадающими кривыми определяется как $\lim\limits_{t, t' \to 0} \gamma(t, t')$, т. е. берутся

---

[1]) В § 10 гл. I был дан пример гладкой выпуклой поверхности, на которой из точки O в некотором направлении L не исходит никакая кратчайшая. Плоское сечение такой поверхности, касающееся L, будет гладкой крнвой, не имеющей в точке O касающейся её кратчайшей.

[2]) Если бы при сколь угодно малых t было $X_t = O$, то угол $\gamma(t, s)$ не был бы определён при таких t, и данное определение угла не имело бы смысла.

точки $X_t = X(t)$, $X_{t'} = X(t')$, и угол $\gamma(t, t')$ определяется как угол в треугольнике со сторонами $\rho(OX_t)$, $\rho(OX_{t'})$, $\rho(X_tX_{t'})$. Если взять $t = t'$, то точки X_t и $X_{t'}$ совпадут и потому $\gamma(t, t) = 0$. Следовательно, если $\lim\limits_{t, t' \to 0} \gamma(t, t')$ существует, то он равен нулю; иными словами, *если кривая образует сама с собой определённый угол, то этот угол равен нулю.*

Очевидно, что всякая кратчайшая имеет в начальной точке определённое направление. На плоскости существование направления кривой в смысле нашего определения эквивалентно существованию касательной; этот факт является частным следствием следующей общей теоремы, позволяющей лучше уяснить смысл введённых нами определений угла и направления.

Теорема 1. *Пусть $X_t = X(t)$, $Y_s = Y(s)$ — две кривые, исходящие из точки $O = X_0 = Y_0$ на выпуклой поверхности. Для того чтобы они образовывали в точке O определённый угол, равный α, необходимо и достаточно, чтобы при t и $s \to 0$ угол между кратчайшими OX_t, OY_s стремится к α.*

Доказательство. Пусть $\alpha(t, s)$ — угол между кратчайшими OX_t, OY_s [1]), а $\gamma(t, s)$ имеет прежний смысл. Так как $\alpha(t, s)$ есть угол между сторонами треугольника OX_tY_s, а $\gamma(t, s)$ — соответствующий угол плоского треугольника со сторонами той же длины, то

$$|\alpha(t, s) - \gamma(t, s)| \leqslant \omega(t, s), \tag{1}$$

где $\omega(t, s)$ — кривизна внутренней области треугольника OX_tY_s (теорема 1 § 6 гл. V). Но когда точки X_t и Y_s сходятся к O, внутренность треугольника OX_tY_s оказывается включённой во всё меньшую и меньшую окрестность точки O, из которой исключена сама точка O. Такие «пунктированные» окрестности образуют исчезающую последовательность множеств, и, по свойству непрерывности кривизны, кривизны их стремятся к нулю. Следовательно, также

$$\lim_{t, s \to 0} \omega(t, s) = 0.$$

В соединении с (1) это даёт, что $\lim\limits_{t, s \to 0} \gamma(t, s)$, т. е. угол между нашими кривыми существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{t, s \to 0} \alpha(t, s)$, что и требовалось доказать.

В силу данного нами определения направления, из теоремы 1 следует: *Для того, чтобы кривая $X_t = X(t)$ на выпуклой поверхности имела в начальной точке $O = X_0$ определённое направление, необходимо и достаточно, чтобы при $t, t' \to 0$ угол между кратчайшими OX_t и $OX_{t'}$ стремился к нулю.* Отсюда ясно, что на плоскости существование направления эквивалентно существовованию касательной.

Теорема 2. *Для того чтобы две кривые на выпуклой поверхности, исходящие из общей точки O, образовывали друг с другом определённый угол, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них имела в точке O определённое направление.*

Доказательство. Пусть $X_t = X(t)$, $Y_s = Y(s)$ — две кривые на выпуклой поверхности, исходящие из точки $O = X_0 = Y_0$. Пусть $\alpha(t, s)$ — угол между кратчайшими OX_t, OY_s, а $\xi(t, t')$ и $\eta(s, s')$ — углы между кратчайшими OX_t, OX_t' и OY_s, OY_s'.

Согласно теореме 1, существование $\lim\limits_{t, s \to 0} \alpha(t, s)$ необходимо и достаточно для существования угла между нашими кривыми, а равенства $\lim\limits_{t, t' \to 0} \xi(t, t') = \lim\limits_{s, s' \to 0} \eta(s, s') = 0$ необходимы и достаточны для существования направлений этих кривых.

[1]) При данных X_t и Y_s кратчайшие OX_t, OY_s могут быть не единственными, и, следовательно, функция $\alpha(t, s)$, вообще говоря, — неоднозначная.

Из общего свойства углов (теорема 1 § 1 гл. IV) следует, что

$$\alpha(t,\ s) \leqslant \alpha(t',\ s') + \xi(t,\ t') + \eta(s,\ s'),$$

и аналогично

$$\alpha(t',\ s') \leqslant \alpha(t,\ s) + \xi(t,\ t') + \eta(s,\ s').$$

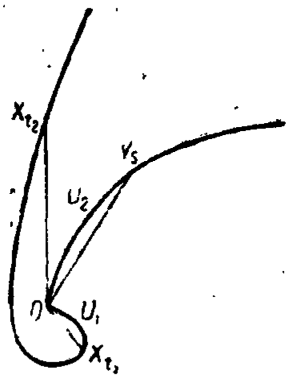
Отсюда ясно, что если $\lim\limits_{t,\ t' \to 0} \xi(t,\ t') = \lim\limits_{s,\ s' \to 0} \eta(s,\ s') = 0$, то $\lim\limits_{t,\ s \to 0} \alpha(t,\ s)$ существует, т. е. из существования направлений кривых следует существование угла между ними.

Докажем теперь, что, обратно, из существования $\lim\limits_{t,\ s \to 0} \alpha(t,\ s)$ следует, что $\lim\limits_{t,\ t' \to 0} \xi(t,\ t') = \lim\limits_{s,\ s' \to 0} \eta(s,\ s') = 0$. Допустим, следовательно, что $\lim\limits_{t,\ s \to 0} \alpha(t,\ s)$ существует. Тогда для любого данного положительного ε найдутся t_ε, s_ε, удовлетворяющие двум условиям:

1. При всяких t', $t < t_\varepsilon$ и s, $s' < s_\varepsilon$

$$|\alpha(t,\ s) - \alpha(t',\ s')| < \varepsilon.$$

2. При всех $t < t_\varepsilon$ и $s < s_\varepsilon$ точки X_t, Y_s лежат в такой выпуклой окрестности U точки O, что кривизна её за вычетом точки O меньше ε:



Черт. 75.

$$\omega(U - O) < \varepsilon. \tag{2}$$

Этому условию можно удовлетворить вследствие свойства непрерывности кривизны.

Докажем, что при t, $t' < t_\varepsilon$ и s, $s' < s_\varepsilon$

$$\xi(t,\ t') \quad \text{и} \quad \eta(s,\ s') \leqslant 3\varepsilon.$$

Так как ε можно взять сколь угодно малым, то тем самым будет доказано, что углы $\xi(t,\ t')$, $\eta(s,\ s')$ стремятся к нулю.

Достаточно рассмотреть один из этих углов, скажем ξ.

Допустим, что, вопреки доказываемому, существуют такие $t_1 < t_2 < t_\varepsilon$, что

$$\xi(t_1,\ t_2) > 3\varepsilon\ [1]. \tag{3}$$

Возьмём какое-либо $s < s_\varepsilon$ и проведём кратчайшую OY_s. Пусть U_1 и U_2 — те из секторов, ограниченных парами кратчайших OX_{t_1} и OY_s, OX_{t_2} и OY_s, углы которых равны углам между самими кратчайшими. Если, например, OX_{t_2} проходит в секторе U_1 между OX_{t_1} и OY_s, то угол этого сектора равен сумме углов между OX_{t_1} и OX_{t_2}, OX_{t_2} и OY_s, т. е. $\alpha(t,\ s) = \alpha(t_2,\ s) + \xi(t_1,\ t_2)$, а так как, по условию, $|\alpha(t_1,\ s) - \alpha(t_2,\ s)| < \varepsilon$, то $\xi(t_1,\ t_2) < \varepsilon$. Это противоречит предположению и, следовательно, OX_{t_2} не может проходить в секторе U_1; по той же причине OX_{t_1} не может проходить в секторе U_2. Таким образом, эти секторы расположены по разные стороны от кратчайшей OY_s (черт. 75).

Возьмём какое-либо значение t между t_1 и t_2 и проведём кратчайшую OX_t; угол $\alpha(t,\ s)$, который она образует с кратчайшей OY_s, по условию, удовлетворяет неравенствам

$$\left.\begin{aligned} |\alpha(t,\ s) - \alpha(t_1,\ s)| < \varepsilon, \\ |\alpha(t,\ s) - \alpha(t_2,\ s)| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пусть U — тот сектор между OX_t и OY_s, угол которого равен углу между этими кратчайшими, т. е. $\alpha(t,\ s)$. Так как секторы U_1 и U_2 расположены по разные стороны от OY_s, то либо U содержит один из них, либо, напротив, U содержится в одном из них.

[1] Т. е. существуют такие кратчайшие OX_{t_1} и OX_{t_2}, что угол между ними $> 3\varepsilon$.

Если, например, U содержится в U_1, то угол между OX_{t_1} и OY_s равен сумме углов между OX_{t_1} и OX_t, OX_t и OY_s:

$$\alpha(t_1, s) = \alpha(t, s) + \xi(t_1, t)$$

и вследствие первого из неравенств (4) $\xi(t_1, t) < \varepsilon$.

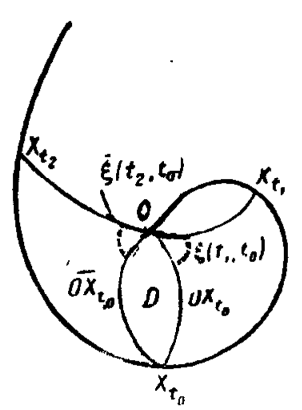
Если же, напротив, сектор U содержит сектор U_1, то

$$\alpha(t, s) = \alpha(t_1, s) + \xi(t_1, t),$$

и снова получается, что $\xi(t_1, t) < \varepsilon$.

Точно так же, если сектор U содержится в U_2 или, напротив, содержит этот сектор, то $\xi(t_2, t) < \varepsilon$. А так как одна из рассмотренных возможностей заведомо имеет место, то при всех t $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ либо $\xi(t_1, t) < \varepsilon$, либо $\xi(t_2, t) < \varepsilon$, т. е. кратчайшая OX_t не может отходить одновременно от OX_{t_1} и OX_{t_2} более, чем на угол ε.

Пусть t_0 — точная верхняя граница тех t, при которых угол $\xi(t_1, t)$ между OX_t и OX_{t_1} меньше ε. Пусть OX_{t_0} — та кратчайшая, соединяющая точки O и X_{t_0}, которая является пределом последовательности таких кратчайших OX_t, для которых $\xi(t_1, t) < \varepsilon$ (черт. 76; жирной линией показана кривая X_t).



Черт. 76.

Так как с непрерывным изменением кратчайшей угол меняется непрерывно (теорема 6 § 4 гл. IV), то угол между OX_{t_0} и OX_{t_1} будет не больше ε:

$$\xi(t_1, t_0) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть, с другой стороны, $\overline{OX}_{t_0}$ — та кратчайшая, соединяющая точки O и X_{t_0}, которая является пределом кратчайших OX_t при $t \to t_0 + O$. Так как при $t > t_0$ кратчайшие OX_t образуют с OX_{t_1} угол, больший ε, то, по доказанному выше, они образуют с OX_{t_2} угол, меньший ε. Поэтому для предельной кратчайшей $\overline{OX}_{t_0}$ этот угол не больше ε [1]):

$$\bar{\xi}(t_2, t_0) \leqslant \varepsilon.$$

Итак, кратчайшие OX_{t_0} и $\overline{OX}_{t_0}$ образуют соответственно с OX_{t_1} и OX_{t_2} углы, не большие ε, а так как угол $\xi(t_1, t_2)$ между самими OX_{t_1} и OX_{t_2}, по предположению, больше 3ε, то угол между OX_{t_0} и $\overline{OX}_{t_0}$ в точке O должен быть больше ε.

Эти кратчайшие OX_{t_0} и $\overline{OX}_{t_0}$, соединяя одни и те же точки O и X_{t_0}, ограничивают двуугольник D, который вследствие второго условия, наложенного на рассматриваемые значения t, содержится в выпуклой окрестности U. Поэтому кривизна $\omega(D)$ его внутренней области не больше $\omega(U - O)$ и на основании (2)

$$\omega(D) \leqslant \omega(U - O) < \varepsilon.$$

Кривизна внутренней области двуугольника равна сумме его углов. Поэтому угол между OX_{t_0} и $\overline{OX}_{t_0}$ в точке O должен быть меньше ε. Между тем, только что было доказано противное. Полученное противоречие показывает невозможность сделанного предположения о существовании таких t_1 и $t_2 < t_s$, при которых $\xi(t_1, t_2) > 3\varepsilon$. Следовательно, $\xi(t, t') \leqslant 3\varepsilon$ при всех t и t'. А так как ε

---

[1]) Может быть, что $t_0 = t_2$ и тогда никаких $t > t_0$ нет; но в этом случае за кратчайшую $\overline{OX}_{t_0}$ мы принимаем самое OX_{t_2}.

произвольно, то $\lim\limits_{t, t' \to 0} \xi(t, t')$, т. е. кривая $X(t)$ имеет в точке O определённое направление. Так как кривые $X(t)$, $Y(s)$ играют одинаковую роль, то кривая $Y(s)$ также имеет в O определённое направление, и теорема доказана.

Естественно ввести следующее определение: *две кривые, исходящие из точки O, имеют в ней одно и то же направление, если угол между ними равен нулю.* Из доказанной только что теоремы следует, что в этом случае каждая из них имеет определённое направление, и потому имеет смысл говорить о совпадении их направлений.

Если кривые L_1, L_2, L_3 образуют друг с другом углы α_{12}, α_{13}, α_{23}, то по теореме 1 § 1 гл. IV $\alpha_{13} \leqslant \alpha_{12} + \alpha_{23}$. Следовательно, если $\alpha_{12} = \alpha_{23} = 0$, то также $\alpha_{13} = 0$. Поэтому определённое только что отношение совпадения направлений рефлексивно, симметрично и транзитивно. Оно определяет класс кривых, имеющих в точке O одно и то же направление. В абстрактном смысле самое направление можно рассматривать как такой класс кривых, и утверждение, что кривая имеет в точке O направление d, можно понимать как принадлежность её к соответствующему классу. Далее, если кривые L_1, L_2, L_3 образуют углы α_{12}, α_{23}, α_{13} и $\alpha_{23} = 0$, т. е. если кривые L_2 и L_3 имеют одно направление, то $\alpha_{12} = \alpha_{13}$. Это означает, что кривые одного направления образуют с другой кривой равные углы. Поэтому можно прямо говорить об углах между направлениями. Важное отличие углов между любыми кривыми, т. е. между направлениями, от углов между кратчайшими состоит в том, что для всякого направления из точки O существует другое направление, образующее с первым любой наперёд данный угол (не больший половины полного угла вокруг точки O). Это последнее утверждение вытекает, между прочим, из следующей теоремы, раскрывающей внешне геометрическое значение понятия о направлении:

Теорема 3. *Для того чтобы кривая на выпуклой поверхности, исходящая из точки O, имела в этой точке определённое направление, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке касательную. Угол между двумя кривыми, исходящими из точки O, равен углу между касательными к ним, измеренному на касательном конусе в точке O.*

Доказательство. Пусть кривая L на выпуклой поверхности F имеет в начальной точке O определённое направление. Докажем, что она имеет в точке O касательную. В § 5 гл. V было доказано, что из точки на выпуклой поверхности можно провести кратчайшие, делящие её окрестности на сколь угодно малые секторы. Поэтому из точки можно провести кратчайшие M и N, проходящие по разные стороны от кривой L и образующие с ней углы, отличающиеся от нуля меньше чем на данное $\varepsilon > 0$.

Кривая L не будет пересекать эти кратчайшие сколь угодно близко к точке O, так как она имеет в этой точке определённое направление.

Если поверхность F подобно увеличивать из точки O, то кратчайшие M и N будут сходиться к своим полукасательным. Так как достаточно близко к точке O кривая L не пересекает кратчайших M и N, то при бесконечном подобном увеличении предел её окажется лежащим на касательном конусе между их полукасательными. Но угол между полукасательными равен углу между самими кратчайшими (теорема 2 § 6 гл. IV) и, следовательно, он меньше ε. А так как ε можно взять сколь угодно малым, то предел кривой L будет просто образующей касательного конуса, которая и будет полукасательной к кривой L в точке O.

Пусть теперь кривая L имеет в точке O полукасательную T. Докажем, что она имеет в O определённое направление. Проведём из точки O две кратчайшие M и N так, чтобы полукасательные к ним T_M и T_N ограничивали на касательном конусе сектор с углом, меньшим данного ε, заключающий внутри себя полукасательную T. Это возможно вследствие теоремы, доказанной в § 5 гл. V. Кривая L не будет пересекать ни M, ни N сколь угодно близко к точке O, поскольку касательные T_M, T_N различны. Поэтому, как только точки X и Y на кривой L достаточно близки к O, кратчайшие OX и OY заключены в секторе между M и N и образуют поэтому друг с другом угол, меньший ε. А так как ε произвольно мало, то, в силу теоремы 1 (точнее, в силу выведенного из неё следствия), это как раз и означает, что кривая L имеет в точке O определённое направление.

Если теперь L_1 и L_2 — две кривые, исходящие из O и имеющие в O определённые направления, то по доказанному они имеют полукасательные T_1 и T_2. Применяя к ним проведённое только что рассуждение, мы заключим их в секторы между кратчайшими M_1, N_1 и M_2, N_2, имеющие углы, меньшие ε. Соответственно полукасательные T_1 и T_2 окажутся заключёнными в секторы с такими же углами между полукасательными T_{M_1}, T_{N_1} и T_{M_2}, T_{N_2}.

При этих условиях угол α' между T_1 и T_2 на касательном конусе отличается от угла α_1' между T_{M_1} и T_{M_2} меньше, чем на ε, т. е. $|\alpha' - \alpha_1'| < \varepsilon$; точно так же угол α между L_1 и L_2 отличается от угла α_1 между M_1 и M_2 тоже меньше, чем на ε, т. е. $|\alpha - \alpha_1| < \varepsilon$. Но так как угол между кратчайшими равен углу между их полукасательными, измеренному на касательном конусе (теорема 2 § 6 гл. IV), то $\alpha_1' = \alpha_1$ и, следовательно, $|\alpha - \alpha'| < 2\varepsilon$; а так как ε произвольно мало, то $\alpha = \alpha'$, т. е. угол между самими кривыми L_1 и L_2 равен углу между их полукасательными T_1 и T_2, измеренному на касательном конусе.

Таким образом, теорема доказана полностью. Она показывает, что каждому направлению из точки O соответствует образующая касательного конуса. Вместе с тем, обратно, каждой образующей отвечает направление. Кривую L, имеющую направление, соответствующее образующей T, можно получить, пересекая поверхность плоскостью, проходящей через T. Поэтому теорему 3 можно формулировать ещё так:

Между образующими касательного конуса в точке O и направлениями из этой точки на поверхности имеется взаимно однозначное соответствие, сохраняющее углы. Все кривые данного направления имеют соответствующую образующую в качестве полукасательной.

Это показывает, что для кривых на выпуклой поверхности понятие направления в смысле внутреннего определения совпадает с понятием направления в пространственном смысле. Например, теорема § 5 гл. V гласит: Множество тех особых направлений из данной точки на выпуклой поверхности, в которых нельзя провести кратчайших, имеет угловую меру нуль. Доказывая эту теорему, мы пользовались направлениями на касательном конусе. Теперь же мы можем придать этой теореме чисто внутренний смысл и пересказать всё доказательство на языке внутренней геометрии, не вводя понятия о касательном конусе.

До сих пор речь шла только о направлении кривой в начальной точке.

Если точка O лежит внутри кривой L, то мы будем считать, что L *имеет в точке O определённое направление, если её ветви, исходящие из O, имеют направления, образующие друг с другом угол, равный* π.

Если кривая L на выпуклой поверхности переходит в точке O через ребро этой поверхности, то в точке O кривая L может и не иметь касательной, даже если она имеет в этой точке определённое направление в смысле данного внутреннего определения. Однако кривая L будет иметь в точке O правую и левую касательные, угол между которыми, измеренный на касательном конусе, равен π.

В качестве примеров применения понятия о направлении приведём две теоремы, которые читатель сам легко докажет (речь идёт о кривых на выпуклых поверхностях).

1. Кривая, ограничивающая выпуклую область, имеет в каждой своей точке O определённые направления в обе стороны от O.

2. Назовём эллипсом (гиперболой) геометрическое место точек, сумма (разность) расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 — фокусов — постоянна. Возьмём ветвь L эллипса (гиперболы), исходящую из точки O, и пусть F_1O, F_2O — фокальные радиусы (т. е. кратчайшие F_1O, F_2O, предельные для кратчайших F_1X, F_2X при $X \to O$ по ветви L). У эллипса ветвь L образует с F_1O и F_2O равные углы, а у гиперболы сумма углов между L и F_1O и F_2O равна π. (Мы не оговариваем здесь разных возможных особенностей: например, на сфере эллипс может вовсе не существовать, если его большая ось больше длины большого круга; если же фокусы лежат в полюсах и большая ось равна большому кругу, то эллипс покрывает всю сферу. Разобраться во всех таких и других возможных особенностях эллипса и гиперболы на выпуклых поверхностях представляет любопытную задачу. Если фокусы F_1, F_2 совпадают, то эллипс сводится к окружности, и в этом случае теорема сводится к утверждению, что «окружность перпендикулярна радиусу». Точную формулировку и доказательство этой теоремы мы дадим в § 6, специально посвящённом окружности.)

§ 2. Поворот кривой.

Обратимся теперь к обобщению понятия о кривизне кривой. Рассмотрим сперва геодезическую ломаную, т. е. кривую, состоящую из конечного числа кратчайших. У неё можно различать две стороны, считая их условно правой и левой. Если ломаная не имеет кратных точек, то возможность такого различения сторон очевидна. Если же ломаная имеет кратные точки, то, определив правую и левую сторону какого-нибудь её отрезка, мы распространяем это определение по непрерывности вдоль всей ломаной.

В каждой своей вершине ломаная образует два угла α_i и β_i, один справа, а другой слева от ломаной. Поворотом ломаной справа мы называем величину

$$\varphi = \sum_i (\pi - \alpha_i), \tag{1}$$

а поворотом слева — величину

$$\psi = \sum_i (\pi - \beta_i). \tag{1'}$$

Сумма углов $\alpha_i + \beta_i$ равна полному углу вокруг вершины ломаной, т. е. $2\pi - \omega_i$, где ω_i — кривизна этой вершины. Поэтому

$$\varphi + \psi = \sum_i \omega_i \geqslant 0. \tag{2}$$

Кривизна (площадь сферического изображения) геодезической с исключёнными концами равна нулю, и потому, если ломаная не имеет кратных вершин, формула (2) означает, что сумма поворотов ломаной справа и слева равна кривизне ломаной, не считая её концов. На плоскости и на всякой регулярной поверхности сумма поворотов геодезической ломаной справа и слева всегда равна нулю, так что различие поворотов с разных сторон не является существенным. Но говоря о любой выпуклой поверхности, эти повороты необходимо различать.

Если ломаная ограничивает многоугольник, гомеоморфный кругу, с углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то кривизна многоугольника равна

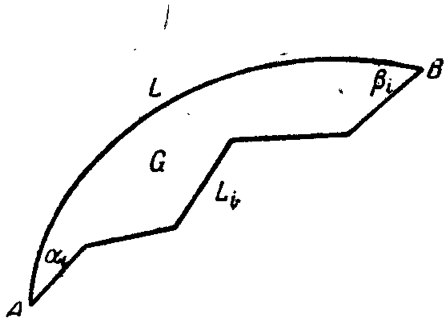
$$\omega = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i).$$

Стоящая здесь справа сумма есть не что иное, как поворот ломаной со стороны многоугольника, и потому можно написать, что

$$\omega = 2\pi - \varphi.$$

Пусть теперь L — произвольная кривая на поверхности, не имеющая кратных точек; у кривой L также можно различать две стороны, которые мы условно будем считать правой и левой. Пусть A и B — концы этой кривой и допустим, что в точках A и B кривая L имеет определённые направления. Построим последовательность геодезических ломаных L_i без кратных точек, соединяющих точки A и B, проходящих справа от кривой L и сходящихся к этой кривой. Как только ломаные L_i достаточно близки к кривой L, понятие о прохождении их справа от L имеет определённый смысл и на всех них можно определить правую сторону соответственно правой стороне кривой L. Определение этих понятий можно дать следующим образом.

Ломаная L_i вместе с кривой L ограничивает некоторую область G_i, которая может, однако, распадаться на отдельные части, если ломаная L имеет с L_i общие точки помимо концов; например, ломаная L_i может быть вписана в L. Мы говорим, что ломаная L_i проходит справа от кривой L, если внутренность области G лежит справа от кривой L. Правой стороной ломаной L_i мы считаем, напротив, сторону, противоположную той, по какую лежит область G_i[1]) (черт. 77).



Черт. 77.

Так как в конечных точках A и B кривая L имеет определённые направления, то она образует там определённые углы с ломаной L_i. Мы берём те углы, которые относятся секторам, лежащим в области G. Пусть α_i и β_i — эти углы, а φ_i — поворот ломаной L_i справа. Величина $\varphi_i+\alpha_i+\beta_i$ представляет собою как бы поворот от направления кривой L в точке A до направления её в точке B, но этот поворот берётся не вдоль самой кривой, а вдоль ломаной L_i.

Поворотом кривой L справа или правым поворотом кривой L мы называем величину

$$\varphi=\lim_{L_i\to L}(\varphi_i+\alpha_i+\beta_i). \tag{3}$$

Аналогично определяется левый поворот кривой L.

Теорема 1. *Для кривой на выпуклой поверхности предел, стоящий в формуле* (3), *существует и не зависит от выбора последовательности ломаных L_i, сходящихся к L справа. Следовательно, существование поворота кривой без кратных точек обеспечивается одним существованием направлений кривой в её концах*[2]).

---

[1]) Если кривая L имеет конечное число кратных точек, то, взяв её отрезок, не имеющий кратных точек, и определив его правую и левую стороны, мы по непрерывности распространим это определение вдоль всей кривой L. Ломаные L_i, сходящиеся к L, нужно брать так, чтобы их топологическое строение было то же, что у кривой L: они должны иметь то же число кратных точек. Понятия о прохождении ломаной справа (слева) от кривой и о правой (левой) стороне ломаной легко могут быть определены. Для этого нужно взять отрезок прямой вместе с его окрестностью на плоскости и отобразить его на кривую L, а окрестность — на окрестность кривой L. Понятия «справа» и «слева» в окрестности кривой должны соответствовать этим понятиям в окрестности отрезка.

[2]) Если речь идёт о кривой на плоскости, то это утверждение оказывается почти очевидным, так как в этом случае величина $\varphi_i+\alpha_i+\beta_i$ будет одна и та же для всех ломаных, достаточно близких к кривой. Она равна углу между направлениями кривой в её концах, с точностью до некоторого кратного 2π. Если кривая на плоскости имеет в каждой точке правую и левую касательные, то её поворот можно определить следующим образом. Выберем направление отсчёта углов и, выбрав направление прохождения кривой, рассмотрим, например, правый касательный вектор. При прохождении кривой он будет вращаться, и его полный поворот даст нам поворот кривой. Можно сказать, что поворот кривой равен $\lim\sum\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — угол поворота касательного вектора при переходе из одной точки кривой в следующую.

Доказательство. Пусть L_i и L_j — две ломаные, проходящие справа от кривой L и соединяющие концы A и B этой кривой. Допустим для простоты, что эти ломаные не пересекаются; тогда они ограничивают некоторый многоугольник H_{ij} (черт. 78). Этот многоугольник лежит справа от одной из ломаных и слева от другой. Допустим, что он лежит справа от L_i и слева от L_j. Углы многоугольника H_{ij} будут следующие: при вершинах A и B они равны соответственно $\alpha_j - \alpha_i$ и $\beta_j - \beta_i$; при вершинах ломаной L_i это будут её углы справа, а при вершинах ломаной L_j — её углы слева. Поэтому, если φ_i обозначает правый поворот ломаной L_i, а ψ_j — левый поворот ломаной L_j, то полный поворот всей замкнутой ломаной $L_i + L_j$ со стороны многоугольника H_{ij} будет

$$\varphi_i + \psi_j + (\pi - \alpha_j + \alpha_i) + (\pi - \beta_j + \beta_i).$$

Поэтому кривизна внутренности многоугольника H_{ij} будет

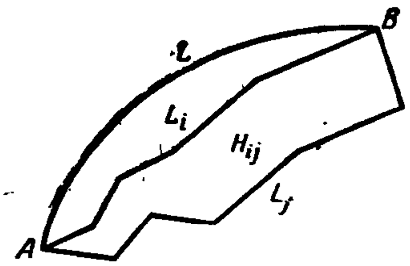
$$\omega(H_{ij}) = 2\pi - \varphi_i - \psi_j - (\pi - \alpha_j + \alpha_i) - (\pi - \beta_j + \beta_i)$$

или

$$\omega(H_{ij}) = (-\psi_j + \alpha_j + \beta_j) - (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i).$$

Пусть φ_j — поворот ломаной L_j справа, а $\omega(L_j)$ — кривизна этой ломаной, исключая её концы; тогда, согласно формуле (2),

$$\omega(L_j) = \varphi_j + \psi_j.$$



Черт. 78.

Выражая отсюда ψ_j и подставляя в выражение для $\omega(H_{ij})$, мы получим:

$$\omega(H_{ij}) + \omega(L_j) = (\varphi_j + \alpha_j + \beta_j) - (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i).$$

Если к многоугольнику H_{ij} присоединить ломаную L_j и полученную фигуру обозначить через $\overline{H}_{ij}$, то можно написать, что

$$\omega(\overline{H}_{ij}) = (\varphi_j + \alpha_j + \beta_j) - (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i). \quad (4)$$

Фигура $\overline{H}_{ij}$ лежит в окрестности кривой L и не имеет с ней общих точек, так как концы ломаной L_j исключены. Если U — окрестность кривой L, стягивающая к L, то в силу свойства непрерывности кривизны

$$\omega(U - L) \to 0.$$

Поэтому, когда ломаные L_i, L_j сходятся к L, то

$$\omega(\overline{H}_{ij}) \to 0,$$

и из формулы (4) следует, что

$$|(\varphi_j + \alpha_j + \beta_j) - (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i)| \to 0,$$

т. е. существует $\lim\limits_{L_i \to L} (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i)$.

Мы предполагали, что ломаные L_i и L_j не пересекаются. Если они пересекаются, то вместо одного многоугольника они ограничивают несколько мно-

---

[1] Такое определение поворота основано на том, что мы можем определить угол между двумя векторами, исходящими из разных точек плоскости. Однако, на кривой поверхности понятие угла между двумя направлениями, исходящими из разных точек, является неопределённым. Неопределённым является, в частности, понятие параллельных направлений. Понятие параллельного переноса вдоль данного пути на кривой поверхности введено Леви-Чивита (см., например, П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, §§ 59—61).

гоугольников. Производя подсчёт кривизн всех этих многоугольников[1] и пользуясь точно так же свойством непрерывности кривизны, мы докажем существование $\lim\limits_{L_i \to L} (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i)$ в общем случае.

Если кривая имеет конечное число кратных точек и определённые направления в концах, то существование её поворота доказывается аналогичным образом.

Выясним теперь, как складываются повороты отдельных дуг кривой. Пусть точка C лежит внутри кривой $\widehat{AB}$ и допустим, что в точке C обе дуги $\widehat{AC}$ и $\widehat{CB}$ имеют определённые направления. Пусть угол между этими направлениями справа от кривой равен γ. Величину $\varphi(C) = \pi - \gamma$ естественно назвать правым поворотом кривой в точке C. Если брать ломаные, лежащие справа от кривой $\widehat{AB}$ так, чтобы они имели с ней, помимо точек A и B, ещё общую точку C, то, складывая повороты отрезков AC и BC этих ломаных и переходя к пределу, мы легко получим, что

$$\varphi(\widehat{AB}) = \varphi(\widehat{AC}) + \varphi(\widehat{CB}) + \varphi(C), \tag{5}$$

где φ обозначает правые повороты соответствующих дуг.

Представляется естественным относить поворот к дуге с исключёнными концами, а если к дуге присоединять концы, то прибавлять повороты в концах. Например, кривую $\widehat{AB}$ можно разбить на две части: дугу $\widehat{AC}$ с исключённой точкой C и дугу $\widehat{BC}$ с присоединённой точкой C, и поворот первый будет $\varphi(\widehat{AC})$, а поворот второй будет $\varphi(\widehat{CB}) + \varphi(C)$.

При этом условии формула (5) показывает, что *поворот есть аддитивная функция дуги*, т. е. если кривую разбить на конечное число дуг, не имеющих общих точек, и таких, что каждая из них имеет поворот, то поворот всей кривой будет равен сумме поворотов отдельных дуг.

Как было показано, кривая имеет поворот, если только в концах она имеет определённые направления, и следовательно, из существования поворота всей кривой вовсе не следует существование поворотов у её дуг. Если же в каждой точке кривой обе её ветви имеют определённые направления, то поворот будет определён для всех дуг и будет, как только что доказано, аддитивной функцией дуги.

Если кривая L имеет длину и каждая её дуга имеет определённый поворот, то можно ввести понятие о геодезической кривизне кривой. Правой (левой) геодезической кривизной кривой L в точке X мы назовём предел отношения правого (левого) поворота дуги кривой L к длине этой дуги, при условии, что дуга стягивается в точку X. Конечно, этот предел может не существовать.

Для достаточно гладких кривых на регулярных поверхностях данное определение геодезической кривизны совпадает с обычным[2], и на таких поверхно-

---

[1]) Пусть $\overline{H}_{ij}^1, \overline{H}_{ij}^2, \ldots, \overline{H}_{ij}^n$ — эти многоугольники с присоединёнными к ним отрезками ломаных L_i и L_j; к H_{ij}^k присоединяется отрезок той ломаной, от которой H_{ij}^k лежит слева. Подсчёт кривизн даёт формулу

$$|(\varphi_j + \alpha_j + \beta_j) - (\varphi_i + \alpha_i + \beta_i)| = \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \omega(\overline{H}_{ij}^k) \right|.$$

[2]) Под регулярной поверхностью здесь и всюду дальше понимается такая поверхность, для которой верны все обычные выводы дифференциальной геометрии. (В данном случае достаточно, чтобы поверхность и кривая на ней были дважды непрерывно дифференцируемы.) О геодезической кривизне кривых на регулярных поверхностях см., например, В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 68, или П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, § 61.

стях правые и левые кривизны различаются только знаком (знак кривизны показывает, в какую сторону вогнута кривая). Поворот оказывается в этом случае интегралом геодезической кривизны по длине дуги. Таким образом, понятие о повороте является обобщением известного понятия о геодезической кривизне, или, вернее, о её интеграле. При общих исследованиях, относящихся к кривым на любых выпуклых поверхностях, оказывается полезным именно понятие о повороте, а не гораздо более частное понятие о геодезической кривизне, хотя бы уже потому, что это последнее неприложимо к геодезическим ломаным.

На нерегулярных поверхностях правый и левый повороты кривой могут отличаться не только знаком. Например, окружность основания прямого кругового цилиндра имеет в каждой точке геодезическую кривизну, со стороны боковой поверхности равную нулю, а со стороны основания равную $\frac{1}{r}$, где r — радиус основания. Дальше мы докажем, что сумма правого и левого поворотов кривой на выпуклой поверхности равна площади сферического изображения этой кривой с исключёнными концами.

Пусть L — замкнутая кривая без кратных точек на выпуклой поверхности; у неё можно различать две стороны, условно правую и левую. Полный поворот кривой справа (слева) можно определить просто как предел правых поворотов ломаных, сходящихся к L справа (слева). Если на кривой L есть точка A, в которой обе исходящие из неё ветви кривой имеют определённые направления, то поворот кривой L можно определить ещё иначе. Именно, кривую L можно считать незамкнутой, но такой, у которой концы лежат в одной точке A. Тогда полный поворот кривой L справа (слева) будет равен сумме правого (левого) поворота указанной незамкнутой кривой и правого (левого) поворота в точке A. Из аддитивности поворота легко заключить, что эта сумма будет одна и та же при любом выборе точки A, лишь бы в ней обе ветви кривой L имели определённые направления. Это второе определение поворота замкнутой кривой совпадает с первым, в чём мы сразу убедимся, рассматривая ломаные, сходящиеся к L справа (слева) и имеющие вершину в точке A. Такие ломаные существуют, как это легко заключить из существования направлений ветвей кривой L, исходящих из точки A.

На плоскости поворот замкнутой кривой без кратных точек равен, очевидно, 2π. На выпуклой поверхности имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Если кривая L ограничивает область G, гомеоморфную кругу, с кривизной, равной ω, и поворот кривой L со стороны области G равен φ, то*

$$\omega = 2\pi - \varphi.$$

Для того случая, когда L — ломаная, это утверждение уже доказано. Если L — произвольная кривая, то мы строим сходящуюся к ней изнутри области G последовательность ломаных L_n. Пусть φ_n, ω_n обозначают соответственно поворот ломаной L_n и кривизну ограниченного ею многоугольника. Тогда

$$\omega_n = 2\pi - \varphi_n.$$

Из определения поворота замкнутой кривой следует, что $\varphi_n \to \varphi$, а из полной аддитивности кривизны следует, что $\omega_n \to \omega$; следовательно,

$$\omega = 2\pi - \varphi.$$

Точно так же доказывается следующее более общее утверждение:

Теорема 2*. *Если внутренность компактной области, ограниченной кривыми, повороты которых со стороны области равны $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, имеет* *кривизну* ω *и эйлерову характеристику* χ, *то*

$$\omega = 2\pi\chi - \sum_{i=1}^{n}\varphi_i.$$

Теорема 3. *Сумма правого и левого поворотов кривой без кратных точек равна кривизне (площади сферического изображения) этой кривой с исключёнными концами.*

Доказательство. Пусть кривая L с концами A и B имеет правый и левый повороты φ_1 и φ_2. Заключим кривую L в геодезический многоугольник P так, чтобы концы её лежали на его границе. Кривая L разобьёт многоугольник P на две области P_1 и P_2: P_1 — справа от L, P_2 — слева от L; кривизна внутренней части всего многоугольника P будет

$$\omega(P) = \omega(P_1) + \omega(P_2) + \omega(L), \tag{6}$$

где $\omega(L)$ — кривизна кривой L с исключёнными концами.

Точки A и B разбивают границу многоугольника P на две ломаные L_1 и L_2. Пусть ψ_1 и ψ_2 — повороты этих ломаных, считаемые изнутри соответствующих областей P_1 и P_2. Пусть, наконец, α_1 и α_2 — углы, образуемые в точке A кривой L с ломаными L_1 и L_2, а β_1 и β_2 — такие же углы в точке B (берутся внутренние углы областей P_1 и P_2). Тогда повороты кривых $L_1 + L_2$, $L_1 + L$, $L_2 + L$ (т. е. повороты границ многоугольника P и областей P_1 и P_2, считаемые изнутри этих областей) будут равны

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(L_1 + L_2) &= \psi_1 + \psi_2 + 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2),\\
\varphi(L_1 + L) &= \psi_1 + \varphi_1 + 2\pi - (\alpha_1 + \beta_1),\\
\varphi(L_2 + L) &= \psi_2 + \varphi_2 + 2\pi - (\alpha_2 + \beta_2).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

На основании теоремы 2

$$\omega(P) = 2\pi - \varphi(L_1 + L_2),$$

и аналогично

$$\omega(P_1) = 2\pi - \varphi(L_1 + L), \quad \omega(P_2) = 2\pi - \varphi(L_2 + L).$$

Поэтому из формулы (6) следует, что

$$\omega(P) = \varphi(L_1 + L) + \varphi(L_2 + L) - \varphi(L_1 + L_2) - 2\pi,$$

а пользуясь формулами (7) мы получаем, что

$$\omega(P) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

что и требовалось доказать.

Мы изложили только начала теории поворота кривых; многие основные вопросы этой теории остаются ещё не решёнными. Прежде, чем формулировать здесь некоторые из этих вопросов, введём ещё одно определение, которое понадобится также в следующем параграфе, где будут даны некоторые приложения понятия о повороте кривой.

Пусть кривая L имеет в каждой точке определённые направления в обе стороны от этой точки; тогда каждая дуга кривой имеет определённый поворот, который, как было показано, является аддитивной функцией дуги. В согласии с принятой в теории аддитивных функций терминологией, мы будем говорить, что поворот имеет ограниченную вариацию, если сумма абсолютных величин поворотов любого конечного числа дуг, не имеющих общих точек, не может превосходить некоторого числа. Если t — параметр, меняющийся вдоль кривой от 0 до 1, то поворот φ дуги, соответствующей отрезку $(0, t)$, будет функцией t. Требование, чтобы поворот имел ограниченную вариацию, эквивалентно, очевидно, требованию, чтобы эта функция $\varphi(t)$ была ограниченной вариации. Если, в частности, повороты всех дуг кривой имеют один и тот же знак, то функция $\varphi(t)$ монотонна и поворот заведомо будет иметь ограниченную вариацию.

Можно доказать, что *если кривая L на выпуклой поверхности имеет поворот с ограниченной вариацией, то она спрямлена (т. е. имеет определённую длину) и поворот её есть вполне аддитивная функция дуги.* В частности, это имеет место для кривых, у которых все дуги имеют на одну сторону поворот одного знака; такие кривые мы рассмотрим в следующем параграфе.

При постановке следующих ниже вопросов о повороте, мы будем подразумевать, что речь идёт о кривых, у которых все дуги имеют определённые повороты и поворот есть функция ограниченной вариации; без этого предположения наши вопросы едва ли будут доступны решению.

Первый вопрос состоит в выяснении внешне геометрического смысла поворота кривой на любой выпуклой поверхности. Если кривая L на регулярной поверхности F имеет непрерывную геодезическую кривизну, то её поворот может быть определён следующим образом. Берём на кривой L последовательно точки $X_0, X_1, \ldots, X_n$, где X_0 и X_n — концы кривой, и проводим в этих точках касательные плоскости $P_0, P_1, \ldots, P_n$ к поверхности F. Пусть $T_0, T_1, \ldots, T_n$ — касательные к кривой L в точках $X_0, X_1, \ldots, X_n$; они лежат в касательных плоскостях. Вращая плоскость P_0 вокруг прямой, по которой она пересекается с плоскостью P_1, можно привести плоскость P_0 в совпадение с плоскостью P_1. Полученную плоскость путём вращения вокруг прямой, по которой она пересекается с плоскостью P_2, можно привести в совпадение с плоскостью P_2. Поступая таким образом дальше, мы развернём все плоскости $P_0, P_1, \ldots, P_n$ в одну плоскость P_n. Вместе с плоскостями разворачиваются касательные $T_0, T_1, \ldots, T_n$, и на плоскости P_n развёртывание определяет ломаную с вершинами в точках пересечения T_0 с T_1, T_1 с T_2 и т. д. Пусть φ — поворот этой ломаной. Будем теперь брать точки на кривой X_i всё гуще и гуще и будем определять повороты φ соответствующих ломаных, получаемых описанным только что способом. Предел этих поворотов φ даст поворот кривой L.

Если кривая L лежит на нерегулярной выпуклой поверхности F, то проведённое построение может стать невозможным хотя бы уже потому, что в точках кривой L поверхность может не иметь касательной плоскости. Однако можно поступить следующим образом. В каждой точке кривой L поверхность F имеет касательный конус K, а кривая L имеет полукасательные, т. е. полупрямые, касательные к её ветвям, исходящим из этой точки. Эти полукасательные разбивают конус K на два сектора, и если определить правую и левую стороны кривой, то один из секторов будет лежать справа, а другой слева. Беря на кривой L точки $X_0, X_1, \ldots, X_n$ и правые (левые) секторы касательных конусов в этих точках, можно эти секторы последовательно разворачивать на плоскость, подобно тому, как выше разворачивались касательные плоскости. Этот процесс развёртывания секторов следует, конечно, уточнить, так как каждый сектор может сам по себе не быть плоским. После развёртывания секторов можно определить поворот ломаной, образованной развёрнутыми полукасательными к кривой L. Возьмём предел этих поворотов при бесконечном сгущении последовательности точек $X_0, X_1, \ldots, X_n$ на кривой L. Возникают два вопроса: 1) существует ли этот предел, если поворот кривой L имеет ограниченную вариацию? 2) если этот предел существует, то будет ли он равен правому (левому) повороту кривой L?

Если поверхность F — многогранник, то положительной ответ на эти вопросы можно получить без большого труда. В общем случае ответ остаётся неизвестным.

Вслед за поставленной задачей о внешне геометрическом смысле поворота встаёт другая, с ней тесно связанная. Если кривая L на регулярной поверхности F имеет непрерывную геодезическую кривизну, то описанный выше способ нахождения её поворота эквивалентен, как легко видеть, следующему. Берётся огибающая касательных плоскостей поверхности F в точках кривой L. В окрестности кривой L она будет развёртывающейся поверхностью без особенностей, и её можно развернуть на плоскость. При этом кривая L перейдёт в некоторую плоскую кривую, поворот которой равен повороту кривой L.

Если кривая L лежит на нерегулярной выпуклой поверхности F, то через точки кривой L мы проведём касательные конусы поверхности F. Эти конусы в совокупности ограничат некоторое выпуклое тело с поверхностью F^*. Можно показать, что правый и левый повороты кривой L, измеренные на поверхности F, равны соответствующим поворотам этой кривой, измеренным на поверхности F^*. Однако поверхность F^* не будет, вообще говоря, развёртывающейся. Если кривая L не имеет непрерывной геодезической кривизны, а только поворот ограниченной вариации, то даже сколь угодно узкие полосы поверхности F^* справа и слева от кривой L могут не быть развёртывающимися. Поэтому измерение поворота кривой путём развёртывания этих полос на плоскость оказывается, вообще говоря, невозможным.

Однако к вопросу можно подойти иначе. Развёртывающаяся поверхность, касающаяся регулярной поверхности вдоль кривой L, будет изометрична узкой окрестности кривой L на поверхности с точностью до бесконечно малых высшего порядка. Поэтому окрестность кривой L можно отобразить на плоскость изометрически с точностью до малых высшего порядка, причём кривая L перейдёт в кривую, у которой кривизна равна геодезической кривизне кривой L.

Если поверхность F нерегулярная, то вместо окрестности кривой L следует рассматривать отдельно правую и левую полуокрестности. Возникает вопрос: можно ли правую (левую) полуокрестность кривой L отобразить в плоскость так, чтобы выполнялись условия: 1) кривая L переходит в кривую L', у которой каждая дуга имеет ту же длину и тот же поворот, что соответствующая дуга кривой L, 2) вблизи кривой L отображение будет изометрическим с точностью до бесконечно малых высшего порядка?

Грубо говоря, вопрос идёт о том, совпадает ли геометрия в бесконечно узкой полуокрестности кривой L с геометрией в полуокрестности кривой L', или нет. Известно, например, что изменение длины плоской кривой при бесконечно малых смещениях её точек зависит от кривизны кривой. Естественно выяснить, в какой мере на выпуклых поверхностях можно установить связь вариации длины с поворотом кривой. В общем случае эта связь едва ли может быть выражена какими-либо равенствами; однако вопрос и в общем случае может представлять интерес, так как он связан, повидимому, с вариационными задачами. Вот, например, одна из таких задач.

Пусть F есть замкнутая выпуклая поверхность. Рассмотрим замкнутые кривые, лежащие на поверхности F и делящие её площадь в данном отношении. Среди таких кривых существует кривая с наименьшей длиной, как это легко следует из общих теорем о сходимости спрямляемых кривых. Если поверхность F — регулярная, то обычные методы вариационного исчисления дают тот известный результат, что эта кривая имеет постоянную геодезическую кривизну. Задача состоит в том, чтобы исследовать эту кривую на произвольной замкнутой выпуклой поверхности. (Результат нам не известен.) Аналогичную, но не совсем эквивалентную задачу представляет нахождение кривой данной длины, охватывающей наибольшую площадь, или лучше, делящей площадь всей поверхности в отношении, насколько возможно близком к половине.

§ 3. Общая теорема о склеивании.

Понятие поворота кривой позволяет обобщить теорему о склеивании, доказанную в § 1 гл. VIII, на тот случай, когда склеиваются не только многоугольники, но любые области, ограниченные кривыми, имеющими поворот ограниченной вариации. Пусть из многообразий с метрикой положительной кривизны вырезаны замкнутые области $G_1, G_2, \ldots, G_n$, ограниченные каждая конечным числом кривых. Эти области не предполагаются обязательно компактными, или ограниченными в том смысле, что расстояния между точками одной области не могут превосходить какого-то числа. Например, эти области могли бы быть частями бесконечных выпуклых поверхностей. Поэтому кривые, ограничивающие области G_i, могут быть двух сортов: замкнутые — гомеоморфные окружности и открытые — гомеоморфные прямой. Однако мы предполагаем, что каждая дуга такой кривой имеет определённый поворот и что поворот всей кривой имеет ограниченную вариацию в том смысле, как было определено в предыдущем параграфе. (Под дугой мы понимаем любой отрезок кривой, гомеоморфный прямолинейному отрезку.) Тогда, как можно доказать, каждая дуга этих кривых имеет конечную длину; самая же кривая может «уходить в бесконечность» и иметь тем самым бесконечную длину. (Впрочем, чтобы обойтись без ссылок на недоказанные теоремы, можно просто потребовать, чтобы каждая ограниченная дуга, входящая в границу области G_i, имела конечную длину.)

Каждая область G_i имеет свою внутреннюю метрику, индуцированную в ней метрикой того многообразия, из которого она вырезана, и совпадающую с этой последней в малых окрестностях (см. теорему 5 § 2 гл. II). Будем говорить, что многообразие R' с внутренней метрикой склеено из областей $G_1, \ldots, G_n$, если его можно разбить на области $G'_1, \ldots, G'_n$, изометричные соответственно областям $G_1, \ldots, G_n$. Если многообразие R' есть поверхность в пространстве, то естественно сказать, что эта поверхность склеена из областей $G_1, \ldots, G_n$.

У областей $G'_1, \ldots, G'_n$ попарно отождествлены некоторые отрезки границ; эти отрезки можно назвать сторонами областей $G'_1, \ldots, G'_n$. Те точки, в которых сходится более двух областей, можно назвать вершинами. Мы предполагаем, что каждая область имеет лишь конечное число сторон и вершин. Отождествление сторон и вершин областей G_i' можно, в силу изометрии, перенести на исходные области G_i, и тогда эти области сами образуют многообразие R, гомеоморфное R'. В многообразии R естественно определяется внутренняя метрика. Длину кривой в многообразии R можно определить как сумму длин её отрезков, лежащих каждый в своей области G_i. После этого расстояние между точками в R определяется как точная нижняя граница длин кривых, соединяющих эти точки. При таком определении метрики в многообразии R оно будет изометрично многообразию R', поэтому, если R — абстрактное многообразие, а не поверхность в пространстве, мы можем не различать многообразий R и R', и мы будем также говорить, что многообразие R склеено из областей $G_1, \ldots, G_n$.

Многообразие, склеиваемое из областей, вполне определяется тем, какие части границ областей подлежат отождествлению. Этот «закон склеивания» должен удовлетворять обычным требованиям:

1. Области, сходящиеся в одной вершине, должны сходиться в ней как в центре круга сходятся секторы, на которые круг разбит. Отсюда уже следует, что стороны отождествляются попарно.

2. От одной области можно перейти к другой, переходя по областям, имеющим отождествлённые стороны.

3. Отождествляемые стороны, а также всякие отождествляемые их отрезки должны иметь равные длины.

При соблюдении первых двух условий склеиваемые области образуют многообразие. Таким образом, задав области $G_1, \ldots, G_n$ и указав «закон склеивания», удовлетворяющий трём указанным условиям, мы получаем многообразие R с внутренней метрикой. Вопрос состоит в том, при каких условиях эта метрика будет метрикой положительной кривизны. Ответ даёт следующая «общая теорема о склеивании».

Теорема. *Для того чтобы метрика в многообразии R, склеенном из областей $G_1, \ldots, G_n$ с метрикой положительной кривизны, была сама положительной кривизны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:* 1) *Сумма поворотов всяких двух отождествляемых отрезков границ областей неотрицательна*; 2) *Сумма углов областей G_i, сходящихся в одной вершине, для каждой вершины не превосходит* 2π. (Здесь речь идёт, конечно, о таких областях, которые удовлетворяют формулированным выше условиям относительно поворотов их границ; и имеются в виду повороты отрезков границ со стороны соответствующих областей.)

Необходимость поставленных условий нам уже по существу известна. Действительно, согласно теореме 3 предыдущего параграфа, сумма поворотов с обеих сторон для всякой кривой в многообразии с метрикой положительной кривизны равна кривизне этой кривой с исключёнными концами. Следовательно, эта сумма всегда не отрицательна, чем необходимость первого условия доказана. Необходимость второго условия следует из того, что полный угол вокруг точки в многообразии положительной кривизны не может превосходить 2π.

Исчерпывающее доказательство достаточности данных условий представляет в деталях некоторые затруднения, преодоление которых требует хотя по существу и очевидных, но всё же кропотливых рассуждений. Поэтому мы оставим эти детали без внимания, наметив только идею доказательства, которая совершенно аналогична идее доказательства теоремы о склеивании многоугольников § 1 гл. VIII. Доказательство сводится к последовательному установлению следующих свойств многообразия R, склеенного из областей G_i: 1) Метрика в R — внутренняя. 2) Между сторонами всякого выпуклого треугольника в R существуют определённые углы. 3) Сумма углов всякого малого выпуклого треугольника не меньше π. 4) Между сторонами выпуклого треугольника в R существует угол в сильном смысле. Из этих свойств, конечно, следует, что метрика в R есть метрика положительной кривизны.

То, что метрика в R — внутренняя, ясно из её определения. Если точка O лежит внутри одной из областей G_i, то каждая пара исходящих из неё кратчайших образует определённый угол, потому что метрика в G_i — положительной кривизны. Пусть точка O лежит на границе областей G_i и пусть L и M — сходящиеся в ней стороны выпуклого треугольника T. Из точки O в треугольнике T могут проходить отрезки $N_1, \ldots, N_m$ границ областей G_i. Каждая пара соседних отрезков принадлежит одной области и потому образует определённый угол. Если кратчайшие L и M вблизи точки O также заключены каждая в одной из областей G_i, то они образуют с соседними отрезками границ N_1 и N_m определённые углы. Следовательно, выпуклый сектор между L и M разбивается на секторы с определёнными углами (между L и N_1, N_1 и $N_2, \ldots, N_m$ и M), и тогда по теореме 3 § 1 гл. IV между самими L и M существует определённый угол. Особый случай получается, если, например, кратчайшая L пересекает отрезок границы сколь угодно близко к точке O и переходит бесконечное число раз из одной области в другую. В таком случае угол между L и N_1 равен нулю, но это требует особого доказательства, потому что здесь L не лежит в одной области и, следовательно, нельзя просто сослаться на то, что в каждой области кратчайшая образует с отрезком границы определённый угол. Эту деталь мы не будем, однако, уточнять.

Пусть теперь T — выпуклый треугольник в R и $\omega(T)$ — кривизна его внутренней области, т. е. сумма углов без π. Если T заключён в одной из областей G_i, то, конечно, $\omega(T) \geqslant 0$. Допустим, что треугольник пересекается с несколькими областями G_i. Тогда он разбивается на области $Q_1, Q_2, \ldots$, заключённые каждая в одной области G_i. Так как стороны треугольника T могут пересекать границы областей G_i бесконечно много раз, то число областей Q_j может быть бесконечным. Так как каждая область Q_j заключена в одной области G_i, то кривизна её $\omega(Q_j) \geqslant 0$. Подсчёт кривизн, аналогичный тому, какой был проведён при выводе формулы (1) для кривизны многоугольника в § 1 гл. 5, приводит к следующему результату: кривизна внутренности треугольника T равна сумме кривизн областей Q_j плюс сумма кривизн отрезков их границ, лежащих внутри T, плюс сумма кривизн вершин областей Q_j, также лежащих внутри T. Кривизна $\omega(N_p)$ отрезка N_p общей границы областей Q_j и Q_k равна сумме его поворотов, а так как по условию теоремы эта сумма неотрицательна, то $\omega(N_p) \geqslant 0$. Кривизна $\omega(X_q)$ общей вершины нескольких областей Q_i равна 2π минус сумма сходящихся в ней углов; по условию теоремы эта сумма $\leqslant 2\pi$ и, следовательно, $\omega(X_q) \geqslant 0$. Итак,

$$\omega(T) = \sum_j \omega(Q_j) + \sum_p \omega(N_p) + \sum_q \omega(X_q),$$

причём все слагаемые здесь неотрицательны. Следовательно, $\omega(T) \geqslant 0$, т. е. сумма углов треугольника T не меньше π. Это рассуждение, так же как и предшествовавшее ему доказательство существования угла, требует уточнения, если число областей Q_j бесконечно. В этом случае подсчёт суммы кривизн требует, конечно, известной осторожности и, в частности, в этом пункте играет существенную роль предположение о том, что поворот границ областей G_i имеет ограниченную вариацию.

Остаётся ещё доказательство того, что между сторонами выпуклого треугольника в R существует угол в сильном смысле. Если стороны треугольника L и M, исходящие из общей точки O, проходят каждая только в одной из областей G_i хотя бы только вблизи точки O, то доказательство этого утверждения проводится буквально так же, как в теореме о склеивании многоугольников § 1 гл. VIII. Если же хотя бы одна из этих кратчайших L и M сколь угодно близко от точки O переходит из одной области в другую, то здесь опять нужны некоторые дополнительные рассуждения, на которых мы не станем, однако, останавливаться.

Если многообразие R оказывается таким, что его можно реализовать в виде выпуклой поверхности, например, если оно гомеоморфно сфере, то теорема о склеивании превращается в теорему существования выпуклой поверхности, «склеенной» из кусков данных многообразий, или, в частности, из кусков данных выпуклых поверхностей. Такое склеивание поверхности из кусков производится постоянно. Простейший случай, не сводящийся к склеиванию многоугольников, представляет склеивание выпуклой поверхности из кусков плоскости. Примерами могут служить известные способы склеивания цилиндров и конусов, или приближённое изготовлеиие сферы из двуугольников, ограниченных равными дугами окружностей.

Если сумма поворотов двух склеиваемых отрезков границ областей положительна, то на склеенной поверхности получается ребро, потому что сумма поворотов кривой с обеих сторон равна площади её сферического изображения (теорема 3 § 2). Если же сумма поворотов двух склеиваемых отрезков границ равна нулю, то либо вовсе не получается ребра, либо получается прямолинейное ребро, как в случае склеивания многогранника.

В том случае, когда кривые, ограничивающие склеиваемые области, имеют кусочно непрерывную геодезическую кривизну, условие о сумме поворотов сводится к тому, что сумма геодезических кривизн склеиваемых кривых должна быть всюду неотрицательной. Например, из сферического сегмента можно склеить замкнутую поверхность, сгибая его так, чтобы половины его граничной окружности совместились.

Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае мы вовсе не доказываем, что склеивание выпуклой поверхности из кусков можно произвести реально в том смысле, что эти куски можно непрерывно изогнуть в соответствующие куски склеенной поверхности. Доказательство возможности такого изгибания, с возможным добавлением отражения, представляет интереснейшую, но, повидимому, очень трудную задачу.

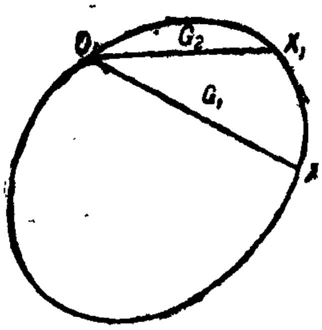
В связи с теоремой о склеивании можно поставить задачу о характеризации метрики любой выпуклой поверхности. Пусть F — ограниченная выпуклая поверхность; граница её выпуклой оболочки представляет собою замкнутую выпуклую поверхность $\overline{F}$, на которой «дыры», имевшиеся в исходной поверхности F, заклеены развёртывающимися поверхностями. (Это следует из того, что площадь сферического изображения этих поверхностей без границы равна нулю.) Это замечание в соединении с теоремой реализуемости метрики на сфере приводит к следующему результату: для того чтобы компактная область G в многообразии с метрикой положительной кривизны, гомеоморфная области на сфере, была изометрична выпуклой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы к ней можно было подклеить плоские области [1]) так, чтобы выполнялись требования теоремы о склеивании, т. е. так, чтобы повороты отрезков границы этих областей были не меньше поворотов соответствующих отрезков границы области G с обратным знаком. Таким образом, вопрос о существовании поверхности, изометричной области G, сводится к вопросу о существовании плоских областей, удовлетворяющих этому условию. Это есть уже задача планиметрии, повидимому, не представляющая чрезмерных трудностей. Интересно было бы исследовать её хотя бы для того случая, когда подклеиваемые к G области суть многоугольники.

§ 4. Выпуклые области.

В качестве приложения понятия о повороте кривой рассмотрим кривые, ограничивающие на выпуклых поверхностях выпуклые области.

Теорема 1. *Каждая дуга, входящая в границу выпуклой области, имеет со стороны области неотрицательный поворот.*

Доказательство. Пусть O — точка на границе замкнутой выпуклой области G и L — дуга границы области G, исходящая из точки O (черт. 79). Возьмём на L точку X и проведём кратчайшую OX в области G, что возможно по самому определению выпуклой области. Если OX идёт по дуге L, то тем самым L имеет в точке O определённое направление. Если же OX не идёт по дуге L и точка X лежит достаточно близко к O, то OX проходит внутри области G и отделяет от неё выпуклую область G_1, ограниченную самой кратчайшей OX и отрезком $\widehat{OX}$ дуги L. Если взять точку X_1 на $\widehat{OX}$, то в G_1 проходит кратчайшая OX_1, отделяющая от G_1 новую выпуклую область G_2. Далее можно взять точку X_2 на отрезке $\widehat{OX_1}$ дуги $\widehat{OX}$ и т. д. Угол, образуемый кратчайшими OX_n с кратчайшей OX_1, будет возрастать (или во всяком случае не убывать) и, следовательно, стремиться к пределу. А как установлено в § 1, это означает, что дуга L имеет в точке O определённое направление. Этим доказано, что всякая дуга границы выпуклой области имеет в концах определённые направления и, тем самым, имеет определённый поворот.



Черт. 79.

В дугу L можно вписать ломаную L', лежащую в области G. Углы этой ломаной со стороны G будут не больше π, потому что область G — выпуклая. Следовательно, поворот ломаной L' со стороны G неотрицателен. Если увеличивать число вершин ломаной L', то она будет сходиться к дуге L, и в концах

[1]) Строго говоря, эти области могут не быть плоскими в собственном смысле слова, разворачиваясь на плоскость не однолистно.

дуги L углы между L и L' будут стремиться к нулю, как это ясно из проведённого только что доказательства существования направления в концах дуги L. Поэтому поворот дуги L со стороны области G равен пределу поворотов ломаной L' и, следовательно, также неотрицателен.

Теорема 1 существенно дополняется следующими утверждениями: 1) Каждая дуга, входящая в границу выпуклой области, имеет определённую длину. 2) Отношение длины такой дуги $\widehat{OX}$ к расстоянию OX стремится к единице, если точка O задана и $X \to O$. 3) Поворот такой дуги $\widehat{OX}$ стремится к нулю, когда точка O задана и $X \to O$. Доказательства мы оставляем читателю.

Теорема 2. *Компактная (т. е. замкнутая и ограниченная) выпуклая область на выпуклой поверхности может быть только одного из трёх типов: 1) целая замкнутая поверхность, 2) область, гомеоморфная кругу, 3) область, изометричная боковой поверхности прямого кругового цилиндра.*

Доказательство. Всякая ограниченная область G на выпуклой поверхности может рассматриваться как часть замкнутой выпуклой поверхности F. Если область G простирается на всю поверхность F, то имеем первый случай. Допустим, что выпуклая область G занимает только часть поверхности F. Априори область G может быть ограничена бесконечным числом кривых, но рассмотрим сначала область G, ограниченную лишь конечным числом кривых. Пусть ω — кривизна внутренности области G, а τ_i — повороты ограничивающих её кривых, взятые со стороны этой области. Тогда по теореме 2* § 2

$$\omega = 2\pi\chi - \sum_i \tau_i, \tag{1}$$

где χ — эйлерова характеристика области G. Мы знаем, что $\omega \geqslant 0$ и, кроме того, мы только что доказали, что все повороты $\tau_i \geqslant 0$. Поэтому необходимо $\chi \geqslant 0$. Известно, что области на сфере с эйлеровой характеристикой $\chi \geqslant 0$ могут быть только трёх типов: 1) $\chi = 2$, область гомеоморфна сфере; 2) $\chi = 1$, область гомеоморфна кругу; 3) $\chi = 0$, область гомеоморфна кольцу, или, что то же самое, — боковой поверхности цилиндра[1]). Первые два типа дают два первых случая, предусмотренных в теореме. Допустим, что $\chi = 0$. Тогда имеются только две ограничивающие область G кривые L_1 и L_2. Так как их повороты τ_1 и τ_2 не могут быть отрицательны, то из формулы (1) следует, что $\tau_1 = \tau_2 = 0$ и $\omega = 0$. В § 6 гл. V мы доказали, что область с кривизной, равной нулю, локально изометрична плоскости, т. е. метрика в малых частях этой области — эвклидова. А так как повороты кривых L_1 и L_2 со стороны области G равны нулю, то при изометрическом отображении на плоскость дуги этих кривых переходят в прямолинейные отрезки. Такими свойствами характеризуется боковая поверхность прямого цилиндра, и, следовательно, область G в целом изометрична такой поверхности.

Мы предполагали, что область G ограничена лишь конечным числом кривых. Допустим теперь, что она ограничена бесконечным числом кривых. Каждая такая кривая окружает на замкнутой поверхности F, на которой лежит G, некоторую область. Если любое число таких областей присоединить к G, то, как легко видеть, получим снова выпуклую область. Таким образом, можно заменить G другой выпуклой областью G', ограниченной конечным, но вместе с тем сколь угодно большим числом кривых. Но мы только что доказали, что если число кривых, ограничивающих выпуклую область, конечно, то оно не больше двух. Следовательно, не может быть, чтобы выпуклая область была ограни-

---

[1]) Эйлерова характеристика сферы равна 2. Исключение из сферы области, гомеоморфной кругу, влечёт за собой уменьшение эйлеровой характеристики на единицу, что становится совершенно очевидным, если взять разбиение сферы, одна из областей которого как раз и есть та, которая подлежит удалению.

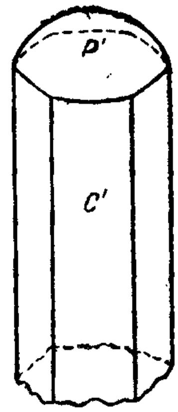
чена бесконечным числом кривых, и таким образом, теорема полностью доказана [1]).

Назовём *шапкой* такую выпуклую поверхность F, ограниченную замкнутой плоской кривой L, что проекция поверхности F на плоскость кривой L совпадает с областью, ограниченной этой кривой. Примером шапки может служить сферический сегмент.

Теорема 3. *Всякая гомеоморфная кругу выпуклая область на выпуклой поверхности изометрична шапке.* Иными словами, всякую гомеоморфную кругу выпуклую область на выпуклой поверхности можно подвергнуть такому изометрическому отображению, что её граница превратится в плоскую кривую, а проекция её на плоскость этой кривой будет совпадать с выпуклой областью, ограниченной этой кривой.

Доказательство основано на теореме о склеивании доказанной в § 1 гл. VIII.

Рассмотрим сначала гомеоморфный кругу выпуклый многоугольник P на выпуклой поверхности. Возьмём бесконечный круговой цилиндр с длиной поперечного сечения, равной периметру многоугольника P. Разрежем этот цилиндр по какому-нибудь поперечному сечению и пусть C — один из полученных таким образом прямых «полуцилиндров».



Черт. 80.

Отождествим границу многоугольника P с границей полуцилиндра C и рассмотрим полученное в результате этого многообразие $P+C$. Так как все углы многоугольника P не больше π, а граница полуцилиндра C является замкнутой геодезической, то, согласно теореме о склеивании, метрика в многообразии $P+C$ будет положительной кривизны. Вместе с тем, это многообразие гомеоморфно плоскости и метрика его — полная, потому что полуцилиндр C — бесконечный. Поэтому на основании теоремы, доказанной в § 3 гл. VIII, многообразие $P+C$ изометрично некоторой бесконечной выпуклой поверхности. Эта поверхность состоит из двух поверхностей P' и C', изометричных соответственно многоугольнику P и полуцилиндру C (черт. 80). Но легко доказать, что всякая поверхность, изометричная бесконечному прямому цилиндру, сама есть прямой полуцилиндр [2]). Следовательно, поверхность C' есть прямой полуцилиндр, и её край, а тем самым и край поверхности P' есть некоторая плоская кривая L. Так как образующие полуцилиндра C' перпендикулярны плоскости кризой L,

[1]) Аналогично проведённому исследованию строения компактных выпуклых областей можно определить все типы бесконечных выпуклых областей на бесконечных полных выпуклых поверхностях. Для этого нужно воспользоваться связью поворота границы с кривизной области для бесконечных областей. Поворот бесконечной кривой определяется как предел поворотов её безгранично увеличивающихся дуг (предполагая, что повороты этих дуг существуют и существует предел этих поворотов, независимо от выбора последовательности увеличивающихся дуг). Приняв это определение, можно доказать: Пусть G — область на бесконечной полной выпуклой поверхности, гомеоморфная полуплоскости, ω — кривизна области G, τ — поворот кривой, ограничивающей G (поворот со стороны G); тогда $\omega \leqslant \pi - \tau$. Мы предлагаем читателю в качестве интересной задачи доказать это утверждение, получить более общий результат для бесконечной области любого строения и этот общий результат приложить потом к нахождению всех типов бесконечных выпуклых областей на полных выпуклых поверхностях. По поводу связи кривизны и поворота в случае бесконечных областей см. уже цитированную раньше в § 10 гл. 1 статью Кон-Фоссена в Математическом сборнике за 1936 г. Кон-Фоссен рассматривает метрику, заданную линейным элементом, но его методы в основном обобщаются на любую метрику положительной кривизны.

[2]) Поверхность C', изометричная полуцилиндру, должна быть развёртывающейся. Пусть L — одна из её прямолинейных образующих; она обладает тем свойством, что всякий её сколь угодно длинный отрезок есть кратчайшая. На полуцилиндре линии L должна поэтому соответствовать кривая, имеющая то же свойство. Но таким свойством на полуцилиндре обладают только образующие. Следовательно, образующие цилиндра C и поверхности C' соответствуют друг другу, откуда ясно, что C' тоже есть полуцилиндр

то проекция поверхности P' на эту плоскость совпадает с областью, ограниченной кривой L, иначе поверхность $P'+C'$ не была бы выпуклой. Следовательно, P' есть шапка, и тем самым наша теорема доказана для многоугольников.

Пусть теперь G — любая выпуклая область на выпуклой поверхности, гомеоморфная кругу. Впишем в G последовательность многоугольников P_n, сходящихся к G. Каждый многоугольник P_n будет выпуклым, и потому изометричным некоторой шапке P_n'. Из шапок P_n' можно выбрать сходящуюся последовательность, и предел выбранной последовательности шапок будет, очевидно, шапкой, которая, в силу теоремы о сходимости метрик, будет изометрична области G. (Эти выводы нетрудно обосновать, например, тем же методом, какой был применён при доказательстве теорем реализуемости § 7 гл. VII и § 3 гл. VIII.)

Если пользоваться общей теоремой о склеивании, то можно сразу склеить область G с подходящим полуцилиндром и получить таким путём непосредственно нужный результат.

Теперь естественно поставить вопрос о возможности обращения теорем 1 и 3, т. е. спросить 1) не будет ли выпуклой всякая область на выпуклой поверхности, ограниченная кривыми, каждая дуга которых имеет неотрицательный поворот, и 2) не будет ли всякая шапка, отрезанная от выпуклой поверхности, выпуклой областью на этой поверхности? Легко видеть, что оба вопроса имеют отрицательный ответ. Возьмём, например, замкнутую поверхность F, состоящую из сферического сегмента S и подклеенного к нему плоского круга C. Сегмент S есть шапка, и каждая дуга его границы имеет положительный поворот. Однако он не будет выпуклой областью на поверхности F, потому что кратчайшая, соединяющая точки на его границе, проходит, конечно, в круге C. Несмотря на то, что вопрос об обращении теорем 1 и 3 имеет, как мы видим, отрицательный ответ, тем не менее, можно так обобщить понятие выпуклой области, чтобы для областей, выпуклых в этом обобщённом смысле, имели место как теоремы 1 и 3, так и теоремы им обратные. Это обобщение понятия выпуклой области состоит в следующем.

Замкнутую область на выпуклой поверхности мы назовём *выпуклой в себе*, если каждые две её внутренние точки можно соединить кривой, проходящей внутри области и являющейся самой короткой из всех таких кривых. Иными словами, каждые две внутренние точки можно соединить внутри области линией, кратчайшей в области, но может быть не на всей поверхности[1]).

Все общие свойства выпуклых областей, установленные § 4 гл. II, оказываются верными и для областей, выпуклых в себе, если под кратчайшими понимать кратчайшие в самой области. Для областей, выпуклых в себе, имеют место также следующие теоремы, содержащие теоремы 1, 2, 3 и теоремы, обратные теоремам 1 и 3.

Теорема 1*. *Для того чтобы замкнутая область G, ограниченная на выпуклой поверхности кривою L, была выпуклой в себе, необходимо и достаточно, чтобы каждая дуга кривой L имела со стороны G неотрицательный поворот.*

Теорема 2*. *Замкнутая и ограниченная область на выпуклой поверхности, выпуклая в себе, может быть только одного из трёх типов:* 1) *целая замкнутая поверхность,* 2) *область, гомеоморфная кругу,* 3) *область, изометричная боковой поверхности прямого кругового цилиндра.*

Теорема 3*. *Всякая гомеоморфная кругу область на выпуклой поверхности, выпуклая в себе, изометрична шапке, и всякая шапка выпукла в себе.*

---

[1]) Выше, например, в § 2 гл. VIII мы говорили о поверхности, каждые две точки которой соединимы кратчайшей. Здесь же речь идёт о замкнутой области на поверхности. Но всякая область на поверхности, по определению, сама есть поверхность и, следовательно, это различие не существенно. Открытая область, выпуклая в себе, отличается от замкнутой тем, что исключается её граница, а также может быть некоторое множество точек, полные углы вокруг которых $<2\pi$.

Доказательства этих теорем мы не даём [1]), докажем только, что *всякая шапка выпукла в себе и что каждая дуга кривой, ограничивающей шапку, имеет со стороны шапки неотрицательный поворот.*

Для доказательства возьмём какую-нибудь шапку G, и пусть L — ограничивающая её кривая, а P — плоскость этой кривой. Проведём из каждой точки кривой L полупрямую, перпендикулярную плоскости P и направленную в то полупространство, где нет точек шапки G. Эти полупрямые образуют полуцилиндр с направляющей L, и мы получим бесконечную полную выпуклую поверхность F, составленную из шапки G и этого полуцилиндра C. На поверхности F шапки G будет выпуклой областью. Действительно, если бы кратчайшая AB, соединяющая две точки A и B шапки G, не проходила в самой шапке, то отрезок её, лежащий на полуцилиндре C, был бы кратчайшей, соединяющей две точки направляющей L этого полуцилиндра. Но кратчайшая на полуцилиндре, соединяющая две точки его плоской направляющей, перпендикулярной образующим, очевидно, налегает на направляющую. Поэтому кратчайшая AB проходит в шапке, и, следовательно, шапка является выпуклой областью на поверхности F. Она также выпукла в себе, потому что, согласно теореме 1 § 5 гл II, кратчайшая, соединяющая внутренние точки выпуклой области, проходит внутри, области. Кроме того, согласно теореме 1, каждый отрезок границы выпуклой области имеет со стороны области неотрицательный поворот. Следовательно, этим свойством обладает кривая, ограничивающая шапку G.

То, что, обратно, всякая гомеоморфная кругу область на выпуклой поверхности, ограниченная кривой, у которой поворот каждой дуги со стороны области неотрицателен, изометрична шапке, легко доказывается на основании общей теоремы о склеивании. Действительно, если подклеить к такой области G бесконечный полуцилиндр C, то в силу теоремы о склеивании получится гомеоморфное плоскости многообразие с полной метрикой положительной кривизны. Изометричная ему поверхность будет состоять из полуцилиндра, соответствующего C, и шапки, изометричной области G, что доказывается так же, как в теореме 3 для выпуклых областей.

Это рассуждение применимо и в том случае, когда область G есть область не на поверхности, а в абстрактном многообразии с метрикой положительной кривизны. Это замечание в соединении с теоремой 1*, обобщённой на области в абстрактных многообразиях, приводит к следующей теореме:

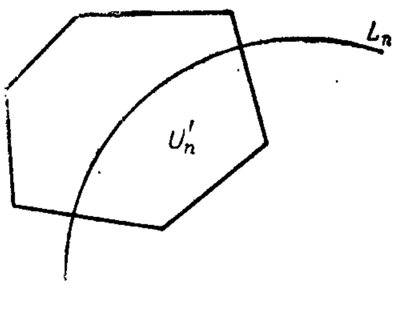
Теорема 4. *Пусть G — гомеоморфная кругу область в многообразии с метрикой положительной кривизны, ограниченная кривой L. Следующие три условия оказываются эквивалентными:* 1) *область G выпукла в себе,* 2) *каждая дуга кривой L имеет со стороны G неотрицательный поворот,* 3) *область G изометрична шапке.*

Эта теорема содержит полную характеризацию внутренней метрики шапок и представляет собою уточнение общей теоремы реализуемости, о которой шла речь в § 2 гл. VIII (теорема 5 § 2 гл. VIII), для случая выпуклых в себе областей, гомеоморфных кругу. В общей теореме § 2 гл. VIII речь шла о реализуемости метрики положительной кривизны во всякой выпуклой в себе области, гомеоморфной области на сфере. Всякая такая незамкнутая область получается из замкнутой путём исключения граничных кривых и ещё, может быть, некоторого множества тех точек, через которые не проходят никакие кратчайшие. Теорема 3* выясняет строение всех замкнутых областей, выпуклых в себе, следовательно, она выясняет также строение всех незамкнутых таких областей, в той мере, в какой известно, через какие точки не могут проходить кратчайшие.

[1]) В той части, где они просто обобщают теоремы 1, 2, 3, они доказываются аналогично. Конечно, прежде чем доказывать теорему 1*, нужно доказать для областей, выпуклых в себе, те свойства выпуклых областей, которые были использованы в доказательстве теоремы 1. Это делается не абсолютно просто, но когда это сделано, то дальнейшее только повторяет рассуждения, доказывающие теоремы 1, 2, 3.

Теорема 4 открывает путь к исследованию кривых, уже не обязательно замкнутых, у которых поворот всех дуг с одной стороны неотрицателен. Наметим, например, доказательство следующей теоремы:

Теорема 5. *Пусть выпуклые поверхности F_n сходятся к F, а лежащие на поверхностях F_n кривые L_n сходятся к кривой L. Допустим, что кривые L_n не имеют кратных точек и что повороты всех их дуг с одной стороны неотрицательны. Тогда, каковы бы ни были точки A и B, лежащие внутри кривой L, дуга AB этой кривой имеет с одной стороны неотрицательный поворот, и длина её равна пределу длин сходящихся к ней дуг кривых F_n* [1]).



Черт. 81.

Для доказательства возьмём внутри кривой L какую-либо точку O, а на кривых L_n — точки O_n, сходящиеся к O, и окружим их малыми выпуклыми окрестностями U_n, так чтобы они сходились к некоторой окрестности U точки O. Кривые L_n разбивают окрестности U_n, и так как у них повороты дуг с одной стороны неотрицательны, а сами окрестности U_n — выпуклые, то одна из частей U'_n каждой из окрестностей U_n будет ограничена кривой, у которой все дуги имеют со стороны U'_n неотрицательные повороты (черт. 81). Поэтому, в силу теоремы 3, каждую область U'_n можно изометрически отобразить на некоторую шапку U''_n. Предел этих шапок будет, очевидно, шапкой, а вместе с тем, он будет изометричен одному из кусков U' окрестности U. По доказанному выше каждая дуга границы шапки имеет неотрицательный поворот. Поэтому, в частности, дуга кривой L, отсекающая кусок U' от окрестности U, имеет неотрицательный поворот. Но точка O взята внутри кривой L произвольно, а поэтому то же верно для всякой достаточно малой дуги кривой L, лежащей внутри этой кривой. Складывая же повороты отдельных дуг, мы получим, что любая дуга кривой L, лежащая внутри неё, имеет неотрицательный поворот.

Границы шапок представляют собою плоские выпуклые кривые. Поэтому, если шапки U''_n сходятся, то длина любой дуги l границы предельной шапки равна пределу длин сходящихся к l дуг границ шапок U''_n. Отсюда следует, что длина каждой малой дуги, лежащей внутри кривой L, равна пределу сходящихся к ней дуг кривых L_n. Складывая же длины малых дуг, мы получим тот же результат для любой дуги, лежащей внутри кривой.

§ 5. Квазигеодезические.

Среди кривых на выпуклых поверхностях, у которых повороты всех дуг с одной стороны неотрицательны, особый интерес представляют те, у которых повороты всех дуг неотрицательны с обеих сторон. Эти кривые мы назовём *квазигеодезическими*, так как из дальнейшего станет ясным, что они являются естественным обобщением геодезических линий. У геодезической повороты всех дуг на обе стороны равны нулю, и потому геодезические оказываются частным случаем квазигеодезических. На регулярных поверхностях, обратно, всякая квазигеодезическая будет геодезической. Действительно, по теореме 3 § 2 сумма правого и левого поворотов кривой равна площади её сферического изобра-

[1]) Сама кривая F может не иметь определённого поворота, так как она может заворачиваться вокруг своих концов спирально, обходя вокруг каждого из них бесконечное число раз. Если кривые F_n имеют кратные точки, то теорема будет неверной. Например, на плоскости можно взять кривые положительной кривизны, имеющие петли, стягивающиеся в одну точку. В этой точке поворот предельной кривой может быть отрицательным.

жения, и на регулярной поверхности она должна, следовательно, равняться нулю. Поэтому повороты всех дуг квазигеодезической на регулярной поверхности равны нулю, т. е. геодезическая кривизна квазигеодезической равна нулю. А, как известно, на регулярной поверхности кривая нулевой геодезической кривизны является кратчайшей на всяком достаточно малом отрезке, т. е. она будет геодезической.

На нерегулярных поверхностях могут существовать квазигеодезические, не являющиеся геодезическими. На выпуклом многограннике кривая будет, как легко убедиться, квазигеодезической тогда и только тогда, когда она представляет собою геодезическую ломаную, вершины которой лежат в вершинах многогранника, причём оба угла, образуемых отрезками этой ломаной, сходящимися в вершине, должны быть $\leqslant\pi$. Поэтому, например, стороны одной грани куба образуют на нём замкнутую квазигеодезическую.

Из того, что каждая дуга границы шапки имеет со стороны шапки неотрицательный поворот, следует, что кривая, разбивающая замкнутую выпуклую поверхность на две шапки, будет квазигеодезической. Примеры таких квазигеодезических даются ребром двояковыпуклой линзы или окружностью основания прямого кругового конуса (в последнем случае одна из шапок оказывается плоской).

Полезно заметить, что, как можно убедиться на примерах, на нерегулярных выпуклых поверхностях даже кривые нулевой геодезической кривизны не всегда будут геодезическими, т. е. кратчайшими на всяком достаточно малом участке.

Из теоремы 5 предыдущего параграфа непосредственно вытекает, что предел сходящейся последовательности квазигеодезических без кратных точек снова будет квазигеодезической. Этот результат легко обобщить на квазигеодезические с кратными точками, и тогда мы получим:

Теорема 1. *Предел квазигеодезических есть квазигеодезическая.* Или подробнее: *Пусть выпуклые поверхности F_n сходятся к поверхности F и квазигеодезические L_n на поверхностях F_n сходятся к линии L. Тогда L есть квазигеодезическая на поверхности F, и её длина равна пределу длин квазигеодезических L_n. (Этот предел существует в силу самой сходимости квазигеодезических L_n.)*

Последняя часть теоремы вытекает из соответствующего утверждения теоремы 5 предыдущего параграфа.

Так как геодезические являются квазигеодезическими, то, в частности, *предел геодезических есть квазигеодезическая.*

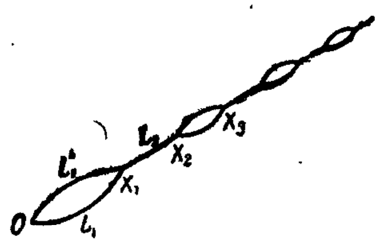
Этот результат можно до известной степени обратить. Для этого рассмотрим какую-либо квазигеодезическую на выпуклой поверхности F. Возьмём дугу L этой квазигеодезической, не имеющую кратных точек, и вырежем из поверхности F область G так, чтобы дуга L разбивала её на две части. Разрежем область G по дуге L и к обеим сторонам разреза «подклеим» двумя противолежащими сторонами плоский прямоугольник P. Длины оснований прямоугольника должны быть равны длине дуги L. Так как повороты всех отрезков дуги L неотрицательны, то, согласно общей теореме о склеивании, полученное таким путём многообразие будет иметь метрику положительной кривизны. Средняя линия прямоугольника P будет, очевидно, геодезической в этой выпуклой метрике. Если высоту прямоугольника P стремить к нулю, то метрика в многообразии R будет сходиться к метрике области G, а средняя линия прямоугольника P будет сходиться к дуге L. Полученный результат можно несколько условно выразить в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *В смысле внутренней метрики всякая квазигеодезическая без кратных точек есть предел геодезических.*

Представляется вероятным, что не только в смысле внутренней метрики всякая достаточно малая дуга квазигеодезической на выпуклой поверхности есть предел геодезических на поверхностях, сходящихся к данной. Следует вместе с тем заметить, что не всякая, даже сколь угодно малая дуга квазигеодезической является пределом геодезических, лежащих на той же поверхности. Например, сколь угодно короткая квазигеодезическая на выпуклом многограннике, проходящая через его вершину и образующая в ней углы, меньшие π, не будет пределом геодезических того же многогранника.

Предел геодезических может и не быть геодезической. Так, например, на выпуклом многограннике предел геодезических, приближающихся своими средними точками к вершине многогранника, не будет геодезической. Следовательно, класс геодезических линий не замкнут, и в нём, вообще говоря, невозможен переход к пределу. Согласно же теореме 1 класс квазигеодезических линий замкнут, а по теореме 2 он состоит, в известном смысле, из пределов геодезических линий. Можно сказать, что класс квазигеодезических линий представляет собою замыкание класса геодезических линий на всех выпуклых поверхностях; он является тем наименьшим классом линий, который, содержа все геодезические, допускает вместе с тем переход к пределу[1]).

Относительно геодезических мы установили раньше, что 1) на выпуклых поверхностях могут существовать такие точки, из которых не во всех направлениях исходят геодезические (§ 5 гл. V), и 2) если из данной точки в данном направлении исходит геодезическая, то только одна, потому что угол между неналегающими кратчайшими, а следовательно и геодезическими, не может равняться нулю. Для квазигеодезических, как оказывается, имеет место обратное положение, а именно можно доказать:



Черт. 82.

Теорема 3. *На всякой выпуклой поверхности из каждой точки можно провести квазигеодезическую в любом направлении. Но могут быть такие направления, в которых можно провести не одну, а несколько квазигеодезических.*

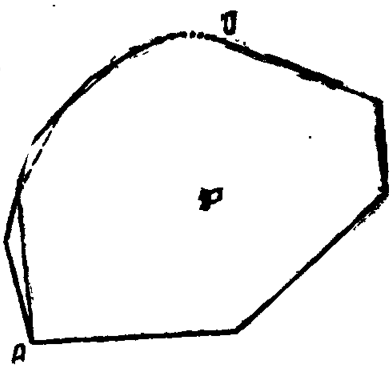
Наметим построение, приводящее к квазигеодезической, исходящей из данной точки O в данном направлении d. Зададим два малых положительных числа r и ε. Если в направлении d из точки O исходит кратчайшая, то она и есть искомая квазигеодезическая. Если же в направлении d из O не идёт никакая кратчайшая, то существует двуугольник D_1, содержащий направление d, с углом при вершине O, меньшим ε (это доказано в § 5 гл. V). Пусть X_1 — другая вершина этого двуугольника, а L_1 и L_1' — его стороны (черт. 82). Угол между L_1 и L_1' в точке X_1 больше нуля, а потому из точки X_1 можно провести кратчайшую L_2 вне двуугольника D_1, образующую с L_1 и L_1' углы $<\pi$. (Это следует из того, что из X_1 кратчайшие исходят почти во всех направлениях, как это доказано в § 5 гл. V.) Пусть X_2 — конец кратчайшей L_2. Если эту кратчайшую нельзя продолжить за точку X_2, то существует двуугольник D_2 со сторонами L_3, L_3', образующими с L_2 углы, меньшие π, и между собой угол, меньший ε. Далее из вершины X_3 двуугольника D_2 мы опять проводим кратчайшую L_4, и т. д. Таким путём мы получаем две ломаные $L_1+L_2+L_3+$ $+L_4+\ldots$ и $L_1'+L_2+L_3'+L_4+\ldots$, имеющие всюду неотрицательные повороты, каждая со своей стороны. Если такие ломаные не достигают данной

[1]) Совершенно точно это утверждение можно формулировать так. Класс кривых называется замкнутым, если он содержит предел всякой сходящейся последовательности кривых этого класса. Рассмотрим класс K линий на всех выпуклых поверхностях, подчинённый следующим условиям: 1) K содержит все кратчайшие; 2) класс K замкнут; 3) если кривая L на поверхности F принадлежит K, то соответствующая линия на любой поверхности, изометричной F, тоже принадлежит K; 4) если каждую точку линии L можно заключить в отрезок этой линии, принадлежащий K, то сама L принадлежит K. Среди всех таких классов K есть один, содержащийся в них всех; это и есть класс квазигеодезических; одна точка здесь тоже причисляется к квазигеодезическим.

длины r, то мы продолжаем построение бесконечно и получаем ломаные с бесконечным числом звеньев, имеющие в их конечной точке Y общее направление d'. Далее, мы продолжаем построение за точку Y, строя двуугольник, стороны которого образуют с направлением d' углы, меньшие π, а между собою угол, меньший ε и т. д. и т. д. Таким путём можно притти к двум ломаным L и L' длины r с бесконечным числом звеньев и имеющим всюду неотрицательные повороты, каждая со своей стороны. Доказательство этого можно провести, конечно, без трансфинитных рассуждений, а как обычно рассматривая точную верхнюю границу длин таких ломаных.

Если теперь ε стремить к нулю, то ломаные L, L' будут сходиться к одной и той же кривой, которая, в силу теоремы 5 предыдущего параграфа, будет иметь всюду неотрицательный поворот с обеих сторон, т. е. это будет квазигеодезическая. Представляется довольно очевидным и нетрудно доказать, что эта квазигеодезическая будет исходить из точки O как раз в данном направлении d.

Для доказательства второго утверждения теоремы 3 построим пример поверхности, на которой из некоторой точки в некотором направлении исходят три квазигеодезические. Рассмотрим дважды покрытый выпуклый многоугольник P с бесконечным числом сторон, сходящихся к точке O (черт. 83). Граница многоугольника P есть квазигеодезическая, исходящая из точки O. Вместе с тем, среди кривых, соединяющих точку O с какой-либо вершиной A многоугольника P и извивающихся с одной его стороны на другую, огибая каждую вершину между A и O, есть, как легко видеть, самая короткая. Легко убедиться, что она будет геодезической на всяком отрезке, не содержащем точку O, и следовательно, будет квазигеодезической. Кроме того, она, очевидно, идёт из точки O в том же направлении, что граница многоугольника P. Таких линий имеются две, симметричных относительно границы многоугольника P. Таким образом, из точки O в одном и том же направлении исходят три квазигеодезические.



Черт. 83.

Отметим ещё одно важное свойство квазигеодезических, установленное Погореловым:

Теорема 4. *Пусть L — квазигеодезическая на замкнутой выпуклой поверхности F. Пусть C — цилиндр с направляющей L и с образующими, заходящими внутрь тела, ограниченного поверхностью F. При развёртывании любого такого цилиндра на плоскость линия L переходит в выпуклую кривую, обращённую выпуклостью в сторону, соответствующую внешней части цилиндра C*[1]).

В § 5 гл. IV была доказана теорема Либермана о том, что всякая кратчайшая обладает этим свойством. Таким образом, следствия, которые мы извлекли там из указанного свойства для кратчайших, имеют место также для квазигеодезических. Нет надобности повторять их вывод.

Рассмотрим ещё специально вопрос о существовании на замкнутой выпуклой поверхности замкнутых квазигеодезических. Известно, что на всякой регулярной замкнутой выпуклой поверхности существуют по крайней мере три замкнутые геодезические без кратных точек. Эта знаменитая теорема была высказана ещё в 1905 г. Пуанкаре, но полное её доказательство было дано только почти 25 лет спустя Люстерником и Шнирельманом[2]). Нетрудно, однако, убедиться в том,

[1]) Погорелов указал примеры кривых, обладающих свойством, указанным в теореме 4, но не в квазигеодезических.

[2]) Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах. Успехи матем. наук, т. II, вып. 1 (17), 1947. Некоторые указания о замкнутых геодезических можно найти у В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 97.

что на нерегулярной замкнутой выпуклой поверхности замкнутых геодезических без кратных точек может не быть вовсе.

Действительно, такая геодезическая должна разбивать поверхность на две области, гомеоморфные кругу, причём границы этих областей, будучи геодезическими, имеют нулевой поворот. Поэтому, согласно теореме 2 § 2, кривизна каждой из этих областей должна равняться 2π. Следовательно, для того чтобы на замкнутой выпуклой поверхности существовала хотя бы одна замкнутая геодезическая без кратных точек, во всяком случае необходимо, чтобы поверхность можно было разбить на две области, имеющие кривизны, равные 2π. Но даже это оказывается не всегда возможным. Например, можно построить выпуклый многогранник с любым числом вершин и с кривизнами вершин, подобранными так, что никакая часть вершин не будет иметь сумму кривизн, равную 2π. Для тетраэдра и, тем более, для дважды покрытого треугольника это легко сделать непосредственно. А так как кривизна многогранника сосредоточена только в его вершинах, то тем самым даже на выпуклом многограннике может не быть замкнутых геодезических без кратных точек [1]).

Однако обобщение теоремы о трёх замкнутых геодезических на любые замкнутые выпуклые поверхности оказывается возможным, если вместо геодезических рассматривать квазигеодезические.

Для выясиения ожидаемого результата возьмём какую-либо замкнутую выпуклую поверхность F и построим последовательность регулярных замкнутых выпуклых поверхностей F_n, сходящихся к F. На поверхностях F_n существуют замкнутые геодезические без кратных точек, причём из известных свойств этих геодезических легко заключить, что среди них имеются такие, длины которых ограничены в совокупности. Поэтому из них можно будет выбрать некоторую сходящуюся последовательность $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots$ Каждая из этих геодезических L_{n_i} разбивает соответствующую поверхность F_{n_i} на две области $F^1_{n_i}$ и $F^2_{n_i}$, которые изометричны некоторым шапкам, как это следует из теоремы 3 § 4. Предел шапок есть либо шапка, либо прямолинейный отрезок, либо точка. Однако легко показать, что области $F^1_{n_i}$ или $F^2_{n_i}$ не могут давать в пределе точку, а потому имеются только две возможности: либо пределы областей $F^1_{n_i}$ и $F^2_{n_i}$ изометричны шапкам, либо один из этих пределов вырождается в линию, а другой изометричен шапке, граница которой склеивается сама с собою.

В первом случае предел линий L_{n_i} будет замкнутой квазигеодезической без кратных точек на поверхности F. Во втором случае он будет замкнутой ква-

---

1) Более того, многогранники, на которых существуют замкнутые геодезические без кратных точек, представляют редкое исключение. Действительно, пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — кривизны вершины многогранника с n вершинами. Числа ω_i подчинены условию

$$\omega_1 + \cdots + \omega_n = 4\pi, \tag{*}$$

и можно доказать, что во всяком случае в некоторых пределах числа ω_i могут меняться произвольно, лишь бы выполнялось условие (*). Следовательно, множество совокупностей возможных значений кривизн вершин $(n-1)$-мерно. Между тем, условие, что сумма каких-то ω_i равна 2π, представляет равенство, выделяющее из всех совокупностей $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ уже $(n-2)$-мерное множество. Исходя отсюда, можно доказать, что множество многогранников с n вершинами, у которых сумма кривизн каких-либо вершин равна 2π, имеет число измерений, на единицу меньшее числа измерений множества всех многогранников с n вершинами. (Это последнее равно, как мы знаем, $3n-6$.) По поводу определяемости многогранника кривизнами вершин см. А. Д. Александров, Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования. Изв. Академии наук СССР, серия матем., 1939 г., № 3, стр. 249. Помимо условия (*), ω_i подчинены очевидным условиям $0 < \omega_i < 2\pi$. Интересно выяснить, подчиняются ли они ещё каким нибудь условиям, или нет.

зигеодезической, налегающей на самоё себя подобно отрезку, проходимому сперва в одном, а потом в другом направлении.

Пример такой «самоналегающей» замкнутой квазигеодезической представляет ребро многогранника, соединяющее вершины, полные углы вокруг которых $\leqslant \pi$. У правильного тетраэдра полный угол вокруг каждой вершины равен π, а потому каждое его ребро оказывается замкнутой квазигеодезической, если считать ребро дважды покрытым.

Мы доказали, что *на всякой замкнутой выпуклой поверхности есть хотя бы одна замкнутая квазигеодезическая, либо не имеющая кратных точек, либо самоналегающая.*

Для доказательства существования трёх таких квазигеодезических наше простое рассуждение недостаточно, потому что три замкнутые геодезические на регулярных поверхностях, сходящихся к данной поверхности, могут априори сходиться к одной и той же кривой. Однако разумным выбором регулярных поверхностей, сходящихся к данной, этого можно избежать, как показал Погорелов [1]). Таким образом, он доказал, что *на всякой замкнутой выпуклой поверхности существуют три замкнутые квазигеодезические, которые либо не имеют кратных точек, либо налегают сами на себя.*

Из всего того, что было сказано здесь о квазигеодезических, становится ясным, что возможно детальное исследование квазигеодезических представляется существенным и обещает дать интересные и важные результаты. Отметим важнейший вопрос, касающийся квазигеодезических.

Известно, что геодезические на регулярных поверхностях могут быть определены как кривые, дающие экстремум длины, например, среди всех кривых, соединяющих данные точки. Иными словами, для них вариация длины равна нулю. На нерегулярных поверхностях понятие вариации длины может терять смысл для самых простых кривых и потому обычные методы вариационного исчисления оказываются неприложимыми. Например, даже длина ломаной на многограннике не будет дифференцируемой функцией координат её вершин, если хотя бы одна из её вершин совпадает с вершиной многогранника (речь идёт о координатах на многограннике, а не в пространстве). Отсюда ясно, что самое определение экстремали, как кривой, для которой вариация длины равна нулю, оказывается неподходящим. Нужно воспользоваться другим определением экстремума и экстремали. Такое определение введено уже в вариационное исчисление в связи с топологическими методами; грубо говоря, оно сводится к тому, что точка в пространстве R, где определена функция $f(X)$, называется экстремальной, или критической, если в окрестности этой точки семейство поверхностей $f(X) = \text{const.}$ имеет особенности. В данном случае роль точек играют спрямляемые кривые, а пространством является множество всех подлежащих рассмотрению спрямляемых кривых, в котором введено соответственным образом определённое понятие расстояния. Отсылая читателя за точными определениями к специальной литературе [2]), мы формулируем наш вопрос.

Нельзя ли доказать, что кривая тогда и только тогда даёт экстремум длины среди всех кривых, соединяющих две данные точки на выпуклой поверхности, когда эта кривая — квазигеодезическая? Аналогичный вопрос встаёт и в случае других предельных условий, например, при рассмотрении замкнутых кривых и т. п.

Известно, что траектория материальной точки, движущейся по поверхности без воздействия внешних сил, будет геодезической линией, если поверхность

---

[1]) Этот результат был сообщён мне А. В. Погореловым в письме в 1945 г.

[2]) H. Seifert und W. Threlfall, Variationsrechnung im Großen. M. Morse, The calculus of variations in the large; Л. А. Люстерник, Топология и вариационное исчисление, Успехи матем. наук, т. I, вып. 1 (11), 1946.

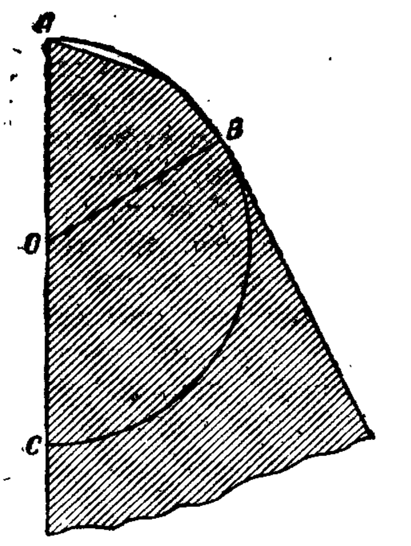
регулярна. Это следует, между прочим, из принципа Гамильтона, сводящегося в этом случае к условию, что каждая дуга траектории должна давать экстремум длины. Кажется вероятным, что на любых выпуклых поверхностях возможными траекториями точки, движущейся без действия внешних сил, будут любые квазигеодезические. Так как нерегулярные выпуклые поверхности могут быть изготовлены с любой доступной степенью точности из сколь угодно прочного материала, то вопрос о движении материальной точки по такой поверхности имеет реальный смысл. Если поверхность несколько сгладить, так, чтобы она стала регулярной, то траектории точки будут геодезическими. Считая сглаживание сколь угодно малым и лежащим за пределами точности изготовления поверхности, можно притти к выводу, что движение происходит по пределам геодезических линий, т. е. по квазигеодезическим.

Если полный угол θ вокруг точки O на выпуклой поверхности $<2\pi$, то квазигеодезическая, подходящая к точке O в направлении d, может быть продолжена за эту точку, оставаясь квазигеодезической в любом направлении, образующем с d углы, меньшие π, т. е. в любом направлении, лежащем в угле, равном $\theta-\pi$, и вообще в любом направлении, если $\theta\leqslant\pi$. С этим связана любопытная неопределённость в движении материальной точки по квазигеодезической, в чём нет, конечно, ничего невозможного, так как скорость и силы реакции поверхности в такой точке O оказываются совершенно неопределёнными.

Эти замечания о механическом значении квазигеодезических не претендуют на строгость; их цель: показать, что и для механики исследование квазигеодезических может, повидимому, представлять известный интерес.

§ 6. Окружность.

Окружность на выпуклой поверхности, т. е. геометрическое место точек, равноудалённых от данной точки, может не быть кривой в смысле возможности её непрерывного параметрического представления. Вспомним пример окружности на конусе с полным углом при вершине $<\pi$, рассмотренный ещё в § 10 гл. I (черт. 10). Если на таком конусе взять точку A, отличную от его вершины, то достаточно малая окружность с центром в точке A будет, конечно, тождественна с окружностью на плоскости. Однако с увеличением радиуса она в некоторый момент коснётся сама себя, затем распадётся на две кривые, одна из которых при дальнейшем росте радиуса сожмётся к вершине конуса и, наконец, исчезнет. Стоит взять точку A достаточно близкой к вершине конуса, чтобы получить сколь угодно малые окружности, распадающиеся на две кривые или имеющие изолированную точку.



Черт. 84.

Можно дать примеры окружностей, ещё менее похожих на кривые в обычном смысле. Возьмём, например, плоский круговой сектор радиуса 1 с центром O и с углом раствора $<\frac{\pi}{2}$ и выделим на ограничивающей его дуге AB произвольное замкнутое множество M, содержащее точки A и B (черт. 84). Выпуклая оболочка этого множества и центр O будут представлять собою некоторую выпуклую область, ограниченную с боков радиусами OA и OB. Подклеив к этой области по радиусу OB часть плоскости, ограниченную продолжением радиуса OA и касательной к окружности в точке B, получим выпуклую область G, отмеченную на чертеже штриховкой. Считая эту область дважды покрытой, превратим её в полную выпуклую поверхность F. Легко видеть, что на этой поверхности окружность радиуса 1 с центром в точке O состоит из двух дуг BC и из выбранного нами множества M. Если угодно, поверхность F можно изогнуть так, чтобы она стала не вырождающейся (это возможно в силу теоремы Оловянишникова, приведённой в § 4 гл. VIII). Этот пример показывает, что *окружность на выпуклой поверхности может быть гомеоморфна любому замкнутому множеству на плоской окружности, содержащему хотя бы одну дугу* (соответственно дуге CB).

Важное общее свойство окружности выражает следующая теорема, совершенно аналогичная известной теореме планиметрии о том, что окружность перпендикулярна к радиусу.

Теорема 1. *Пусть A — точка на окружности C с центром в точке O на выпуклой поверхности. Пусть последовательность точек X_n окружности C сходится к точке A так, что кратчайшие OX_n — радиусы окружности сходятся к некоторой кратчайшей OA. Тогда угол между кратчайшими AX_n и OA стремится к прямому.*

Доказательство. Рассмотрим треугольники OAX_n и плоские треугольники T_n со сторонами той же длины. Пусть α_n — угол между OA и AX_n, α_n^0 — соответствующий угол треугольника T_n и ω_n — кривизна внутренней области треугольника OAX_n. Тогда

$$|\alpha_n - \alpha_n^0| \leqslant \omega_n.$$

Так как $OA = OX_n$, то треугольник T_n — равнобедренный и, следовательно, при $X_n \to A$ его угол α_n^0 стремится к $\frac{\pi}{2}$. Вместе с тем, кратчайшие OX_n сходятся к OA, и потому внутренние области треугольников OAX_n можно заключить в исчезающую последовательность областей[1]). Отсюда, на основании свойства непрерывности кривизны, следует, что ω_n стремится к нулю. Следовательно, предел угла α_n совпадает с пределом α_n^0, т. е. равен $\frac{\pi}{2}$.

Если из точки A исходят две непрерывные ветви C_1 и C_2 окружности C, то, беря точки X_n на одной из этих ветвей, получим, что радиус OA, предельный для радиусов OX_n, перпендикулярен к этой ветви. Следовательно, обе ветви C_1 и C_2 имеют в точке O направления, перпендикулярные к соответствующим радиусам $(OA)_1$ и $(OA)_2$. Эти радиусы могут, конечно, не совпадать, и тогда точка A является угловой точкой окружности[2]). Если же есть только один радиус, т. е. одна кратчайшая OA, то обе ветви к нему перпендикулярны. В этом случае можно просто сказать, что окружность перпендикулярна к радиусу.

Из теоремы 1 можно вывести следующее заключение:

Точка, полный угол вокруг которой $< \pi$, может быть только изолированной точкой какой бы то ни было окружности.

Действительно, пусть полный угол θ вокруг точки A меньше π. Допустим, что она является не изолированной точкой окружности C с центром в точке O, т. е. допустим, что на C имеются точки X, сколь угодно близкие к A. Из этих точек мы выберем такую последовательность X_n, чтобы кратчайшие OX_n сходились к некоторой кратчайшей OA. Тогда по теореме 1 углы α_n между OA и AX будут сходиться к $\frac{\pi}{2}$. Но угол между кратчайшими, исходящими из точки A, не может быть больше половины полного угла θ вокруг точки A. Следовательно, $\alpha_n \leqslant \frac{\theta}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Получается противоречие, по-

---

[1]) Именно, в последовательность окрестностей радиуса OA за вычетом самого этого радиуса.

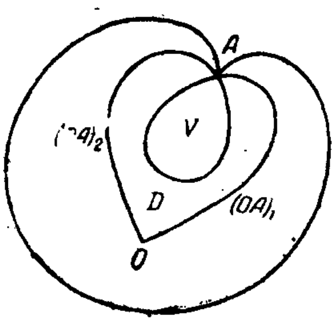
[2]) На черт. 84 в точку B идут два радиуса. На черт. 10 в точки C и D тоже идёт по два радиуса.

казывающее, что на окружности C не может быть точек, сколь угодно близких к точке A.

После сделанных вначале замечаний о возможных особенностях окружности не покажется тривиальной следующая теорема:

Теорема 2. *Для каждой точки O на выпуклой поверхности существует такое положительное r_0, что всякая окружность с центром в O и радиусом, меньшим r_0, оказывается простой замкнутой кривой, т. е. гомеоморфна окружности на плоскости.*

Доказательство. Возьмём вокруг точки O малый круг U_r радиуса r; граница его есть окружность. Покажем, что при достаточно малом r внутренность круга U_r есть односвязная область. То, что внутренность круга есть связная область, — очевидно. Если же круг достаточно мал, то он заключён в окрестности W точки O, гомеоморфной плоскому кругу, и, следовательно, если его внутренняя область не односвязна, то он имеет «дыры». Так как при $r' < r$ круг U'_r содержится в круге U_r, то с уменьшением радиуса круга U_r его внешняя граница сжимается, а «дыры» увеличиваются; могут также появляться новые «дыры» [1]). В конце концов одна из дыр V в процессе своего увеличения коснётся внешней границы круга U_r хотя бы в одной точке A. Из точки A исходят две ветви C_1, C_2 границы рассматриваемой дыры V. На этих ветвях можно взять точки, сходящиеся к A, и тогда радиусы, проведённые в эти точки, дадут в пределе два радиуса $(OA)_1$ и $(OA)_2$, подходящие к точке A с разных сторон от дыры V (черт. 85). Эти радиусы ограничат, следовательно, некоторый двуугольник D, содержащий дыру V. Так как каждый радиус перпендикулярен к своей ветви C_1 и C_2, то угол двуугольника D при вершине A будет не меньше π. Следовательно, сумма обоих углов двуугольника D, т. е. кривизна его внутренней области будет больше π.



Черт. 85.

Вместе с тем, внутренняя область двуугольника D содержится в области $W - O$, получающейся из окрестности W точки O путём исключения точки O. А по свойству непрерывности кривизны, кривизна такой области $W - O$ становится сколь угодно малой с уменьшением окрестности W. Поэтому в достаточно малой области W нет двуугольников с кривизной, большей π, и, следовательно, достаточно малый круг U_r не может иметь дыр. Таким образом, внутренность достаточно малого круга с центром в данной точке односвязна, откуда легко уже заключить, что её граница, т. е. окружность, представляет собою простую замкнутую кривую.

Вместе с тем, стоит, может быть, заметить, что даже окружность сколь угодно малого радиуса может иметь угловые точки. Действительно, мы видели, что она будет свободна от угловых точек только при том условии, что в каждую её точку идёт по одному радиусу. А это, как легко видеть, обозначало бы, что из центра во всех направлениях исходят кратчайшие — радиусы данной окружности. Между тем, мы знаем, что на выпуклой поверхности, вообще говоря, не из всякой точки исходят кратчайшие во всех направлениях. Таким образом, даже сколь угодно малая окружность с данным центром может быть не лишена особенностей, существенно отличающих её от окружности на плоскости.

Обратимся теперь к рассмотрению зависимости длины окружности от радиуса. Для этого воспользуемся следующим простым замечанием:

---

[1]) На черт. 10 дуга CC представляет собою внешнюю границу круга, а дуга DD — «дыру» в ней. С уменьшением радиуса граница «дыры» касается внешней границы в точке B.

Лемма. *Пусть X и Y — точки на двух кратчайших, исходящих из точки O, равноудалённые от O: $OX = OY = r$, и пусть $z(r)$ есть расстояние между ними. Тогда отношение $\frac{z(r)}{r}$ будет невозрастающей функцией r, и если φ — угол между данными кратчайшими, а $\omega(r)$ — кривизна треугольника OXY, то*

$$2\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant \frac{z(r)}{r} \geqslant 2\sin\frac{\varphi-\omega(r)}{2}. \qquad (1)$$

Действительно, если $\varphi_0(r)$ есть угол в плоском треугольнике с теми же сторонами, что и треугольник OXY, то

$$\frac{z(r)}{r} = 2\sin\frac{\varphi_0(r)}{2}.$$

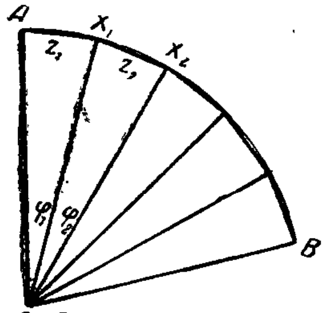
Но по условию выпуклости $\varphi_0(r)$ не возрастает с ростом r, а следовательно то же верно для $\frac{z(r)}{r}$. Кроме того, как нам известно, углы $\varphi_0(r)$ и φ удовлетворяют соотношению $|\varphi_0(r) - \varphi| \leqslant \omega(r)$. Отсюда и следует (1).

Следующая теорема о длине окружности оказывается почти очевидным следствием данной леммы:

Теорема 3. *Отношение длины $l(r)$ окружности к радиусу r не возрастает с ростом радиуса, и находится в пределах:*

$$\theta \geqslant \frac{l(r)}{r} \geqslant \theta - \omega(r),$$

где θ — полный угол вокруг центра, а $\omega(r)$ — кривизна ограниченного окружностью круга с исключённым центром. Вместо всей окружности можно взять любую её дугу, стягивающую сектор с данным углом φ; тогда, если $l(r)$ — длина этой дуги, а $\omega(r)$ — кривизна сектора с исключённым центром, то $\varphi \geqslant \frac{l(r)}{r} \geqslant \varphi - \omega(r)$, причём опять-таки $\frac{l(r)}{r}$ не возрастает с ростом r[1]).



Черт. 86.

Мы предполагаем, что дуга окружности есть кривая в обычном смысле[2]). Мы говорим, что дуга стягивает сектор U, если в каждую её точку можно провести радиус, проходящий в секторе U.

Доказательство. Пусть дуга AB окружности радиуса r стягивает сектор с углом φ. Возьмём на этой дуге точки $X_0, X_1, \ldots, X_n$, расположенные последовательно между её концами A, B, причём $X_0 = A$, $X_n = B$. Проведя из центра O радиусы во все точки $X_0, X_1, \ldots, X_n$, получим равнобедренные треугольники $OX_{i-1}X_i$. Пусть φ_i — угол между радиусами OX_{i-1} и OX_i, а z_i — расстояние $X_{i-1}X_i$ (черт. 86). Согласно нашей лемме, при данном φ_i, $\frac{z_i}{r}$ не

[1]) Если вырезать данный сектор и склеить ограничивающие его радиусы друг с другом, то получим круг, у которого полный угол вокруг центра равен φ. Так операция склеивания сводит случай дуги к случаю целой окружности.

[2]) В общем случае дуга окружности может не быть кривой в обычном смысле. Однако длину её можно определить всегда следующим образом. Проводим радиусы OA и OB, ограничивающие сектор U. Точку X дуги AB будем считать предшествующей точке Y, если сектор OAX содержится в секторе OAY. Этим определяется порядок точек на дуге AB, и длина дуги AB может быть определена тогда, как предел сумм расстояний между её последовательными точками, при условии, что берутся только расстояния между точками, удалёнными друг от друга не более чем на какое-то $\varepsilon \to 0$.

возрастает с увеличением радиуса r. Вместе с тем, длина дуги AB есть, по определению, точная верхняя граница сумм $\sum_{i=1}^{n} z_i$. Отсюда легко заключить, что длина дуги также не возрастает с ростом радиуса[1]). Этим доказано первое утверждение теоремы.

Далее, согласно формуле (1),

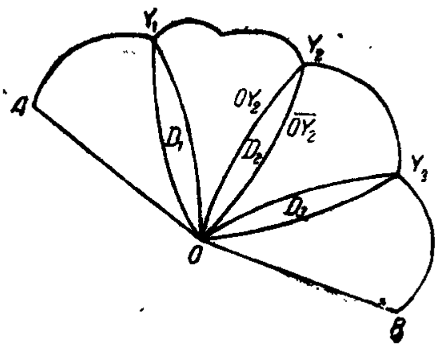
$$z_i \leqslant 2r \sin\frac{\varphi_i}{2},$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \leqslant 2r \sum_{i=1}^{n} \sin\frac{\varphi_i}{2} \leqslant r \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = r\varphi.$$

Поэтому длина $l(r)$ дуги AB также не больше $r\varphi$, чем доказана первая часть неравенства, утверждаемого в теореме.

Для доказательства другой части этого неравенства рассмотрим все такие точки дуги AB, в которые идёт более одного радиуса. Два радиуса, идущие в одну точку, ограничивают двуугольник, и среди радиусов, идущих в данную точку, имеются два, ограничивающих наибольший двуугольник. Таким образом, каждой точке Y, в которую идёт более одного радиуса, соответствует определённый угол ψ между радиусами OY, $\overline{OY}$, ограничивающими наибольший двуугольник. Так как сумма всех таких углов ψ не может превосходить угла всего сектора, стягиваемого дугой AB, то число таких двуугольников с углами ψ, бóльшими данного, конечно, а число их всех вообще не более чем счётно.



Черт. 87.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_m$ — все такие точки, в которые идут радиусы OY_j, $\overline{OY_j}$, образующие углы, бóльшие какого-либо $\varepsilon > 0$. Точки $Y_1, \ldots, Y_m$ мы нумеруем в порядке их расположения от одного конца A к другому концу B дуги AB, и радиус OY_j считаем проходящим ближе к радиусу OA, чем радиус $\overline{OY_j}$ (черт. 87). Сектор между соседними радиусами $\overline{OY_j}$ и OY_{j+1} можно разбить на секторы с углами, меньшими 2ε. Действительно, если бы это было невозможно, то существовали бы радиусы OX и OY, идущие в сколь угодно близкие друг к другу точки X и Y дуги Y_jY_{j+1} и образующие друг с другом угол, не меньший 2ε. В пределе, когда точки X и Y совпадут, эти радиусы огра-

---

[1]) Берём две дуги AB и $A'B'$ радиусов r и $r' < r$. Радиусы OX_i, идущие в точки X_i дуги AB, пересекают дугу $A'B'$ в точках X_i'. Если $X_{i-1}'X_i' = Z_i'$, а $l(r')$ — длина дуги $A'B'$, то

$$\frac{1}{r'} l(r') \geqslant \lim \frac{1}{r'} \sum_i z_i'. \tag{a}$$

Здесь возможен знак «больше», потому что радиусы, идущие в точки на дуге AB, могут образовывать двуугольники, содержащие часть дуги $A'B'$. Далее,

$$\frac{z_i'}{r'} \geqslant \frac{z_i}{r}, \tag{b}$$

кроме того, точки X_i можно было заранее выбрать так, чтобы

$$\sum_i z_i > l(r) - \varepsilon. \tag{c}$$

Из (a), (b), (c), в силу производительности ε, следует, что

$$\frac{l(r')}{r'} \geqslant \frac{l(r)}{r}.$$

ничили бы двуугольник с углом, не меньшим 2ε. А это невозможно, потому что точки Y_j уже исчерпывают все вершины такого рода двуугольников.

Итак, мы берём на каждой из дуг AY_1, $Y_1Y_2, \ldots, Y_m B$ такие точки X_i, что углы φ_i между радиусами OX_{i-1}, OX_i меньше 2ε. К точкам X_i мы причисляем также точки A, $Y_1, \ldots, Y_m$, B, причём, если, например, точка X_i есть Y_j, то углом φ_i считается угол между радиусами OX_{i-1} и OY_j, а углом φ_{i+1} считается угол между радиусами OX_{i+1} и OY_j.

Таким образом мы получаем равнобедренные треугольники $OX_{i-1}X_i = T_i$ с углами φ_i, меньшими 2ε. Сумма всех углов φ_i будет меньше угла φ всего сектора, стягиваемого дугой AB, потому что углы двуугольников D_j с вершинами Y_j исключаются; и для того, чтобы получить весь угол φ, нужно прибавить углы ψ_j этих двуугольников. Поэтому

$$\varphi = \sum_i \varphi_i + \sum \psi_j. \tag{2}$$

Двуугольники D_j вместе с треугольниками T_i образуют некоторый многоугольник P, кривизна $\omega(P)$ внутренней области которого равна сумме кривизн их внутренних областей:

$$\omega(P) = \sum_i \omega(T_i) + \sum_j \omega(D_j).$$

Кривизна двуугольника равна сумме его углов и потому $\omega(D_i) > \psi_j$, следовательно,

$$\omega(P) \geqslant \sum_i \omega(T_i) + \sum_j \psi_j. \tag{3}$$

Вычтя из (2) неравенство (3), получим, что

$$\sum_i [\varphi_i - \omega(T_i)] \geqslant \varphi - \omega(P). \tag{4}$$

Если, как и раньше, $X_{i-1}X_i = z_i$, то, по самому определению длины, для длины l дуги AB будем иметь неравенство

$$l \geqslant \sum_i z_i.$$

Согласно (1)

$$z_i \geqslant 2r \sin \frac{\varphi_i - \omega(T_i)}{2} \geqslant 2r \sin \frac{\varphi_i}{2} - r\omega(Ti)$$

и, следовательно,

$$l \geqslant 2r \sum_i \sin \frac{\varphi_i}{2} - r \sum_i \omega(T_i). \tag{5}$$

Так как $2 \sin \frac{\varphi_i}{2} > \varphi_i - \frac{\varphi_i^3}{24}$, а $\varphi_i \leqslant 2\varepsilon$ и $\sum_i \varphi_i \leqslant \varphi$, то

$$2 \sum_i \sin \frac{\varphi_i}{2} > \sum_i \varphi_i - \delta,$$

где $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon^2\varphi$. Благодаря этому из (5) следует, что

$$l > r \sum_i \varphi_i - r \sum_i \omega(T_i) - r\delta. \tag{6}$$

Воспользовавшись теперь неравенством (4), мы выводим отсюда, что

$$l > (\varphi - \omega(P))\, r - r\delta. \tag{7}$$

При вставлении на дуге AB всё новых и новых точек X_i получающиеся многоугольники P будут сходиться к сектору U, стягиваемому этой дугой. Отсюда на основании непрерывности кривизны следует, что предел кривизн внутренних областей многоугольников P не может превосходить кривизны ω сектора U с исключённым центром O, поэтому из (7) следует, что

$$l > (\varphi - \omega) r - r\delta,$$

а так как δ вместе с ε произвольно мало, то

$$l \geqslant (\varphi - \omega) r. \tag{8}$$

Но это и есть вторая часть неравенства, справедливость которого утверждается в теореме.

Более тонкий анализ приводит к тому, что в неравенстве (8) в качестве ω можно взять кривизну внутренней области сектора U, т. е. с исключением не только центра, но и самой дуги AB. И это — не одно и то же, потому что дуга AB может иметь кривизну (площадь сферического изображения), отличную от нуля. Пример тому даёт параллель поверхности вращения, являющаяся ребром этой поверхности.

Далее, анализ проведённого доказательства приводит к тому, что $l = \varphi r$ только в том случае, когда кривизна внутренней области сектора U равна нулю, т. е. когда сектор U можно развернуть на плоскость. Точно так же можно показать, что $l = (\varphi - \omega) r$ также лишь в том случае, когда кривизна ω внутренности сектора U равна нулю. Таким образом, если только $\omega \neq 0$, то $\varphi r > l > (\varphi - \omega) r$.

Если в каждую точку дуги окружности идёт только один радиус, то длину этой дуги можно представить в виде интеграла. Пусть AB — дуга окружности, обладающая указанным свойством, φ — угол стягиваемого ею сектора, r — радиус дуги. Пусть $\omega(x)$ — кривизна внутренней области кругового сектора радиуса $x \leqslant r$, заключённого между радиусами OA и OB. Длина l дуги AB выражается формулой

$$l = \varphi r - \int_0^r \omega(x)\, dx. \tag{9}$$

Если во все точки окружности радиуса r с центром O идёт по одному радиусу, то длина окружности выражается той же формулой

$$l = \theta r - \int_0^r \omega(x)\, dx, \tag{10}$$

где θ — полный угол вокруг точки O, а $\omega(x)$ — кривизна концентрического круга радиуса x за вычетом самой точки O.

Для производной длины дуги окружности l по радиусу r мы имеем формулу

$$\frac{dl}{dr} = \varphi - \omega(r), \tag{11}$$

где $\frac{dl}{dr}$ — есть левая производная, если под $\omega(r)$ понимать кривизну сектора с исключением самой дуги, и $\frac{dl}{dr}$ есть правая производная, если под $\omega(r)$ понимать кривизну сектора с присоединением самой дуги. То, что это не всегда одно и то же, показывает пример параллелей поверхности вращения, являющихся рёбрами этой поверхности. Так как $\omega(r)$ с ростом r не убывает, то $\frac{dl}{dr}$ не возрастает и, следовательно, длина дуги оказывается выпуклой функцией радиуса. Однако мы говорим о том частном случае, когда в каждую точку дуги идёт по одному радиусу. Без этого предположения формула (9) и соответственно (10) и (11) оказываются неверными и должны быть заменены более сложными.

Именно, если не во все точки дуги AB идёт по одному радиусу, то вырежем из поверхности все двуугольники, ограниченные радиусами, идущими в точки дуги AB, и склеим попарно стороны образовавшихся пустот. В силу теоремы о склеивании получится многообразие с метрикой положительной кривизны (которое можно, конечно, реализовать в виде выпуклой поверхности). В этом многообразии в каждую точку дуги AB будет итти по одному радиусу, а потому к ней можно применить ту же формулу (9). Следовательно, формула (9) имеет место и в общем случае, если только под φ понимать угол стягиваемого сектора за вычетом углов всех двуугольников, а под $\omega(x)$ понимать кривизну внутренней области сектора радиуса x, за вычетом кривизны тех частей этой области, которые попадают в наши двуугольники. Так как с изменением радиуса r вырезаемые двуугольники изменяются, то формула (11) для $\frac{dl}{dr}$ не имеет места, и длина дуги может не быть выпуклой функцией радиуса, как можно видеть на примере окружности на конусе, если центр её не лежит в вершине конуса [1]).

В заключение укажем ещё одну теорему: *Если последовательность выпуклых поверхностей F_n сходится к поверхности F и последовательность окружностей C_n на F_n сходится к окружности C на F, то длины окружностей C_n сходятся к длине окружности C.*

Если окружности C_n и C представляют собой замкнутые кривые, то эта теорема следует из двух теорем: 1. Поворот окружности имеет вариацию, не большую 6π (вариацию поворота окружности легко оценить через кривизну круга и полный угол вокруг центра). 2. Если вариации поворота кривых L_n ограничены в совокупности и кривые L_n сходятся к кривой L, то длина L равна пределу длин кривых L_n, при том непременном условии, что кривые L_n лежат на выпуклых поверхностях, сходящихся к той поверхности, на которой лежит L. Для того случая, когда окружности C, C_n не являются кривыми в обычном смысле, нам не известно ни доказательство, ни опровержение данной теоремы.

---

[1]) Пусть F — дважды покрытый выпуклый многоугольник с бесконечным числом вершин, симметрично сгущающихся к точке O. На такой поверхности F длина окружности с центром в точке O не будет выпуклой функцией радиуса r даже при сколь угодно малых r.

ГЛАВА X.

ПЛОЩАДЬ.

§ 1. Внутреннее определение площади.

Пусть P — многоугольник на выпуклой поверхности. Его можно разбить на сколь угодно малые треугольники, а потому существует такая последовательность его разбиений Z_n на треугольники, что при $n \to \infty$ наибольший диаметр треугольника в n-ом разбиении стремится к нулю. Сопоставим каждому треугольнику n-го разбиения плоский треугольник со сторонами той же длины и возьмём сумму S_{Z_n} площадей этих плоских треугольников. Оказывается, что при $n \to \infty$ суммы S_{Z_n} сходятся к определённому пределу S, независимо от выбора разбиений Z_n, лишь бы эти разбиения безгранично измельчались. Этот предел мы принимаем за площадь многоугольника P.

Обоснование данного определения площади должно слагаться из доказательства трёх фактов: 1) Предел сумм S_{Z_n} всегда существует, т. е. всякий многоугольник на выпуклой поверхности имеет площадь. 2) Для всякого многоугольника на выпуклой поверхности площадь в смысле данного определения совпадает с площадью, определяемой, как обычно, посредством приближения многогранниками. 3) Площадь вполне аддитивна, т. е. если многоугольник P разбит на конечное, или даже счётное множество многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников. После этого, пользуясь известными приёмами теории меры, можно будет определнть площадь всякого замкнутого или открытого, а затем и всякого борелевского множества на выпуклой поверхности. Первый из трёх указанных фактов будет установлен в этом параграфе, а два других — в следующем. Здесь мы получим даже больше, чем просто существование площади у каждого многоугольника, а именно, мы докажем, что если многоугольник P на выпуклой поверхности разбит на треугольники диаметров $\leqslant d$, то разность суммы S_Z площадей соответствующих плоских треугольников и площади S самого многоугольника P удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant S - S_Z \leqslant \frac{1}{2}\,\omega(P)\,d^2, \tag{1}$$

где $\omega(P)$ — кривизна внутренней области многоугольника P. Это неравенство очень точно оценивает, насколько близко сумма S_Z подходит к предельному значению S в зависимости от наибольшего диаметра d треугольников разбиения[1]).

Не ограничивая общности, можно предполагать, что данный многоугольник P принадлежит некоторой замкнутой выпуклой поверхности F. Разбиение Z_n многоугольника P можно дополнить до разбиения $\overline{Z}_n$ всей поверхности F на треугольники. Заменяя каждый треугольник этого разбиения $\overline{Z}_n$ плоским треугольником, мы получим развёртку R_n. Метрика, определяемая этой развёрткой,

[1]) Неравенство (1) может быть улучшено только в том смысле, что множитель $\frac{1}{2}$ можно заменить несколько меньшим.

будет тем ближе подходить к метрике поверхности F, чем мельче разбиение $\overline{Z}_n$. Поверхность F имеет некоторую метрику ρ, а по теореме реализуемости, доказанной в главе VII, из многогранников, склеенных из развёрток R_n, можно выбрать последовательность, сходящуюся к поверхности, имеющей данную метрику ρ, т. е. к поверхности, изометричной F. Поэтому данное нами внутреннее определение площади аналогично обычному её определению, как предела площадей многогранников, сходящихся к данной поверхности. Мы только осуществляем приближение многогранниками не внешним, а внутренним путём: многогранные метрики, задаваемые развёртками R_n, сходятся к метрике поверхности F.

Для того чтобы получить оценку (1) и доказать вместе с тем существование площади, докажем сначала две леммы.

Лемма. 1. *Пусть T — треугольник на выпуклом многограннике или вообще в многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны, T_0 — плоский треугольник со сторонами той же длины, d — диаметр треугольника T, ω — кривизна его внутренней области, а S и S_0 — площади треугольников T и T_0. Имеет место неравенство*

$$0 \leqslant S - S_0 \leqslant \frac{1}{2}\omega d^2. \tag{2}$$

Доказательство. Если кривизна треугольника T равна нулю, то он изометричен треугольнику T_0, и неравенство (2) тривиально. Поэтому можно считать, что $\omega > 0$.

Пусть A, B, C — вершины треугольника T. Допустим, что, например, вершины A и B можно соединить в T кратчайшей $\overline{AB}$, отличной от стороны AB. Тогда эта кратчайшая разделяет треугольник T на двуугольник D и треугольник T_1 со сторонами той же длины, что и T. Кривизна внутренней области треугольника T слагается из кривизн внутренних областей треугольника T и двуугольника D:

$$\omega(T) = \omega(T_1) + \omega(D). \tag{3}$$

Диаметры двуугольника D и треугольника T_1, очевидно, не больше диаметра треугольника T.

Если угол при вершине B двуугольника D больше π, то в D могут иметься такие точки X, что кратчайшая AX проходит через B. Тогда кратчайшая BX заведомо не проходит через A. Таким образом, в каждую точку X двуугольника можно провести кратчайшую из одной его вершины, не проходящую через другую вершину.

Проведём из вершины A двуугольника D кратчайшие AX во все такие точки X этого двуугольника, что кратчайшая AX не проходит через вершину B. Возьмём на плоскости точку A_0 и проведём из неё отрезки A_0X_0, соответственно равные кратчайшим AX и образующие друг с другом такие же углы. В результате на плоскости образуется фигура D_A с площадью S_A, равной площади той части двуугольника D, которая образована всеми рассматриваемыми точками X. (Это построение можно представлять ещё таким образом: из вершины A проводим в D все геодезические на такую длину, на какой они являются кратчайшими, а потом проводим на плоскости равные им отрезки, образующие друг с другом такие же углы. В некоторые точки X будут итти две кратчайшие, эти точки будут концами рассматриваемых геодезических.)

Если α — угол двуугольника D при вершине A, то фигура D_A содержится в секторе с углом α и радиусом, равным диаметру двуугольника D. Но диаметр двуугольника D не больше диаметра d треугольника T, и потому

$$S(D_A) < \frac{1}{2}\alpha d^2.$$

Если, исходя из вершины B, построить соответствующую фигуру D_B, то для её площади $S(D_B)$ будем иметь

$$S(D_B) < \frac{1}{2}\beta d^2.$$

Так как каждая точка двуугольника D имеет свой образ по крайней мере в одной из фигур D_A и D_B, то для площади двуугольника получаем

$$S(D) \leqslant S(D_A) + S(D_B) < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) d^2.$$

Но сумма углов двуугольника есть кривизна его внутренней области, и следовательно,

$$S(D) < \frac{1}{2}\omega(D) d^2. \tag{4}$$

После исключения из нашего треугольника T двуугольника D остаётся треугольник T_1, у которого

$$\begin{aligned} S(T_1) &= S(T) - S(D) > S(T) - \frac{1}{2}\omega(D) d^2, \\ \omega(T_1) &= \omega(T) - \omega(D). \end{aligned} \tag{5}$$

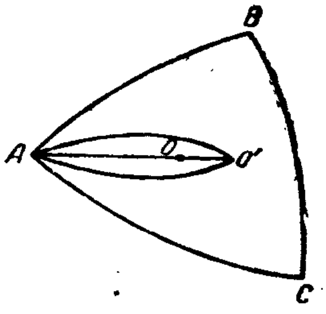
Если внутри треугольника T_1 можно ещё провести кратчайшие, соединяющие его вершины и отсекающие от него тем самым новые двуугольники, то мы отделяем также эти двуугольники. В результате останется треугольник T_2, в котором больше нет таких кратчайших. Если ω' есть кривизна всех исключённых двуугольников, считая также первый двуугольник D, то, согласно формулам (5), будем иметь

$$\begin{aligned} S(T) > S(T_2) > S(T) - \frac{1}{2}\omega' d^2, \\ \omega(T_2) = \omega(T) - \omega'. \end{aligned} \tag{6}$$

Если кривизна треугольника T_2 оказывается равной нулю, то он будет изометричен плоскому треугольнику T_0 со сторонами той же длины, что у данного треугольника T. В этом случае формулы (6) дают

$$S(T) > S(T_0) > S(T) - \frac{1}{2}\omega(T) d^2,$$

а это и есть нужное нам неравенство (1).



Черт. 88.

Остаётся предположить, что кривизна треугольника T_2 отлична от нуля. Конечно, могло быть, что в исходном треугольнике T вовсе нет иных кратчайших, соединяющих его вершины, кроме сторон. Тогда роль треугольника T_2 играл бы сам треугольник T.

Если кривизна треугольника T_2 отлична от нуля, то в нём имеются «внутренние вершины», т. е. точки, полные углы вокруг которых меньше 2π. Возьмём такую точку O и соединим её кратчайшей AO с вершиной A треугольника T. Если эта кратчайшая проходит через другую вершину, то эту вершину мы примем за A и потому всегда можно считать, что кратчайшая AO проходит внутри треугольника. Если имеются две кратчайшие AO, то они ограничивают двуугольник, внутри которого должны быть другие внутренние вершины, и мы можем вместо O взять одну из них. Поэтому можно всегда считать, что кратчайшая AO — единственная, соединяющая внутреннюю вершину O с «внешней» вершиной A.

Проведём из O кратчайшую OO', образующую с AO равные углы на обе стороны (эти углы будут равны половине полного угла вокруг O) (см. черт. 88, имеющий «топологический» характер). Если точка O' достаточно близка к O, то имеются равно две кратчайшие AO', проходящие симметрично с обеих сторон от AO. Эти кратчайшие ограничивают некоторый двуугольник D. Пусть $\Delta\alpha$ — угол этого двуугольника при вершине A. Двуугольник D составлен из двух равных треугольников AOO' и потому площадь его будет

$$S(D) = AO \cdot AO' \cdot \sin\frac{\Delta\alpha}{2} < \frac{1}{2}\Delta\alpha \cdot d^2.$$

Если вырезать двуугольник D и отождествить кратчайшие AO', то треугольник T_2 заменится новым, в котором вместо вершины O появляется вершина O'. Угол при вершине A уменьшится на $\Delta\alpha$ и, следовательно, кривизна уменьшится на

$$\Delta\omega = \Delta\alpha.$$

Площадь же уменьшится на $\Delta S = S(D) < \frac{1}{2}\Delta\alpha d^2$, и, следовательно, убыль площади будет

$$\Delta S < \frac{1}{2}\Delta\omega \cdot d^2. \tag{7}$$

При вырезывании двуугольника D и склеивании кратчайших AO', линии, пересекавшие эти кратчайшие, заменяются, вообще говоря, более короткими. Поэтому могло бы оказаться, что в треугольнике T_2 появляется, например, линия $\widetilde{BC}$, соединяющая вершины B и C и более короткая, чем соответствующая сторона. Это, однако, не может произойти, если точка O' достаточно близка к O; иначе при $O' \to O$ предел таких линий $\widetilde{BC}$ давал бы в треугольнике линию с длиной, не большей длины стороны BC, что невозможно, в силу самого определения треугольника T_2. Во всяком случае, мы должны следить за тем, чтобы линии $\widetilde{BC}$, более короткие, чем сторона BC, не появлялись. Если же появляется линия $\widetilde{BC}$, равная стороне BC, то образуется двуугольник, который мы вырезаем так же, как в начале доказательства. При этом вычитаемая площадь оценивается по формуле (6), т. е. убыль площади и убыль кривизны связаны тем же неравенством (7).

Операцию вырезывания двуугольников можно повторять с разными внутренними вершинами O, причём число внутренних вершин не будет увеличиваться, диаметр треугольника также не будет увеличиваться, а убыль площади ΔS будет неизменно связана с убылью кривизны $\Delta\omega$ неравенством (7). Если появляется кратчайшая, соединяющая две вершины и отличная от стороны, то вырезаем образующийся двуугольник, причём число внутренних вершин уменьшится, а ΔS и $\Delta\omega$ опять будут связаны неравенством (7). Таким путём мы дойдём до того, что внутренних вершин не останется вовсе, т. е. получим треугольник с кривизной, равной нулю, который и будет треугольником T_0.

Общая убыль площади будет $S(T) - S(T_0)$, а убыль кривизны равна $\omega(T)$, и так как всегда выполняется неравенство (7), то в сумме получим

$$S(T) - S(T_0) < \frac{1}{2}\omega(T)\, d^2.$$

Исключение составляет случай, когда треугольник T_0 изометричен треугольнику T: тогда $S(T) = S(T_0)$. Следовательно, в общем случае

$$0 \leqslant S(T) - S(T_0) \leqslant \frac{1}{2}\omega(T)\, d^2,$$

что и есть требуемое неравенство.

Этот вывод не является, конечно, вполне строгим, но его можно провести совершенно точно, пользуясь обычным приёмом. Действительно, мы доказали, что от исходного треугольника T путём вырезания двуугольника можно перейти к такому треугольнику T', что

$$0 \leqslant S(T) - S(T') \leqslant \frac{1}{2}[\omega(T) - \omega(T')]\,d^2. \tag{8}$$

Это и есть неравенство (7). Рассмотрим все треугольники T' со сторонами той же длины, с диаметрами, не бо́льшими d, с числом внутренних вершин, не большим, чем у T, и такие, что для них выполняется неравенство (8). Пусть T^0 — тот из этих треугольников, кривизна которого имеет наименьшее значение. Такой треугольник существует, так как вследствие ограниченности числа вершин и диаметров треугольников T' из всякой их последовательности можно выбрать сходящуюся [1]). Тогда

$$0 \leqslant S(T) - S(T^0) \leqslant \frac{1}{2}[(\omega(T) - \omega(T^0)]\,d^2. \tag{9}$$

Но если $\omega(T^0) \neq 0$, то, по предыдущему, из треугольника T^0 можно вырезать двуугольник, причём ΔS и $\Delta\omega$ будут связаны неравенством (7), а полученный треугольник T^1 будет удовлетворять всем тем же требованиям, а также неравенству (8), поскольку

$$\Delta S = S(T^0) - S(T^1) < \frac{1}{2}\Delta\omega\, d^2 = \frac{1}{2}[\omega(T^0) - \omega(T^1)]\,d^2.$$

Следовательно, при $\omega(T^0) \neq 0$ кривизна треугольника T^0 могла бы быть уменьшена вопреки его определению. Поэтому должно быть $\omega(T^0) = 0$, т. е. $T^0 = T_0$, и (9) есть не что иное, как требуемое неравенство

$$0 \leqslant S(T) - S(T^0) \leqslant \frac{1}{2}\omega(T)\,d^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть T — треугольник на выпуклой поверхности, d — его диаметр, $\omega(T)$ — кривизна его внутренней области, а S_0 — площадь плоского треугольника T^0 со сторонами той же длины. При всяком $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение Z треугольника T на «меньшие» треугольники T_i, что сумма S_Z площадей плоских треугольников T_i^0 со сторонами той же длины удовлетворяет неравенству*

$$-\varepsilon < S_Z - S_0 < \frac{1}{2}\omega(T)\,d^2 + \varepsilon. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим какое-либо разбиение Z треугольника T на малые треугольники T_i. Заменяя каждый треугольник T_i плоским треугольником T_i^0, получим некоторую развёртку. Эту развёртку удобно представлять склеенной, так что получается некоторый «многогранный» многоугольник Q, заменяющий собою треугольник T. Если считать треугольник T лежащим на некоторой замкнутой выпуклой поверхности F и дополнить его разбиение до разбиения $\overline{Z}$ всей этой поверхности, то, согласно сделанному выше замечанию, разбиению $\overline{Z}$ будут соответствовать некоторая развёртка и склеенный из неё многогранник. Поэтому многоугольник Q будет многоугольником на этом многограннике. Однако нам достаточно рассматривать многоугольник Q сам по себе и притом только с точки зрения его внутренней метрики, а реализован ли он в пространстве, или нет, не имеет никакого значения. Важно лишь

[1]) Так как число внутренних вершин не превосходит данного, то треугольник T' можно разбить на треугольники, изометричные плоским, в количестве, также не большем данного. Вместе с тем стороны этих треугольников не превосходят d. Следовательно, каждый треугольник T' задаётся конечным числом параметров, меняющихся в ограниченном интервале, и тем самым множество всех этих треугольников, действительно, компактно.

то, что при достаточно мелком разбиении Z метрика этого многоугольника Q будет сколь угодно близко подходить к метрике треугольника T.

У многогранного многоугольника Q имеются три сорта вершин: 1) три вершины A, B, C, соответствующие вершинам треугольника T, 2) вершины «второго рода», соответствующие вершинам разбиения, лежащим на сторонах треугольника T, 3) «внутренние» вершины, соответствующие вершинам разбиения, лежащим внутри треугольника T.

Пусть α, β, γ — углы при вершинах A, B, C, а $\delta_1, \ldots, \delta_m$ — углы при вершинах второго рода. Кривизна $\omega(Q)$ внутренности многоугольника Q выражается формулой

$$\omega(Q) = 2\pi - \sum_{j=1}^{m}(\pi - \delta_j) - [(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)],$$

т. е.

$$\omega(Q) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) - \sum_{j=1}^{m}(\pi - \delta_j). \tag{11}$$

Так как при замене треугольников T_i нашего разбиения плоскими углы не увеличиваются, то углы α, β, γ не больше соответствующих углов исходного треугольника и тем самым

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi \leqslant \omega(T), \tag{12}$$

где $\omega(T)$ — кривизна внутренней области треугольника T.

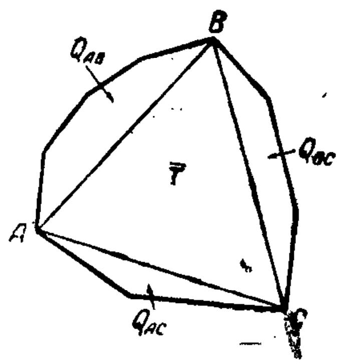
Сумма углов треугольников T_i при вершине, лежащей на стороне треугольника T, равна π, а так как при переходе к плоским треугольникам углы не увеличиваются, то углы при всех вершинах второго рода не превосходят π.

$$\delta_j \leqslant \pi \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{13}$$

Вследствие неравенств (12) и (13) равенство (11) даёт, что

$$\omega(Q) \leqslant \omega(T), \tag{14}$$

т. е. кривизна многоугольника Q не больше кривизны треугольника T.



Черт. 89.

Проведя в многоугольнике Q кратчайшие в нём линии $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ соединяющие вершины A, B, C, разобьём его на треугольник $\overline{T} = ABC$ и три многоугольника Q_{AB}, Q_{AC}, Q_{BC} (черт. 89). Эти линии $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ не проходят через вершины второго рода, так как углы при них $< \pi$. Могло бы случиться, что, например, линия $\overline{AB}$ проходит через вершину C, если угол $\gamma \geqslant \pi$. В этом случае $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Если бы так было при сколь угодно мелком разбиении на треугольники T, то получилось бы в пределе $AB = AC + CB$, т. е. сумма двух сторон AC и CB треугольника T равнялась бы третьей AB и угол при вершине C был бы равен π. Но угол γ в многоугольнике Q всегда не больше этого угла и, следовательно, он должен был бы равняться π. А в таком случае линия $\overline{AB}$ может проходить через вершину C только при том условии, если она сплошь идёт по границе многоугольника Q, т. е. если отрезки $\smile{AC}$ и $\smile{CB}$ его границы образуют одну кратчайшую. Тогда треугольник ABC вырождается в отрезок, и остаётся лишь один из многоугольников Q_{AB}, Q_{AC}, Q_{BC}, который совпадает с самим Q. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что треугольник ABC и многоугольники Q_{AB}, Q_{AC}, Q_{BC} существуют, хотя некоторые из последних, может быть, и вырождаются в линии.

Каждый из многоугольников Q_{AB}, Q_{AC}, Q_{BC} мы разобьём на треугольники $\overline{T}^j$ диагоналями, проведёнными из вершин A, B, C (это возможно, так как углы при вершинах второго рода $\leqslant \pi$). Итак, многоугольник Q представится как сумма треугольников

$$Q = \overline{T} + \sum_{j=1}^{n} \overline{T}^j. \qquad (\overline{T} = ABC)$$

Если $\overline{T}_0$, $\overline{T}_0^j$ — плоские треугольники со сторонами той же длины, то по лемме 1

$$0 \leqslant S(\overline{T}^j) - S(\overline{T}_0^j) \leqslant \frac{1}{2}\omega(\overline{T}^j)\, d^2,$$

где d — диаметр многоугольника Q, который, конечно, не меньше диаметров треугольников $\overline{T}^j$. Так как кривизна многоугольника Q равна сумме кривизн треугольников $\overline{T}^j$, то, складывая все такие неравенства, получим

$$0 \leqslant S(Q) - S(\overline{T}_0) - \sum_{j=1}^{n} S(\overline{T}_0^j) \leqslant \frac{1}{2}\omega(Q)\, d^2. \tag{15}$$

Рассмотрим плоские треугольники $\overline{T}_0^j$, соответствующие треугольникам $\overline{T}^j$, входящим, например, в многоугольник Q_{AB}. Приложив их друг к другу так же, как прилегают треугольники $\overline{T}^j$, получим многоугольник Q_{AB}^0, ограниченный отрезком $\overline{A_0B_0}$, равным кратчайшей линии $\overline{AB}$, и ломаной A_0B_0, равной отрезку AB границы многоугольника Q, т. е. равной стороне AB исходного треугольника T. Но при измельчении разбиения Z метрика в Q сходится к метрике в T, и потому при достаточно мелком разбиении разность $A_0B_0 - \overline{A_0B_0}$ будет сколь угодно малой. А вместе с ней площадь многоугольника Q_{AB}^0 тоже будет сколь угодно малой. Следовательно, при достаточно мелком разбиении сумма площадей всех треугольников $\overline{T}_0^j$ $(j > 0)$ будет меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — данное положительное число. В таком случае из (15) будет следовать, что

$$0 \leqslant S(Q) - S(\overline{T}_0) \leqslant \frac{1}{2}\omega(Q)\, d^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Треугольник $\overline{T}_0$ имеет стороны $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, которые при достаточно мелком разбиении Z будут сколь угодно мало отличаться от сторон AB, BC, CA самого треугольника T. Поэтому найдётся столь мелкое разбиение, что разность площадей плоских треугольников $\overline{T}_0$ и T_0 будет по модулю меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. В таком случае, подставляя в (16) $S(T_0)$ вместо $S(\overline{T}_0)$, получим:

$$-\varepsilon \leqslant S(Q) - S(T_0) \leqslant \frac{1}{2}\omega(Q)\, d^2 + \varepsilon,$$

и так как, в силу (14), $\omega(Q) \leqslant \omega(T)$, то окончательно

$$-\varepsilon \leqslant S(Q) - S(T_0) \leqslant \frac{1}{2}\omega(T)\, d^2 + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теперь легко доказать наше главное утверждение:

Теорема. *Всякий многоугольник на выпуклой поверхности имеет площадь. Пусть S — площадь многоугольника P, а ω — кривизна его внутренней области. Если многоугольник P разбит на треугольники диаметров $\leqslant d$, то сумма S_Z площадей таких треугольников со сторонами той же длины удовлетворяет неравенству*

$$0 \leqslant S - S_Z \leqslant \frac{1}{2}\omega\, d^2.$$

Доказательство. Пусть Z_1 и Z_2 — два данных разбиения многоугольника P на треугольники диаметров, соответственно, не больших, чем d_1 и d_2. Пусть S_{Z_1} и S_{Z_2} сумма площадей плоских треугольников, соответствующих треугольникам этого разбиения. Покажем, что

$$-\frac{1}{2}\omega d_1^2 \leqslant S_{Z_1} - S_{Z_2} \leqslant \frac{1}{2}\omega d_2^2.$$

Для доказательства рассмотрим оба разбиения Z_1 и Z_2 одновременно. Каждый треугольник одного из них даёт в пересечении с треугольниками другого конечное число многоугольников. Каждый из этих многоугольников можно разбить на треугольники, и, следовательно, существует сколь угодно мелкое разбиение Z многоугольника P, являющееся одновременно подразделением обоих данных разбиений Z_1 и Z_2.

Пусть N_1 — число треугольников разбиения Z_1 и ε — данное положительное число. Возьмём какой-нибудь треугольник T разбиения Z_1; в разбиении Z он разделён на малые треугольники t_i. Заменяя каждый из этих треугольников плоским, получим «многогранный» многоугольник Q. Согласно лемме 2, разбиение Z можно взять столь мелким, что будет

$$-\frac{\varepsilon}{N_1} \leqslant S(Q) - S(T_0) \leqslant \frac{1}{2}\omega(T)\, d_1^2 + \frac{\varepsilon}{N_1},$$

где $S(T_0)$ — площадь плоского треугольника со сторонами той же длины, что и треугольник T. Сложим все такие неравенства для всех треугольников T разбиения Z_1. Тогда суммы площадей $S(Q)$ и $S(T_0)$ дадут суммы S_Z и S_{Z_1} площадей плоских треугольников, соответствующих разбиениям Z и Z_1, а сумма кривизн $\omega(T)$ даст не более чем кривизну многоугольника P. Следовательно, будем иметь:

$$-\varepsilon \leqslant S_Z - S_{Z_1} \leqslant \frac{1}{2}\omega d_1^2 + \varepsilon. \tag{17}$$

Но если разбиение Z — достаточно мелкое, то точно так же

$$-\varepsilon \leqslant S_Z - S_{Z_2} \leqslant \frac{1}{2}\omega d_2^2 + \varepsilon. \tag{18}$$

Вычитая (17) из (18) и имея в виду, что ε можно взять сколь угодно малым, получим, что

$$\frac{1}{2}\omega d_1^2 \leqslant S_{Z_1} - S_{Z_2} \leqslant \frac{1}{2}\omega d_2^2. \tag{19}$$

Если теперь имеется последовательность разбиений Z_n многоугольника P на треугольники диаметров $\leqslant d_n$, то

$$\frac{1}{2}\omega d_m^2 \leqslant S_{Z_m} - S_{Z_n} \leqslant \frac{1}{2}\omega d_n^2.$$

Следовательно, если при $n \to \infty$ $d_n \to 0$, то числа S_{Z_n} образуют сходящуюся последовательность. А это значит, что площадь существует. С другой стороны, если в неравенстве (19) разбиение Z_1 брать всё более и более мелким, т. е. $d_1 \to 0$, то площади S_{Z_1} будут, как сейчас доказано, сходиться к площади S многоугольника P. Поэтому в пределе при $d_1 \to 0$ неравенство (19) даёт:

$$0 \leqslant S - S_Z \leqslant \frac{1}{2}\omega d^2, \tag{20}$$

где индекс 2 при Z и d опущен. Этим теорема доказана. Едва ли нужно добавлять, что наши рассуждения имеют чисто внутренний характер, а поэтому тот же результат верен во всяком многообразии с метрикой положительной кривизны.

В частности, если многоугольник P есть треугольник T, а разбиение Z состоит из него одного, то формула (20) показывает, что площадь треугольника T не меньше площади плоского треугольника со сторонами той же длины.

Теперь легко доказать, что *если многоугольник P разбит на многоугольники $P_1, \ldots, P_k$, то его площадь равна сумме их площадей.* Для доказательства достаточно рассмотреть такие разбиения многоугольника P на треугольники, которые являются одновременно разбиениями многоугольников $P_1, \ldots, P_k$.

После этого можно определить площадь фигуры, составленной из конечного числа многоугольников без общих внутренних точек, как сумму площадей этих многоугольников. Определение площади множеств более общего вида можно провести следующим образом. Площадь открытого множества G принимается равной точной верхней границе площадей множеств, составленных из конечного числа многоугольников и содержащихся в G. Площадь замкнутого множества M принимается равной точной нижней границе площадей множеств, содержащих M, и также составленных из конечного числа многоугольников. Наконец, для произвольного множества M можно определить его внешнюю и внутреннюю меры: первую — как точную нижнюю границу площадей открытых множеств, содержащих M, а вторую — как точную верхнюю границу площадей замкнутых множеств, содержащихся в M. Множество, для которого обе меры совпадают, следует назвать измеримым, и общее значение внешней и внутренней меры принимается за площадь или меру такого множества. Все борелевы множества оказываются измеримыми, и можно доказать, что так определённая площадь или мера вполне аддитивна. Доказательство этих утверждений представляло бы собою повторение известных выводов теории лебеговской меры.

Таким путём мы получили бы внутренне геометрическую теорию меры на выпуклых поверхностях. Однако пройти этот путь в действительности оказывается делом довольно длинным, и потому мы поступим иначе. А именно, мы выведем в следующем параграфе выражение площади в виде обычного двойного интеграла, после чего нужные нам свойства площади (меры) окажутся простыми следствиями известных свойств интеграла. Этот путь, хотя и не будет внутренне геометрическим, но быстрее приведёт к цели, не говоря уже о том, что выражение площади в виде интеграла представляет интерес само по себе.

§ 2. Внешние геометрический смысл площади.

Теорема 1. *Пусть выпуклые поверхности F_n сходятся к выпуклой поверхности F и многоугольники P_n на поверхностях F_n сходятся к многоугольнику P на F, причём числа сторон многоугольников P_n не превосходят некоторого данного числа. Тогда площади многоугольников P_n сходятся к площади многоугольника P.*

Доказательство. Рассмотрим разбиения Z_n многоугольников P_n на треугольники диаметров, меньших данного d. Так как кривизна многоугольника P_n не может превосходить 4π, то по теореме предыдущего параграфа

$$|S(P_n) - S_{Z_n}| \leqslant 2\pi d^2. \tag{1}$$

Так как число сторон многоугольников P_n ограничено, то разбиения Z_n можно взять так, чтобы число треугольников в них оставалось меньше некоторого, хотя бы и очень большого числа. Поэтому из всякой подпоследовательности из многоугольников P_n можно выбрать ещё такую подпоследовательность P_{n_i}, что все треугольники разбиений Z_{n_i} будут сходиться и тем самым дадут в пределе некоторое разбиение Z многоугольника P на треугольники, диаметров также не больших d. Для этого разбиения Z теорема предыдущего параграфа даёт:

$$|S(P) - S_Z| \leqslant 2\pi d^2. \tag{2}$$

Но когда треугольники разбиений Z_{n_i} сходятся к треугольникам разбиения Z, то стороны их тоже сходятся, и, следовательно, площади соответствующих им плоских треугольников тоже сходятся. Поэтому для сумм площадей этих треугольников имеем:

$$S_Z = \lim_{i \to \infty} S_{Z_{n_i}}.$$

Поэтому из неравенств (1) и (2) следует, что

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, S(P_{n_i}) - 2\pi d^2 \leqslant S(P) \leqslant \underline{\lim_{i\to\infty}}\, S(P_{n_i}) + 2\pi d^2.$$

А так как d можно взять сколь угодно малым, то $\lim\limits_{i\to\infty} S(P_{n_i})$ существует и равен $S(P)$. Следовательно, всякая последовательность P_{n_i}, выбранная из многоугольников P_n, содержит подпоследовательность, в которой площади сходятся к площади многоугольника P. Отсюда следует, что площади многоугольников P_n сходятся к площади многоугольника P, что и требовалось доказать.

Если в теореме 1 под поверхностями F_n понимать многогранники, то эта теорема сводится к следующей:

Теорема 2. *Площадь многоугольника P на выпуклой поверхности F равна пределу площадей сходящихся к P многоугольников P_n, расположенных на выпуклых многогранниках, сходящихся к поверхности F, при условии, что число сторон многоугольников P_n остаётся ограниченным.* (Впрочем, это условие, как мы сейчас покажем, является лишним.)

Эта теорема показывает, что данное нами внутреннее определение площади эквивалентно её внешнему определению как предела площадей многогранников, сходящихся к данной поверхности: сам многоугольник P можно рассматривать как поверхность, а многоугольники P_n — как сходящиеся к ней многогранники.

Для того, чтобы исходя отсюда получить выражение площади в виде двойного интеграла, нам понадобится следующая теорема:

Теорема 3. *Проекция на плоскость множества тех точек выпуклой поверхности, в которых она не имеет касательной плоскости, есть множество плоской меры нуль* [1]).

Доказательство. Теорему достаточно доказать для поверхности, не имеющей опорных плоскостей, перпендикулярных к плоскости проекции E. Действительно, всякую полную выпуклую поверхность можно разложить на три части F_1, F_2, F_3, так, что F_3 состоит из точек, в которых имеются опорные плоскости, перпендикулярные к E, а F_1 и F_2 не имеют таких опорных плоскостей и проектируются на E однозначно. Проекция множества F_3 на плоскость E есть выпуклая кривая, ограничивающая проекцию полной поверхности F, и, следовательно, имеет меру нуль.

Пусть выпуклая поверхность F не имеет опорных плоскостей, перпендикулярных к данной плоскости E. Примем эту плоскость за плоскость $z=0$ в прямоугольной системе координат x, y, z; тогда поверхность представится уравнением

$$z = z(x, y).$$

Если в данной точке (x, y) функция $z(x, y)$ имеет обе частные производные z_x, z_y, то поверхность F имеет в соответствующей точке X две касательные прямые. Касательный конус в точке X будет содержать эти прямые, и так как он выпуклый, то он будет плоскостью. Следовательно, поверхность F имеет

---

[1]) Эта теорема впервые доказана Рейдемейстером в 1921 г. K. Reidemeister, Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers. Math. Ann., т. 83 (1921), стр. 116—118.

в точке X касательную плоскость тогда и только тогда, когда функция $z(x, y)$ имеет обе частные производные z_x, z_y.

Так как частные производные z_x, z_y суть пределы непрерывных функций $\frac{z(x+h, y)-z(x, y)}{h}$ и $\frac{z(x, y+h)-z(x, y)}{h}$, то множества M_x и M_y точек (x, y), где они не существуют, измеримы [1]).

Пересечём поверхность F плоскостью $y=c$; в сечении получится выпуклая кривая $z=z(x, c)$. Множество точек, где она не имеет касательной, т. е. где нет производной $z_x(x, c)$, не более чем счётно [2]). Следовательно, каждая прямая $y=c$ пересекает множество M_x не более чем в счётном множестве точек. И так как множество M_x измеримо, то отсюда, как известно, следует, что оно имеет меру нуль. Точно так же множество M_y имеет меру нуль. Множество же тех точек, где нет хотя бы одной из производных z_x, z_y, есть M_x+M_y, и, следовательно, оно также имеет меру нуль. А мы доказали, что это множество как раз и есть проекция множества тех точек поверхности F, где нет касательной плоскости. Теорема, таким образом, доказана.

Теорема 4. *Пусть выпуклая поверхность F представима в прямоугольных координатах уравнением $z=z(x, y)$ и не имеет опорных плоскостей, параллельных оси z. Тогда площадь всякого многоугольника P на поверхности F выражается интегралом*

$$S(P)=\iint\limits_{P'} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy, \tag{3}$$

взятым по проекции P' этого многоугольника на плоскость $z=0$.

Доказательство. Построим последовательность выпуклых многогранников F_n, сходящихся к F, и на этих многогранниках возьмём многоугольники P_n, сходящиеся к P.

Пусть $\varphi(x, y)$ есть угол, образуемый опорной плоскостью поверхности F в точке $(x, y, z(x, y))$ с плоскостью $z=0$, а $\varphi_n(x, y)$ — аналогичный угол для многогранника F_n. Функции $\varphi(x, y)$ и $\varphi_n(x, y)$, вообще говоря, неоднозначны, так как на F и F_n могут быть точки, через которые проходит не одна опорная плоскость. Однако по теореме 3, множество точек, где эти функции неоднозначны, имеет меру нуль, а потому им можно пренебрегать, если функции $\varphi(x, y)$, $\varphi_n(x, y)$ стоят под знаком интеграла.

Так как предел опорных плоскостей к многогранникам F_n есть опорная плоскость поверхности F (лемма 2, § 2 гл. V), то $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x, y)=\varphi(x, y)$ во всех тех точках (x, y), где $\varphi(x, y)$ однозначна, т. е. почти везде. А так

---

[1]) См., например, П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, гл. 8, § 1.

Положим для краткости

$$\frac{1}{h}[z(x+h, y)-z(x, y)]=z_h(x, y).$$

Пусть M_{nm} есть множество тех точек (x, y), для которых выполнено условие: если $|h|\leqslant\frac{1}{m}$ и $|k|\leqslant\frac{1}{m}$, то

$$|z_h(x, y)-z_k(x, y)|<\frac{1}{n}.$$

Легко убедиться, что множество M_{nm} замкнуто. Множество $M=\prod\limits_{n}\sum\limits_{m} M_{nm}$ есть множество тех точек, где существует производная z_x, и оно измеримо; это есть множество типа $F_{\sigma\delta}$.

[2]) Касательная к выпуклой кривой вращается монотонно, и общий поворот её не более 2π. Следовательно, число скачков касательной не более чем счётно.

как поверхность F не имеет вертикальных опорных плоскостей, то $\varphi_n(x, y)$ не приближается к $\frac{\pi}{2}$ ни в каком замкнутом множестве, содержащемся в проекции поверхности F.

Для площади многоугольника P_n на многограннике мы имеем очевидную формулу:

$$S(P_n)=\iint\limits_{P_n'}\frac{dx\,dy}{\cos\varphi_n(x, y)}, \tag{4}$$

где P_n' — проекция P_n на плоскость $z=0$. Когда P_n сходятся к многоугольнику P, то их проекции P_n' сходятся к его проекции P'. Поэтому, если интеграл (4) взять по области P', то ошибка будет стремиться к нулю с ростом n[1]).

С другой стороны, почти везде $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x, y)=\varphi(x, y)$, и так как $\varphi_n(x, y)$ нигде в P' не приближается к $\frac{\pi}{2}$, то функция $\frac{1}{\cos\varphi_n}$ ограничена. Поэтому, на основании известной теоремы о переходе к пределу под знаком интеграла,

$$\lim_{n\to\infty} S(P_n)=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{P_n'}\frac{dx\,dy}{\cos\varphi_n}=\iint\limits_{P'}\frac{dx\,dy}{\cos\varphi}. \tag{5}$$

Но по теореме 1 предел площадей многоугольника P_n есть площадь многоугольника P. Следовательно,

$$S(P)=\iint\limits_{P'}\frac{dx\,dy}{\cos\varphi(x, y)}.$$

А это и есть формула (3), потому что

$$\cos\varphi(x, y)=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\ ^{2)}.$$

Пусть теперь M — такое множество поверхности F, что его проекция M' на плоскость $z=0$ измерима и M не имеет точек, где опорные плоскости образуют с осью z сколь угодно малые углы, так что на M' функция $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$ ограничена. Тогда можно определить площадь множества M формулой:

$$S(M)=\iint\limits_{M'}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy. \tag{6}$$

Это определение, как можно показать, будет совпадать с тем, которое было намечено в конце предыдущего параграфа. Однако, здесь есть некоторое неудобство, состоящее в том, что формула (6) имеет смысл только в том случае, когда множество M не содержит точек, где опорные плоскости образуют с осью z сколь угодно малые углы, и тем более эта формула неприменима, если рассматривать поверхность, не проектирующуюся взаимно однозначно на плоскость $z=0$. Поэтому бывает удобнее пользоваться представлением площади не в прямоугольных, а в сферических координатах. Пусть F есть замкнутая выпуклая поверхность, не вырождающаяся в плоскую область. Возьмём внутри ограниченного ею выпуклого тела точку O и примем её за начало сферических

---

[1]) Конечно, могло бы быть, что проекция F_n не покрывает P', и функция $\varphi_n(x, y)$ тем самым не определена на P', но при больших n это невозможно.

[2]) Представление площади формулой (3) известно уже давно не только для выпуклых, но и для более широкого класса поверхностей. См., например, H. Lebesgue «Intègrale, longuer, aire». Annali di Mat. (3), т. VII (1902), стр. 315.

координат r, ϑ, ψ. Каждой точке поверхности F соотвествует точка (ϑ, ψ) на единичной сфере E с центром в точке O, и поверхность F представляется уравнением $r=r(\vartheta, \psi)$. Совершенно аналогично теореме 3 можно доказать:

Теорема 3*. *Множество точек на сфере E, соответствующих тем точкам поверхности F, где нет касательной плоскости, имеет меру нуль.*

Пусть, далее $\varphi(\vartheta, \psi)$ — угол между нормалью к опорной плоскости поверхности F в точке $(\vartheta, \psi, r(\vartheta, \psi))$ и лучом, идущим из начала O в эту точку. Если поверхность F есть многогранник, то для площади многоугольника P на ней имеет место очевидная формула

$$S(P)=\iint\limits_{P'} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma,$$

где $d\sigma=\sin\vartheta d\vartheta d\psi$ — элемент площади сферы E, а P' — проекция P на сферу E. Эту формулу можно перенести на любые выпуклые поверхности точно так же, как это было сделано выше с формулой (4). Таким путём получаем теорему, аналогичную теореме 4.

Теорема 4*. *Если выпуклая поверхность представляется в сферических координатах уравнением $r=r(\vartheta, \psi)$, то площадь многоугольника P на ней выражается формулой*

$$S(P)=\iint\limits_{P'} \frac{r(\vartheta, \psi)^2}{\cos\varphi(\vartheta, \psi)}\, d\sigma, \tag{7}$$

причём $d\sigma=\sin\vartheta d\vartheta d\psi$, и там, где $\varphi(\vartheta, \psi)$ имеет однозначно определённое значение, т. е. почти везде, $\varphi(\vartheta, \psi)$ есть угол между нормалью и радиусом.

Каждому множеству M на поверхности F отвечает на сфере E его центральная проекция M'. Если множество M' измеримо, то интеграл

$$\iint\limits_{M'} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma \tag{8}$$

существует, и мы можем принять его за площадь $S(M)$ множества M. Это определение совпадает с тем, которое было указано в конце предыдущего параграфа. Действительно, если M — открытое множество, то его можно представить, как сумму возрастающей последовательности «элементарных» множеств $M_1\subset M_2\subset\ldots$, т. е. множеств, составленных каждое из конечного числа многогранников. В таком случае, мера множества $M'-M'_n$ стремится к нулю и потому

$$\iint\limits_{M'} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{M'_n} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma.$$

Следовательно,

$$S(M)=\lim_{n\to\infty} S(M_n),$$

т. е. площадь открытого множества есть точная верхняя граница площадей содержащихся в нём «элементарных» множеств.

Если M замкнуто, то его можно представить как пересечение убывающей последовательности элементарных множеств $M_1\supset M_2\supset\ldots$ Поэтому совершенно аналогично получим, что $S(M)=\lim\limits_{n\to\infty} S(M_n)$, и потому площадь замкнутого множества есть точная нижняя граница площадей содержащихся в нём элементарных множеств.

Пусть теперь M — любое множество на поверхности F с измеримой проекцией M'. Как известно, для всякого измеримого множества M' существует такая последовательность содержащих его открытых множеств M'_n, что мера M' равна пределу мер M'_n. В таком случае

$$\iint\limits_{M'} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{M'_n} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma. \tag{9}$$

Но открытое множество M'_n на сфере E есть проекция некоторого открытого множества на поверхности F. Поэтому из формулы (9) следует, что площадь множества M есть точная нижняя граница площадей содержащих его открытых множеств. Аналогично доказывается, что площадь множества M есть точная верхняя граница площадей содержащихся в нём замкнутых множеств.

Если $M = \sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, где множества M_i не имеют попарно общих точек и имеют определённую площадь, т. е. существуют соответствующие интегралы (8), то

$$\iint\limits_{M'} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \iint\limits_{M'_i} \frac{r^2}{\cos\varphi}\, d\sigma,$$

т. е.

$$S(M) = \sum_{i=1}^{\infty} S(M_i).$$

Это значит, что площадь вполне аддитивна.

Наконец, проекция замкнутого (открытого) множества с поверхности F на сферу E есть замкнутое (открытое) множество на сфере E; проекция суммы (пересечения) множеств есть сумма (пересечение) их проекций на сфере E. Следовательно, проекция борелевского множества на поверхности F есть борелевское множество на сфере E. Поэтому, если M — борелевское множество, то интеграл (8) существует, и тем самым множество имеет площадь.

Итак, все утверждения, высказанные в конце предыдущего параграфа, доказаны. Полученные результаты можно суммировать в виде следующей теоремы:

Теорема 5. *Теория меры на сфере может быть перенесена на любую (невырожденную) замкнутую выпуклую поверхность, что осуществляется путём центрального проектирования этой поверхности на сферу.*

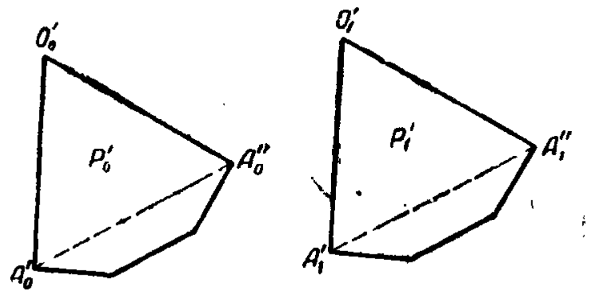
На поверхности же, вырождающейся в дважды покрытую плоскую область, теория меры строится очевидным образом.

§ 3. Экстремальные свойства пирамид и конусов.

Мы займёмся здесь задачами следующего типа: среди всех гомеоморфных кругу выпуклых поверхностей с заданными свойствами ограничивающей кривой найти такую поверхность, которая имеет наибольшую площадь. Например, мы докажем, что среди всех таких поверхностей, имеющих данный периметр, т. е. данную длину ограничивающей кривой, и имеющих также данную кривизну $\omega < 2\pi$, наибольшую площадь имеет боковая поверхность прямого кругового конуса. Если кривизна $\omega = 0$, то этот результат превращается в известную теорему о том, что среди всех плоских областей с данным периметром наибольшую площадь имеет круг. Кривизна выпуклой поверхности, ограниченной замкнутой кривой, выражается через поворот τ этой кривой по формуле $\omega = 2\pi - \tau$, выведенной в § 2 гл. IX; поэтому задание кривизны поверхности эквивалентно заданию поворота ограничивающей кривой, и то условие, что $\omega < 2\pi$, эквивалентно требованию, чтобы поворот τ был положительным. Требование, чтобы кривизна была меньше 2π, необходимо, потому что иначе возможный максимум площади становится бесконечным. Если, например, кривизна конуса, имеющего данный периметр, стремится к 2π, то высота, а вместе с нею и площадь этого конуса безгранично возрастают.

Наши рассуждения будут носить внутренне геометрический характер, и чтобы не прибегать без надобности к теоремам реализуемости, *мы будем понимать под выпуклой поверхностью гомеоморфную кругу область, вырезанную из многообразия с метрикой положительной кривизны.* Аналогично, *под выпуклым многогранником мы будем понимать гомеоморфный кругу многоугольник, вырезанный из многообразия с многогранной метрикой положительной кривизны. Под сторонами и углами многогранника мы будем понимать стороны и углы этого многоугольника.*

Рассматриваемые «многогранники» имеют вершины двух родов: «внешние», лежащие на границе, и «внутренние». С точки зрения внутренней метрики, внешние вершины суть вершины соответствующего многоугольника, а внутренние вершины — это те точки, полный угол вокруг которых меньше 2π.



Черт. 90.

Теорема 1. *Среди всех выпуклых многогранников с данными сторонами и данными углами, меньшими π, наибольшую площадь имеет тот, который содержит всего одну внутреннюю вершину. Он изометричен боковой поверхности пирамиды.*

Доказательство. Пусть P — многогранник с данными сторонами и углами, меньшими π. Допустим, что он содержит по крайней мере две внутренние вершины A и B с кривизнами ω_A и ω_B. Проведём на P кратчайшую линию AB; так как все углы многогранника P меньше π, то она будет представлять геодезическую, проходящую внутри P.

Возьмём два равных плоских треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с основаниями $A_1B_1 = A_2B_2 = AB$ и с углами $\angle A_1 = \angle A_2 = \frac{\omega_A}{2}$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \frac{\omega_B}{2}$. Такие треугольники существуют, потому что кривизна многогранника P меньше 2π, и, следовательно, $\frac{1}{2}\omega_A + \frac{1}{2}\omega_B < \pi$. Разрежем многогранник P по линии AB и подклеим к обеим сторонам разреза наши треугольники так, чтобы их вершины A_1 и A_2 совпали с точкой A, а вершины B_1 и B_2 совпали с точкой B. После этого отождествим сторону A_1C_1 со стороной A_2C_2, а сторону B_1C_1 — со стороной B_2C_2. В результате разрез окажется заклеенным. В точках A и B добавятся по два угла, равных $\frac{\omega_A}{2}$ и $\frac{\omega_B}{2}$, т. е. добавятся как раз такие углы, на сколько полные углы вокруг вершин A и B отличались от 2π. Следовательно, точки A и B перестанут быть вершинами, и вместо них появится только одна вершина C. Вместе с тем, ни стороны, ни углы многогранника P не изменятся, площадь же его увеличится.

Если у многогранника P имеются ещё внутренние вершины, то с ними можно проделать ту же операцию, и так до тех пор, пока не придём к многограннику P_0, имеющему всего одну внутреннюю вершину. Этот многогранник будет иметь те же стороны и углы, но площадь его будет больше, чем у исходного многогранника P. Если мы теперь покажем, что существует только один, с точностью до изометрии, выпуклый многогранник с данными сторонами и углами и с единственной внутренней вершиной, то тем самым будет доказано, что полученный многогранник и есть многогранник с наибольшей площадью.

Пусть P_1 — другой многогранник с одной внутренней вершиной и с такими же сторонами и углами, как у многогранника P_0. Так как углы этих многогранников равны, то равны также их кривизны, а это значит, что равны полные углы вокруг их внутренних вершин.

Возьмём на границах многогранников P_0 и P_1 соответственные вершины A_0 и A_1, соединим их кратчайшими O_0A_0, O_1A_1 с внутренними вершинами O_0 и O_1 этих многогранников, разрежем наши многогранники по этим кратчайшим и развернём их на плоскость. Получатся два многоугольника P_0' и P_1' (черт. 90). Многоугольник P'_0 имеет вершины: O_0', соответствующую O_0, A_0' и A_0'', соответствующие вершине A_0, и ещё вершины, соответствующие другим внешним вершинам многогранника P_0. Ломаная L_0, ограничивавшая P_0, преобразуется в ломаную L_0', которая вместе с двумя отрезками $O_0'A_0' = O_0'A_0'' = O_0A_0$ ограничивает многоугольник P_0'. Аналогичное строение имеет многоугольник P_1'. Ломаные L_0' и L_1' имеют равные стороны и углы, а потому $A_0'A_0'' = A_1'\ A_1''$. Кроме того, углы при вершинах O_0' и O_1' наших многоугольников равны, потому что они равны полным углам вокруг внутренних вершин многогранников P_0 и P_1. Таким образом, равнобедренные треугольники $O_0'A_0'A_0''$ и $O_1'A_1'A_1''$ имеют равные основания и противолежащие углы, а потому их боковые стороны и углы также равны. Следовательно, у многоугольников P_0' и P_1' все стороны и углы равны, так что сами эти многоугольники равны; а это и означает, что многогранники P_0 и P_1 изометричны.

Итак, многогранник P_0 определён однозначно и представляет потому многогранник наибольшей площади. Так как все его углы меньше π, то, согласно доказанному в § 4 гл. IX, он изометричен «шапке», т. е. в данном случае многограннику с плоским краем. Этот многогранник есть, очевидно, боковая поверхность пирамиды.

Полученный результат может быть обобщён:

Теорема 2. *Рассматриваем выпуклые поверхности, ограниченные кривыми со следующими свойствами*: 1) *длины этих кривых равны*, 2) *повороты дуг этих кривых всегда неотрицательны, а полные повороты самих кривых положительны*, 3) *каждые две кривые допускают такое отображение друг на друга с сохранением длин, при котором соответственные дуги имеют равные повороты. Среди всех таких поверхностей наибольшую площадь имеет конус, изометричный боковой поверхности телесного выпуклого конуса.*

Так как поворот ломаной есть сумма дополнений её углов до π, то условие теоремы 1 о том, что углы многогранника меньше π, как раз соответствует условию 2 данной теоремы, а условие равенства углов соответствует условию 3.

В § 4 гл. IX было указано, что поверхность, ограниченная кривой, каждая дуга которой имеет неотрицательный поворот, «выпукла в себе», т. е. каждые две её точки можно соединить кратчайшей, которая не проходит по краю поверхности, если точки не лежат на нём. Однако это утверждение было оставлено без доказательства, а потому в теореме 2 можно прямо потребовать, чтобы рассматриваемые поверхности были выпуклыми в себе. Мы наметим доказательство теоремы 2 именно в этом предположении.

Пусть F — поверхность рассматриваемого типа и L — ограничивающая её кривая. Впишем в L замкнутую ломаную L', и разобьём ограниченный ею многоугольник на малые треугольники и заменим каждый из них плоским треугольником со сторонами той же длины. В результате получится многогранник P, заданный его развёрткой. Он будет удовлетворять условиям теоремы 1, и потому его площадь $S(P)$ будет не больше площади $S(P_0)$ соответствующего многогранника P_0 с единственной внутренней вершиной. Если ломаную L' брать всё более и более близкой к кривой L, а разбиение на треугольники всё более и более мелким, то площадь многогранника P будет стремиться к площади нашей поверхности F:

$$S(F) = \lim S(P). \tag{1}$$

Одновременно с этим многогранники P_0 будут сходиться к некоторому конусу F_0, граничная кривая которого будет иметь такую же длину и такие же повороты дуг, как граничная кривая L поверхности F. (То, что такой конус, с точностью до изометрии, — только один, доказывается буквально так же, как соответствующее утверждение в теореме 1.)

Поэтому $S(F_0) = \lim S(P_0)$, и так как $S(P_0) \geqslant S(P)$, то из (1) следует, что $S(F_0) \geqslant S(F)$, т. е. конус F_0 действительно имеет наибольшую площадь.

Покажем, что вместе с тем никакая другая поверхность рассматриваемого типа не может иметь такой же площади. Пусть F_1 — какая-нибудь такая поверхность. Если она сама не есть конус, то на ней можно найти два выпуклых многоугольника Q_1 и Q_2 без общих точек, имеющих положительные кривизны. Как только что доказано, каждому из многоугольников Q_1, Q_2 соответствует конус, т. е. в данном случае боковая поверхность пирамиды, с теми же сторонами и углами, но имеющая не меньшую площадь. В силу теоремы о склеивании можно многоугольники Q_1, Q_2 вырезать и на их место вклеить соответствующие конусы. После этого произведём разрез по кратчайшей, соединяющей вершины этих конусов, и заклеим разрез двумя равными треугольниками так же, как это было сделано в доказательстве теоремы 1. Площадь поверхности увеличится. Этим доказано, что наибольшую площадь может иметь только конус, а он, как уже было указано, — только один.

Для наших рассуждений, конечно, очень существенно, что поворот каждой дуги граничной кривой не отрицателен: без этого существование кратчайших, соединяющих внутренние вершины и не имеющих общих точек с краем поверхности, не может быть гарантировано. Возникает вопрос: какой результат получится, если отказаться от этого условия, т. е. если искать максимум площади поверхности с заданными не обязательно неотрицательными поворотами дуг граничной кривой? Конечно, поворот всей этой кривой должен быть положителен, потому что иначе кривизна поверхности будет $\geqslant 2\pi$, и тогда, как было показано, существование максимума гарантировать нельзя. Если кривизна $< 2\pi$, то максимум существует, но существование поверхности, реализующей этот максимум, вовсе не очевидно. Было бы интересно исследовать этот вопрос хотя бы в случае многогранников.

Обратимся теперь к задаче: найти среди всех выпуклых поверхностей с данным периметром и данной кривизной $\omega < 2\pi$ такую, которая имеет наибольшую площадь. Здесь никакие условия на повороты дуг граничной кривой уже не накладываются. Как и раньше, решим эту задачу сначала для многогранников. Именно, мы будем рассматривать выпуклые многогранники, подчинённые следующим условиям: 1) число всех вершин у каждого из них не превосходит данного n, 2) периметры их не превосходят данного l, 3) кривизны их не превосходят данного $\omega < 2\pi$. Углы многогранника всегда меньше 2π, но мы присоединим к рассматриваемым многогранникам ещё такие, у которых имеются углы, равные 2π; это соответствует тому, что некоторые соседние стороны могут налегать одна на другую. Присоединение таких предельных случаев делает множество рассматриваемых многогранников замкнутым и упрощает поэтому доказательство существования многогранника наибольшей площади. В данном случае существование такого многогранника не может быть доказано столь же непосредственно, как в теореме 1, однако оно вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Диаметр выпуклого многогранника с периметром l и кривизной ω не превосходит* $\dfrac{2l}{2\pi - \omega} + \dfrac{l}{2}$.

Доказательство. Пусть P — выпуклый многогранник с кривизной ω и периметром l и пусть O — точка внутри него, не являющаяся внутренней вершиной. Проведём из O кратчайшие во все точки границы P. Так как к P присоединяется его граница, то эти кратчайшие существуют, но могут иметь общие точки с границей P. Каждая такая кратчайшая есть геодезическая ломаная с вершинами в тех внешних вершинах P, углы при которых $>\pi$ (теорема 6 § 2 гл. II). Так как геодезическая не может проходить через вершины многогранной метрики, то все внутренние вершины окажутся заключёнными в областях D_i, ограниченных каждая двумя кратчайшими, идущими в одну и ту же точку границы. Вырезав эти области D_i и отождествив пары ограничивающих их кратчайших, мы получим новый многогранник P_1 с единственной внутренней вершиной O. При этой операции полный угол вокруг точки O уменьшится на сумму вырезаемых углов α_i. Каждый вырезанный угол α_i принадлежит одной из областей D_i. Кривизна области D_i выражается формулой

$$\omega(D_i)=\alpha_i+\beta_i+\sum_{p=1}^{k-2}\gamma_i^{(p)}-k\pi, \tag{1}$$

где α_i — угол при O, β_i — угол при конечной точке на границе и $\gamma_i^{(p)}$ — другие углы области D_i, которые могут иметься, если кратчайшие, ограничивающие область D_i, проходят через внешние вершины многоугольника P; наконец, k есть число всех углов области D_i. Все углы $\gamma_i^{(p)}\geqslant\pi$, а потому из (1) следует, что $\omega(D_i)>\alpha_i$.

Так как области D_i содержат все внутренние вершины многоугольника P, то сумма их кривизн равна его кривизне ω и потому

$$\omega(P)=\sum_i\omega(D_i)>\sum_i\alpha_i. \tag{2}$$

Но полный угол θ вокруг вершины O в многоугольнике P есть

$$\theta=2\pi-\sum_i\alpha_i, \tag{3}$$

и, следовательно, он удовлетворяет неравенству

$$\theta>2\pi-\omega(P). \tag{4}$$

Так как многоугольник P_1 содержит только одну вершину O, то, разрезав его по кратчайшей линии, идущей из O до границы, его можно будет развернуть на плоскость. Плоский многоугольник, который при этом получится, имеет при вершине O угол θ и содержит круговой сектор с центром O и радиусом r, равным наименьшему расстоянию от O до границы многоугольника P_1. Длина θr дуги этого сектора не больше длины той ломаной, в которую разворачивается граница P_1, т. е.

$$\theta r<l,$$

а вместе с (4) это даёт:

$$r<\frac{l}{2\pi-\omega}.$$

Так как точка O в многоугольнике P была выбрана произвольно, то тем самым расстояние всякой его точки до границы меньше $\frac{l}{2\pi-\omega}$. Если теперь X и Y — две любые точки из P, а X' и Y' — ближайшие к ним точки границы, то XX' и $YY'<\frac{l}{2\pi-\omega}$ и, очевидно, $X'Y'\leqslant\frac{l}{2}$. Следовательно,

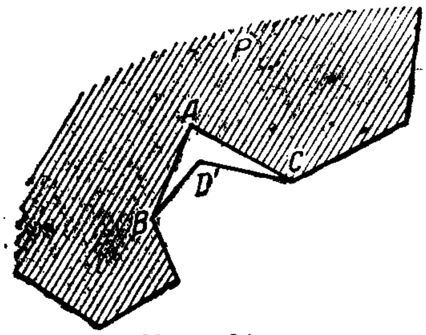
$$XY\leqslant XX'+YY'+X'Y'<\frac{2l}{2\pi-\omega}+\frac{l}{2},$$

что и требовалось доказать [1]).

[1]) Полученная оценка очень неточна. Точная оценка следующая: при $\omega\leqslant\pi$ диаметр $P<\frac{1}{2}l$, при $\omega>\pi$ диаметр $P\leqslant\frac{l}{2\sin\frac{2\pi-\omega}{2}}=\frac{l}{2\sin\frac{\omega}{2}}$.

Лемма 2. *Среди многогранников с ограниченным числом вершин n, периметром l и кривизной, не большей данного $\omega<2\pi$, существует многогранник наибольшей площади.*

Доказательство. Пусть P — данный многогранник. Соединим одну из его внутренних вершин A_1 с прочими внутренними вершинами A_i линиями, кратчайшими в нём. Разрезав P по этим линиям A_1A_i, мы превратим его в многоугольник, не содержащий внутренних вершин и имеющий не более $3n$ внешних вершин (вершина A_1 считается столько раз, сколько сходится в ней линий A_1A_i). Этот многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники, число которых будет не более $3n$ (доказательство — то же, что для леммы 1 § 1, гл. VI). Получается развёртка, задающая многоугольник P. Каждая такая развёртка при данном строении определяется длинами её рёбер. Но число строений развёрток из данного числа треугольников конечно, и длины всех рёбер, согласно лемме 1, ограничены. Следовательно, каждая развёртка, а вместе с нею и многоугольник P задаётся конечным числом переменных, принимающих лишь ограниченные значения. А так как множество рассматриваемых многоугольников замкнуто [1]), то, по принципу Вейерштрасса, среди них существует многоугольник наибольшей площади.



Черт. 91.

Лемма 3. *Если многогранник P с данными периметром и кривизной имеет наибольшую площадь, то все его углы не больше π.*

Доказательство. Допустим, что многоугольник P наибольшей площади имеет углы, равные 2π. Тогда, склеивая отрезки сторон, сходящиеся в вершине с таким углом, мы уменьшили периметр P, не меняя ни числа вершин, ни кривизны, ни площади. Но тогда площадь можно увеличить, сохраняя периметр прежним. Для этого достаточно подклеить к одной из сторон a многоугольника P соответствующий треугольник, одна сторона которого была бы продолжением стороны многоугольника P, смежной с a. Поэтому многоугольник P не может иметь углов, равных 2π.

Допустим, что угол α при вершине A многоугольника P больше π, но меньше 2π. Возьмём плоский четыреугольник $A'B'C'D'$ со сторонами $A'B'=AB$, $A'C'=AC$ и с углом $\alpha'=2\pi-\alpha$ при вершине A' и с углами при B' и C' столь малыми, чтобы их суммы с углами многоугольника β, γ при вершинах B и C были меньше 2π. Такой четыреугольник можно выбрать, конечно, так, что $D'C'+D'B'<A'C'+A'B'=AC+AB$ (черт. 91).

Отождествим стороны AB и AC многоугольника P со сторонами $A'B'$, $A'C'$ нашего четыреугольника. В результате получится новый многоугольник P_1 с меньшим периметром, так как $D'C'+D'B'<AC+AB$. Кривизна его будет та же, потому что полный угол вокруг точки A оказывается равным 2π, так

[1]) Если последовательность многогранников P_m с данным периметром и с числом вершин, не бо́льшим данного, сходится, то предельный многогранник имеет, очевидно, не большее число вершин и тот же периметр. Однако, его кривизна может быть меньше предела кривизн многогранников P_m, потому что в пределе внутренняя вершина может перейти на границу. Кривизна многогранника P_m

$$\omega(P_m)=2\pi-\Sigma(\pi-\alpha_m^{(i)}),$$

где $\alpha_m^{(i)}$ — его углы. Если $\alpha^{(i)}$ — углы предельного многогранника, то по теореме о сходимости углов (теорема 4, § 4, гл. III) $\alpha^{(i)}\leqslant\underline{\lim}_{m\to\infty}\alpha_m^{(i)}$ и, следовательно, $\omega(P)\leqslant\underline{\lim}_{m\to\infty}\omega(P_m)$. Поэтому-то мы рассматриваем многогранники не с данной кривизной, а с кривизной, не большей данного ω.

что новых вершин не появляется. Но площадь многоугольника P_1 будет больше, чем у P, вопреки предположению о том, что P имеет наибольшую площадь.

Теорема 3. *Среди всех выпуклых многогранников с данными числом сторон, периметром и кривизной $\omega < 2\pi$ наибольшую площадь имеет боковая поверхность правильной пирамиды.*

Доказательство. Рассмотрим выпуклые многогранники с числом вершин, не бо́льшим данного n, с периметром l и с кривизной, не большей данного $\omega < 2\pi$. По лемме 2 среди них существует многогранник P с наибольшей площадью, а по лемме 3 этот многогранник не имеет углов $> \pi$. Следовательно, согласно теореме 1, он должен иметь только одну внутреннюю вершину. Нужно показать, что все стороны многогранника P равны и что все его внешние вершины находятся на равном расстоянии от внутренней вершины. Для этого разрежем многогранник P по кратчайшей, соединяющей его внутреннюю вершину O с одной из внешних вершин A, и развернём его на плоскость. Получится многоугольник P', у которого угол при вершине O', соответствующей O, равен полному углу вокруг O, стороны, сходящиеся в вершине O', равны, а другие стороны и вершины соответствуют сторонам и внешним вершинам многогранника P. Нужно показать, что многоугольник с такими данными имеет наибольшую площадь тогда и только тогда, когда все его стороны, противолежащие вершине O', равны, а концы их расположены на равных расстояниях от O'. Это есть задача планиметрии, которую легко решить, пользуясь известными максимальными свойствами равнобедренных треугольников, что мы предоставляем сделать читателю.

Итак, многогранник P изометричен боковой поверхности правильной пирамиды. Так как мы искали максимум среди многогранников с числом вершин, не бо́льшим данного, и с кривизной, не большей данного ω, то ещё неизвестно, не будут ли кривизна и число сторон многогранника P меньше, чем данные их значения. Однако легко видеть, что при данном периметре, с увеличением как кривизны, так и числа сторон, площадь боковой поверхности правильной пирамиды увеличивается. Следовательно, многогранник должен иметь данные кривизну и число вершин.

Этой теореме о многогранниках соответствует следующая теорема о любых выпуклых поверхностях:

Теорема 4. *Среди всех выпуклых поверхностей с данным периметром и с данной кривизной $\omega < 2\pi$ наибольшую площадь имеет боковая поверхность прямого кругового конуса.*

Площадь поверхности кругового конуса с кривизной ω и периметром l равна $\frac{l^2}{2(2\pi-\omega)}$. Поэтому тот же результат можно выразить и так:

Площадь S всякой выпуклой поверхности с периметром l и кривизной $\omega < 2\pi$ удовлетворяет неравенству

$$S \leqslant \frac{l^2}{2(2\pi-\omega)},$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда поверхность изометрична боковой поверхности прямого кругового конуса.

Так как $2\pi - \omega = \tau$ есть поворот границы поверхности, то данное неравенство можно ещё переписать в форме

$$2\tau S \leqslant l^2.$$

Доказательство этой теоремы осуществляется на основании теоремы 3 совершенно так же, как на основании теоремы 1 была доказана теорема 2.

Пользуясь теми же методами, можно решить, например, ещё такую задачу: среди выпуклых поверхностей, ограниченных кратчайшими данной длины и имеющих данную кривизну $\omega < 2\pi$, найти поверхность наибольшей площади.

Ответ получается следующий. Берём на плоскости вписанный в круг многоугольник P со сторонами, равными кратчайшим, ограничивающим рассматриваемые поверхности. Если центр круга лежит в P, то искомая поверхность есть боковая поверхность пирамиды с основанием P и с вершиной, проектирующейся в центр круга. Если же центр круга лежит вне P, то возможны два случая: 1) центральный угол, стягиваемый стороной a, обращённой к центру, больше $\frac{1}{2}(2\pi-\omega)$; 2) этот угол не больше $\frac{1}{2}(2\pi-\omega)$. В первом случае искомая поверхность есть также боковая поверхность пирамиды с основанием P и с вершиной, проектирующейся в центре круга. Во втором случае искомая поверхность получается путём подклеивания к стороне a фигуры, склеенной из двух равнобедренных треугольников с основанием a и противолежащим углом $\frac{1}{2}(2\pi-\omega)$.

Здесь важно, что поверхность ограничена кратчайшими; если же рассматривать поверхность, ограниченную геодезическими данной длины, то ответ будет другой, и прежде всего потому, что предел геодезических может быть не геодезической, а квазигеодезической. У поверхности наибольшей площади одна из ограничивающих геодезических может превратиться в квазигеодезическую.

Применяемый нами метод подклеивания позволяет решать так же задачи об экстремуме не только площади, но и других величин, относящихся к выпуклым поверхностям с теми или иными данными. Например, в уточнение леммы 1 легко доказать такую теорему:

Диаметр d выпуклой поверхности с данным периметром l и кривизной $\omega \leqslant \pi$ не превосходит $\frac{1}{2}l$. Значение $\frac{1}{2}l$ достигается только для предельного случая, когда поверхность вырождается в отрезок длиной $\frac{1}{2}l$. Если же $\pi<\omega<2\pi$, то максимум диаметра будет $\dfrac{l}{2\sin\frac{\omega}{2}}$ и он достигается только для поверхности, составленной из двух прямоугольных треугольников с катетом $\frac{1}{2}l$ и с противолежащим ему углом $\pi-\frac{\omega}{2}$; склеивание треугольников производится по гипотенузе и катету, подходящему к этому углу.

В заключение формулируем ещё одну задачу: среди всех замкнутых выпуклых поверхностей данного диаметра найти поверхность наибольшей площади. Речь идёт о внутреннем диаметре, т. е. наибольшем расстоянии между точками в смысле внутренней метрики. Решение этой задачи, повидимому, неизвестно. Есть основание думать, что ответ даётся поверхностью, представляющей дважды покрытый круг данного диаметра.

ГЛАВА XI.

РОЛЬ УДЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ.

§ 1. Внутренняя геометрия поверхности со всюду определённой гауссовой кривизной.

Всякая область G на выпуклой поверхности имеет определённые кривизну $\omega(G)$ и площадь $S(G)$. Отношение $\frac{\omega(G)}{S(G)}$ естественно назвать удельной кривизной области G; мы будем обозначать его через $\varkappa(G)$. Удельной кривизной в точке X или *гауссовой кривизной* в этой точке будет предел удельных кривизн областей, стягивающихся к точке X. Конечно, в общем случае этот предел не обязан существовать для всякой точки поверхности. Кроме того, рассматриваемые области можно подчинять тем или иным дополнительным условиям, и при одних условиях указанный предел для данной точки X может существовать, в то время как при других условиях он не существует. Можно, например, требовать, чтобы отношение площади области к площади заключающего её геодезического круга с центром в точке X всегда оставалось больше какого-нибудь данного хотя бы сколь угодно малого положительного числа. При этом условии предел удельной кривизны области, стягивающейся в точку, существует на всякой выпуклой поверхности почти везде, т. е. множество тех точек поверхности, где он не существует, имеет меру (площадь) нуль [1]). Если же не подчинять допускаемые последовательности областей, стягивающихся в точку, никаким ограничениям, то предел может не существовать ни в одной точке поверхности. Примером может служить поверхность со всюду плотным множеством конических точек. Действительно, пусть X — данная точка такой поверхности и $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность сходящихся к ней конических точек: кривизны $\omega_1, \omega_2, \ldots$ этих точек положительны. Окружим каждую точку X_n областью G_n, имеющей площадь $S_n < \frac{\omega_n}{n}$; тогда отношение $\frac{\omega_n}{S_n}$ будет больше n и при $n \to \infty$ стремится к бесконечности. Можно добиться того, чтобы все области G_n содержали точку X; для этого достаточно прибавить к каждой из них узкую полоску, содержащую точку X и имеющую площадь, тоже меньшую $\frac{\omega_n}{n}$. Следовательно, ограничение только такими областями, которые содержат данную точку, оказывается вовсе не существенным. Можно указать примеры гладких выпуклых поверхностей, у которых предел удельной кривизны области, стягивающейся в точку, также не существует ни для одной

[1]) Это есть прямое следствие общей теоремы о функциях множества. Для всякой вполне аддитивной функции множества $f(M)$, определённой, например, в плоской области D для всех борелевских множеств M, почти везде существует $\lim\limits_{M \to x} \frac{f(M)}{\operatorname{mes} M}$, если множества M стягиваются в точку M так, что отношение $\operatorname{mes} M$ к площади наименьшего содержащего M круга с центром в X остаётся больше какого-нибудь положительного числа. См. Ш. Ж. де ла Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, гл. III, § 4.

точки, если допускаемые последовательности областей не подчиняются никаким дополнительным условиям.

Мы будем говорить, что *поверхность F имеет в точке X гауссову кривизну, равную K, если предел удельной кривизны области стремится к пределу K, как бы эта область ни стягивалась в точку X*[1]. Мы выясним, какие последствия влечёт за собой существование гауссовой кривизны в каждой точке выпуклой поверхности. Роль гауссовой кривизны во внутренней геометрии регулярных поверхностей хорошо известна, и нас будет потому интересовать вопрос о том, что следует из существования гауссовой кривизны без каких бы то ни было дополнительных предположений регулярности.

Прежде всего, отметим следующее предложение:

Лемма 1. *Если в каждой точке области U на выпуклой поверхности существует гауссова кривизна, то она является непрерывной функцией точки в области U.*

Доказательство. Пусть в точке X гауссова кривизна равна K, а в точках X_n, сходящихся к X, она равна K_n. Для каждой точки X_n найдётся сколь угодно близкая к ней область G_n с удельной кривизной $\varkappa(G_n)$, сколь угодно мало отличающейся от K_n. Поэтому можно взять области G_n так, что 1) $|\varkappa(G_n)-K_n|<\frac{1}{n}$ и 2) область G_n заключена в круге радиуса $\frac{1}{n}$ с центром в точке X_n. Тогда области G_n будут стягиваться к точке X и, следовательно, должно быть

$$\lim_{n\to\infty} \varkappa(G_n)=K.$$

А так как $|\varkappa(G_n)-K_n|<\frac{1}{n}$, то также $\lim\limits_{n\to\infty} K_n=K$, что и требовалось доказать[2].

Теорема 1. *Если в окрестности точки O на выпуклой поверхности удельная кривизна всякой области не превосходит какого-нибудь положительного числа K, то существует такое $r_0>0$, что во всяком направлении из точки O можно провести кратчайшую на длину, не меньшую r_0.*

Доказательство. Зададимся каким-нибудь $r>0$ и построим окружность радиуса r с центром в точке O. Мы предполагаем r столь малым, чтобы эта окружность была замкнутой кривой (ср. теорему 2 § 6 гл. IX). Если двигать точку X по нашей окружности, то кратчайшая OX будет перескакивать через те направления, в которых не исходит кратчайшая длины r. В месте скачка образуется двуугольник D. Его можно рассматривать как треугольник, у которого сумма двух сторон равна третьей. Поэтому площадь плоского треугольника со сторонами той же длины равна нулю, и, следовательно, на основании

---

[1]) Легко доказать, что для существования такого предела для последовательностей любых областей достаточно существования его для последовательностей треугольников.

[2]) Имеет место также в некотором смысле обратное предложение. Если гауссова кривизна, определённая как предел удельных кривизн областей, подчинённых специальным условиям (например, кривизн кругов с центрами в данной точке), существует всюду в области U и непрерывна, то в каждой точке области U существует гауссова кривизна в смысле нашего определения.

Действительно, пусть $K(X)$ есть гауссова кривизна в точке X, определённая при дополнительных условиях. Кривизна области G будет $\omega(G)=\iint\limits_G K(X)\,dS$, и если область G сжимается к точке A, то отношение $\frac{\omega(G)}{S(G)}$ стремится к $K(A)$, поскольку $K(X)$ непрерывна. Следовательно, существование гауссовой кривизны без условий, налагаемых на области, эквивалентно существованию непрерывности гауссовой кривизны с какими-либо условиями, налагаемыми на область.

теоремы, доказанной в § 1 гл. X, для площади двуугольника D имеем неравенство

$$S(D) < \frac{1}{2}\omega(D)\,d^2,$$

где d — диаметр двуугольника D. Поэтому

$$\varkappa(D) = \frac{\omega(D)}{S(D)} > \frac{2}{d^2},$$

и если для всех областей удельная кривизна $\varkappa \leqslant K$, то также $\varkappa(D) \leqslant K$ и, следовательно, двуугольник может получаться только при $d > \frac{2}{\sqrt{K}}$. Но при $r \to 0$ диаметры двуугольников D также стремятся к нулю. Поэтому существует такое r_0, что в каждую точку окружности такого радиуса идёт из центра только одна кратчайшая, так что из O во всех направлениях исходят кратчайшие длины r_0.

Из доказанной теоремы следует, что в окрестности точки O, где удельная кривизна ограничена, можно ввести геодезические полярные координаты. Именно, каждой точке X круга U радиуса r_0 с центром в точке O соответствуют два числа r и φ — расстояние от O и отсчитанный в данном направлении угол между кратчайшей OX и какой-либо фиксированной кратчайшей, исходящей из O. Обратно, каждым двум числам r и φ ($r < r_0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) будет соответствовать точка X с такими координатами.

Пусть в области V на поверхности введены координаты u, v; мы говорим, что в области V *метрика поверхности может быть задана линейным элементом*

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

если длина всякой кривой $u = u(t)$, $v = v(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ проходящей в V, может быть выражена интегралом

$$\int_0^1 \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt$$

(если только производные $\dot{u}$, $\dot{v}$ непрерывны); а расстояние между точками X и Y в V равно точной нижней границе таких интегралов, взятых по кривым, соединяющим точки X и Y. Можно доказать, что в круге U метрика поверхности с ограниченной удельной кривизной может быть задана в координатах r, φ линейным элементом $ds^2 = dr^2 + G\,d\varphi^2$. Однако коэффициент G, вообще говоря, не будет даже непрерывной функцией r и φ. Поэтому этот общий случай представляет мало интереса, и мы займёмся исследованием того случая, когда не только удельная кривизна всякой области ограничена, но в каждой точке круга U существует определённая гауссова кривизна. Для этого докажем сначала одну лемму о равнобедренных треугольниках.

Пусть OAB — равнобедренный треугольник на выпуклой поверхности ($OA = OB$) и пусть X, Y — точки на его боковых сторонах, равноудалённые от вершины O. Допустим, что эти точки всегда можно соединить кратчайшей, проходящей в треугольнике OAB. Если данные точки X и Y можно соединить несколькими кратчайшими, то среди этих кратчайших есть «самая левая», т. е. такая, что в ограниченном ею треугольнике OXY уже нет никакой кратчайшей соединяющей точки X и Y, кроме неё самой. То, что такая кратчайшая существует, легко доказать, основываясь на условии неналегания кратчайших и на том, что предел кратчайших есть кратчайшая. Впрочем, существование самой левой кратчайшей уже было доказано в § 3 гл. VII. Там же было доказано, что если точки X' и Y' сходятся к X и Y слева, т. е. со стороны точки O, то самые левые кратчайшие $X'Y'$ сходятся к самой левой кратчайшей XY. Дальше мы будем рассматривать только самые левые кратчайшие XY.

Лемма 2. *Пусть X и Y — точки, лежащие внутри боковых сторон треугольника OAB на равных расстояниях от O. Положим $OX = OY = r$, $XY = z = z(r)$, и пусть φ — угол треугольника OAB при вершине O, а $\omega(r)$ — кривизна внутренней области треугольника OXY, выделяемого из OAB самой левой кратчайшей XY. Левая производная $\frac{dz}{dr}$ функции $z(r)$ по r существует и может быть представлена формулой*

$$\frac{dz}{dr} = 2(1-\varepsilon)\sin\frac{\varphi-\omega(r)}{2}, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2\sin^2\frac{\omega}{4}.$$

Доказательство. Пусть точки X', Y' на сторонах OA, OB сходятся к данным точкам X и Y слева. Тогда кратчайшие $X'Y'$ сходятся к XY, и потому, если ξ и η, ξ' и η' — углы при вершинах X и Y, X' и Y' в треугольниках OXY и $OX'Y'$, по теореме 5 § 4 гл. IV о сходимости углов

$$\lim \xi' = \xi, \quad \lim \eta' = \eta. \tag{1}$$

С другой стороны, если ξ_0 есть соответствующий ξ угол в плоском треугольнике с такими же сторонами, что и у треугольника XYX', то

$$\lim_{X' \to X} \xi_0 = \xi$$

(это следует, например, из теоремы 5 § 4 гл. III о существовании угла в сильном смысле).

Если положить

$$XX' = \Delta x, \quad XY = z = z(x, y),$$

$$XY' = z' = z(x - \Delta x, y),$$

то

$$z'^2 = z^2 + \Delta x^2 - 2z'\,\Delta x \cos\xi_0$$

или

$$\cos\xi_0 = \frac{z-z'}{\Delta x}\cdot\frac{z+z'}{2z'} + \frac{\Delta x}{2x'},$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и имея в виду, что $\lim \xi_0 = \xi$, получим

$$\cos\xi = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{z(x, y) - z(x - \Delta x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \tag{2}$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}$ — левая частная производная. Совершенно так же получим для левой частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ по y:

$$\cos\eta = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Из формул (1) следует, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны слева, а потому существует левая производная от $z(r, r)$ по r[1]).

$$\frac{dz(r,r)}{dr} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=y=z} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x=y=z} = \cos\xi + \cos\eta.$$

---

[1]) $z(r, r) - z(r - \Delta r, r - \Delta r) = z(r, r) - z(r - \Delta r, r) + z(r - \Delta r, r) - z(r - \Delta r, r - \Delta r) = \int\limits_{r-\Delta r}^{r} \frac{\partial z(x, r)}{\partial x}\,dx + \int\limits_{r-\Delta r}^{r} \frac{\partial z(r - \Delta r, y)}{\partial y}\,dy,$

и так как производные непрерывны слева, то отсюда и следует наше утверждение.

Но $z(r, r)$ есть не что иное, как длина $z(r)$ кратчайшей, соединяющей точки X и Y, равноудалённые от O. Поэтому

$$\frac{dz(r)}{dr}=\cos\xi+\cos\eta=2\cos\frac{\xi+\eta}{2}\cos\frac{\xi-\eta}{2}. \tag{3}$$

Кривизна внутренней области треугольника OXY равна

$$\omega(r)=\xi+\eta+\varphi-\pi,$$

откуда

$$\frac{\xi+\eta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi-\omega(r)}{2},$$

так что

$$\cos\frac{\xi+\eta}{2}=\sin\frac{\varphi-\omega(r)}{2}.$$

Поэтому из (3) следует, что

$$\frac{dz(r)}{dr}=2\cos\frac{\xi-\eta}{2}\sin\frac{\varphi-\omega(r)}{2}=2\left(1-2\sin^2\frac{\xi-\eta}{2}\right)\sin\frac{\varphi-\omega(r)}{2}. \tag{4}$$

Углы ξ, η треугольника OXY отличаются от углов ξ_0, η_0 плоского треугольника с такими же сторонами не более чем на $\omega(r)$:

$$0\leqslant\xi-\xi_0\leqslant\omega(r),\quad 0\leqslant\eta-\eta_0\leqslant\omega(r). \tag{5}$$

А так как треугольник OXY — равнобедренный, то $\xi_0=\eta_0$, и потому из неравенств (5) следует, что

$$|\xi-\eta|\leqslant\omega(r),$$

так что

$$\left|\sin\frac{\xi-\eta}{4}\right|\leqslant\sin\frac{\omega(r)}{4}. \tag{6}$$

Следовательно, формула (4) даёт как раз то выражение для $\frac{\partial z(r)}{dr}$, какое указано в лемме.

Пусть теперь в каждой точке некоторой замкнутой окрестности V точки O на выпуклой поверхности существует гауссова кривизна. По лемме 1 она будет непрерывной функцией точки и, следовательно, ограниченной в замкнутой окрестности V; поэтому, в силу теоремы 1, вокруг точки O можно описать круг U, в котором можно ввести полярные координаты r, φ с началом в точке O.

Теорема 2. *Пусть в круге U, на выпуклой поверхности введены полярные координаты r, φ с центром в точке O и пусть всюду в круге U существует гауссова кривизна $K(r, \varphi)$. Тогда метрика в круге U может быть задана линейным элементом*

$$ds^2=dr^2+G(r, \varphi)\,d\varphi^2, \tag{7}$$

причём коэффициент G является непрерывной функцией r и φ и имеет две непрерывные частные производные по r, а гауссова кривизна $K(r, \varphi)$ выражается через коэффициент G по формуле Гаусса:

$$K(r, \varphi)=-\frac{1}{\sqrt{G(r,\varphi)}}\frac{\partial^2\sqrt{G(r, \varphi)}}{\partial r^2}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $z=z(r, \varphi, \Delta\varphi)$ обозначает расстояние между точками X, Y с координатами r, φ и r, $\varphi+\Delta\varphi$, а $\omega=\omega(r, \varphi, \Delta\varphi)$ — кривизну треугольника OXY. Если $\frac{dz}{dr}$ есть левая производная z по r, то, согласно лемме 2,

$$\frac{dz}{dr}=2(1-\varepsilon)\sin\frac{\Delta\varphi-\omega}{2},$$

где $|\varepsilon| \leqslant 2\sin^2\frac{\omega}{4}$. Интегрируя это равенство, мы получим

$$z(r, \varphi, \Delta\varphi) = 2\int_0^r (1-\varepsilon)\sin\frac{\Delta\varphi-\omega}{2}\,dx. \tag{9}$$

Так как $\omega(x, \varphi, \Delta\varphi)$ не убывает с ростом x, то под интегралом $|\varepsilon| \leqslant 2\sin^2\frac{\omega(r)}{2}$; и так как при $\Delta\varphi \to 0$ также $\omega(r, \varphi, \Delta\varphi) \to 0$, то ε стремится к нулю равномерно. Разделив равенство (9) на $\Delta\varphi$, перейдём к пределу при $\Delta\varphi \to 0$. Тогда, поскольку $\varepsilon \to 0$ и $\lim\limits_{\xi\to 0}\frac{\sin\xi}{\xi} = 1$, мы получим для верхнего и нижнего пределов отношения $\frac{z}{\Delta\varphi}$ выражения

$$\overline{B}(r, \varphi) = \overline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\frac{z(r, \varphi, \Delta\varphi)}{\Delta\varphi} = r - \underline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\int_0^r \frac{\omega(x, \varphi, \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}\,dx, \tag{10a}$$

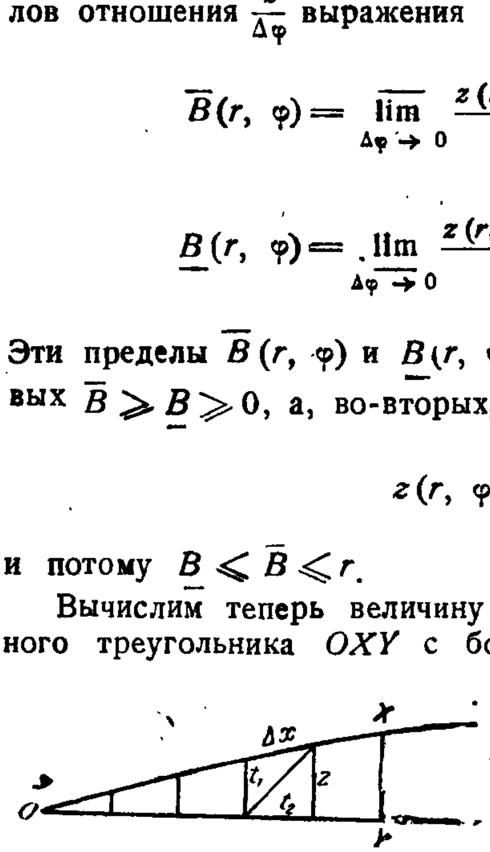
$$\underline{B}(r, \varphi) = \underline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\frac{z(r, \varphi, \Delta\varphi)}{\Delta\varphi} = r - \overline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\int_0^r \frac{\omega(x, \varphi, \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}\,dx. \tag{10b}$$

Эти пределы $\overline{B}(r, \varphi)$ и $\underline{B}(r, \varphi)$ равномерно ограничены, потому что, во-первых $\overline{B} \geqslant \underline{B} \geqslant 0$, а, во-вторых, из (9) следует, что

$$z(r, \varphi, \Delta\varphi) \leqslant 2r\sin\frac{\Delta\varphi}{2} < r\Delta\varphi$$

и потому $\underline{B} \leqslant \overline{B} \leqslant r$.

Вычислим теперь величину $\omega(x, \varphi, \Delta\varphi)$. Это есть кривизна равнобедренного треугольника OXY с боковыми сторонами, равными x, и с углом $\Delta\varphi$ при вершине O. Возьмём на боковых сторонах треугольника OXY ряд точек, равноудалённых от O, и, соединив их попарно, разобьём треугольник OXY на малые четыреугольники (черт. 92). Стороны этих четыреугольников будут Δx и $z(x, \varphi, \Delta\varphi)$. Рассмотрим один из этих четыреугольников q. Если угол $\Delta\varphi$ достаточно мал, то углы четыреугольника q будут близки к прямым, и, следовательно, он разбивается на два «почти прямоугольных» треугольника t_1 и t_2. Так как кривизны этих треугольников малы, то соответствующие плоские треугольники t_1^0 и t_2^0 с такими же сторонами будут тоже «почти прямоугольными», и для их площадей будем иметь:



Черт. 92.

$$S(t_1^0) = \frac{1}{2}z(x, \varphi, \Delta\varphi)\cdot\Delta x\sin\alpha_1,$$

$$S(t_2^0) = \frac{1}{2}z(x+\Delta x, \varphi, \Delta\varphi)\,\Delta x\sin\alpha_2, \tag{11}$$

где углы α_1 и α_2 стремятся к прямым при $\Delta\varphi \to 0$.

По теореме, доказанной в § 1 гл. X, площадь четыреугольника q связана с суммой площадей треугольников t_1^0 и t_2^0 неравенством

$$0 \leqslant S(q) - [S(t_1^0) + S(t_2^0)] \leqslant \frac{1}{2}\omega(q)\,d^2,$$

где d — диаметр треугольников t_1 и t_2. Вводя вместо $\omega(q)$ удельную кривизну $\varkappa(q)=\frac{\omega(q)}{S(q)}$, это неравенство можно переписать так:

$$|S(q)-[S(t_1^0)+S(t_2^0)]|\leqslant\frac{1}{2}\varkappa(q)S(q)d^2. \tag{12}$$

Так как всюду в рассматриваемой области существует гауссова кривизна, то $\varkappa(q)$ ограничено; кроме того, при $\Delta\varphi\to 0$ и $\Delta x\to 0$ также $d\to 0$. Поэтому, сопоставляя формулы (11) и (12), легко видеть, что

$$S(q)=\frac{1}{2}[z(x,\ \varphi,\ \Delta\varphi)+z(x+\Delta x,\ \varphi,\ \Delta\varphi)]\,\Delta x\,(1+\varepsilon), \tag{13}$$

где ε — бесконечно малое вместе с диаметром четыреугольника q, т. е. вместе с $\Delta\varphi$ и Δx.

Кривизна треугольника OXY равна сумме кривизн всех четыреугольников q и, следовательно,

$$\omega(OXY)=\omega(x,\ \varphi,\ \Delta\varphi)=\sum\varkappa(q)\,S(q). \tag{14}$$

Удельная кривизна $\varkappa(q)$ есть не что иное, как среднее значение гауссовой кривизны в четыреугольнике q; а так как гауссова кривизна непрерывна, то среднее её значение в четыреугольнике q равно её значению K_q в одной из его точек. Если, оставляя $\Delta\varphi$ неизменным, брать четыреугольники q всё более и более узкими, то значения K_q будут сходиться к значениям кривизны в некоторых точках на кратчайших $X'Y'$, соединяющих точки на данных радиусах OX, OY, равноудалённые от центра O. Обозначая через $\bar{K}(y,\ \varphi,\ \Delta\varphi)$ это значение кривизны для кратчайшей $X'Y'$, для которой $OX'=OY'=y$, мы получим в пределе вместо формулы (14)

$$\omega(x,\ \varphi,\ \Delta\varphi)=\int_0^x\bar{K}(y,\ \varphi,\ \Delta\varphi)\,z(y,\ \varphi,\ \Delta\varphi)(1+\varepsilon)\,dy, \tag{15}$$

где ε — бесконечно малое вместе с $\Delta\varphi$.

Если взять $\Delta\varphi\to 0$, то кратчайшая $X'Y'$ будет стягиваться в точку X', и значение гауссовой кривизны $\bar{K}(y,\ \varphi,\ \Delta\varphi)$ в некоторой точке на $X'Y'$ будет сходиться к гауссовой кривизне в точке X', потому что гауссова кривизна непрерывна. Поэтому из (15) следует, что

$$\overline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\,\frac{\omega(x,\ \varphi,\ \Delta\varphi)}{\Delta\varphi}=\overline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\,\frac{1}{\Delta\varphi}\int_0^x\bar{K}z(1+\varepsilon)\,dy\leqslant\int_0^x K(y,\ \varphi)\,\overline{\lim_{\Delta\varphi\to 0}}\,\frac{z(y,\ \varphi,\ \Delta\varphi)}{\Delta y}\,dy, \tag{16}$$

где $K(y,\varphi)$ есть значение гауссовой кривизны в точке на данном радиусе OX, удалённой от O на расстояние y. Аналогичная формула получается для нижнего предела.

Воспользовавшись формулой (16) и аналогичной формулой для нижнего предела, мы получим вместо формул (10a) и (10b):

$$\bar{B}(r,\varphi)\leqslant r-\int_0^r\left(\int_0^x K(y,\varphi)\,\underline{B}(y,\varphi)\,dy\right)dx, \tag{17a}$$

$$\underline{B}(r,\varphi)\geqslant r-\int_0^r\left(\int_0^x K(y,\varphi)\,\bar{B}(y,\varphi)\,dy\right)dx. \tag{17b}$$

Поэтому

$$\bar{B}-\underline{B}\leqslant\int_0^r\left(\int_0^x K(\bar{B}-\underline{B})\,dy\right)dx. \tag{18}$$

Это верно при всяком r, и так как кроме того всегда $\overline{B}-\underline{B}\geqslant 0$, то отсюда следует, что $\overline{B}=\underline{B}$ [1]). В силу определения величин $\overline{B}$ и $\underline{B}$ это означает, что при всяком r существует

$$B(r,\varphi)=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{z(r,\varphi,\Delta\varphi)}{\Delta\varphi}. \tag{19}$$

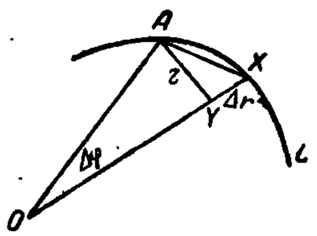
Поэтому неравенства (17a) и (17b) сводятся к такому интегральному уравнению для $B(r,\varphi)$:

$$B(r,\varphi)=r-\int_0^r\left(\int_0^x K(y,\varphi)\,B(y,\varphi)\,dy\right)dx. \tag{20}$$

Так как правая часть этого равенства имеет вторую производную по r, то $B(r,\varphi)$ также её имеет, и, следовательно, уравнение (20) приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 B(r,\varphi)}{\partial r^2}+K(r,\varphi)\,B(r,\varphi)=0. \tag{21}$$

Так как $K(r,\varphi)$ непрерывно зависит не только от r, но и от φ, то $B(r,\varphi)$ также есть непрерывная функция r и φ.



Черт. 93.

Теперь остаётся только доказать, что метрика в рассматриваемом нами круге U может быть задана линейным элементом

$$ds^2=dr^2+B^2(r,\varphi)\,d\varphi^2. \tag{22}$$

Тогда будет ясно, что уравнение (21) и есть гауссово выражение (8) для кривизны $K(r,\varphi)$.

Для доказательства рассмотрим какую-нибудь гладкую кривую L: $r=r(t)$, $\varphi=\varphi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. Возьмём на этой кривой точку $A(r,\varphi)$ и бесконечно близкую к ней точку $X(r+\Delta r,\ \varphi+\Delta\varphi)$ и вычислим длину кратчайшей AX. Для этого возьмём ещё точку Y с координатами $(r,\varphi+\Delta\varphi)$ и рассмотрим треугольник AXY (черт. 93).

Когда $\Delta\varphi\to 0$, то угол при Y в этом треугольнике стремится к прямому, а кривизна треугольника стремится к нулю. Поэтому плоский треугольник со сторонами той же длины будет близок к прямоугольному, так что с точностью до бесконечно малых высшего порядка будем иметь [2]):

$$AX^2\cong AY^2+XY^2. \tag{23}$$

---

[1]) Пусть M и N суть максимумы $|\overline{B}-\underline{B}|$ и K в промежутке $(0, r)$. Тогда при всяком $r'\leqslant r$

$$\overline{B}(r')-\underline{B}(r')\leqslant MN\frac{r^2}{2}.$$

В частности, если $\overline{B}(r')-\underline{B}(r')=M$, то $M\leqslant MN\frac{r^2}{2}$, и если $r^2<\frac{2}{N}$, то $M=0$. Следовательно, $\underline{B}=\overline{B}$ в промежутке от $r=0$ до $r=\frac{2}{\sqrt{\max K}}$. Но дальше равенство $\underline{B}=\overline{B}$ продолжается и за пределы этого промежутка посредством того же рассуждения.

[2]) Здесь, так же как и далее, необходимо внимательное обращение с бесконечно малыми, потому что иначе рискуем получить одну видимость доказательства. Однако провести совершенно строгую оценку порядка пренебрегаемых величин не составляет никакого труда. Например, обозначим через ξ угол треугольника AXY при вершине A. Так как кривая имеет в точке A определённое направление, то существует $\lim\xi=\alpha$. Поэтому предел соответствующего угла ξ_0 в плоском треугольнике с теми же сторонами тоже равен α, и, следовательно,

$$\lim\frac{AY}{AX}=\cos\alpha,\qquad \lim\frac{XY}{AX}=\sin\alpha.$$

Но $XY = \Delta r$, а AY есть не что иное, как $z(r, \varphi, \Delta\varphi)$, и из формулы (19) следует, что, с точностью до бесконечно малых высшего порядка,

$$AY = z(r, \varphi, \Delta\varphi) \cong B(r, \varphi)\,\Delta\varphi.$$

Поэтому, если обозначить длину хорды AX через Δs, то вместо (23) можно написать:

$$\Delta s^2 \cong \Delta r^2 + B^2(r, \varphi)\,\Delta\varphi^2. \tag{24}$$

А так как длина кривой L есть предел сумм длин хорд, образующих вписанную ломаную, то отсюда, очевидно, следует, что длина кривой L представляется формулой

$$s(L) = \int_L \sqrt{dr^2 + B^2 d\varphi^2} = \int_0^1 \sqrt{\dot r^2 + B^2\dot\varphi^2}\,dt.$$

Следовательно, в рассматриваемом круге метрика поверхности действительно задаётся линейным элементом $ds^2 = dr^2 + B^2 d\varphi^2$, и тем самым наша теорема полностью доказана.

Эта теорема показывает, что один факт существования гауссовой кривизны до известной степени обеспечивает возможность применения методов классической дифференциальной геометрии; однако — только до известной степени, потому что, например, мы вовсе не доказали, что коэффициент $B(r, \varphi)$ имеет хотя бы первую производную по φ, и на самом деле он может даже нигде её не иметь [1]. А обычное выражение для геодезической кривизны кривой содержит эту производную. Поэтому, казалось бы, это выражение становится неприменимым и, например, дифференциальное уравнение геодезических, получающееся приравниванием геодезической кривизны нулю, вовсе не может быть написано. Однако можно придать выражению для геодезической кривизны такую форму, что оно не будет содержать $\frac{\partial B}{\partial\varphi}$ явно. Именно, можно доказать следующее:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть $\varphi = \varphi(r)$ — уравнение кривой в полярных геодезических координатах. Если в точке A эта кривая имеет геодезическую кривизну k (производную от поворота по длине дуги), то*

$$k = \frac{(B\varphi')' + [1 + (B\varphi')^2]\left(1 + \frac{\partial B}{\partial r}\right)\varphi'}{[1 + (B\varphi')^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{25}$$

причём производная $(B\varphi')' = \frac{d}{dr}[(B(r, \varphi(r))\,\varphi'(r)]$ существует.

Доказательство. Пусть A — данная и X — переменная точки на кривой. Так как при рассматриваемых условиях кратчайшие исходят из каждой точки во всех направлениях, то в точках A и X можно провести кратчайшие, касательные к нашей кривой, и если точка X близка к A, то эти касательные

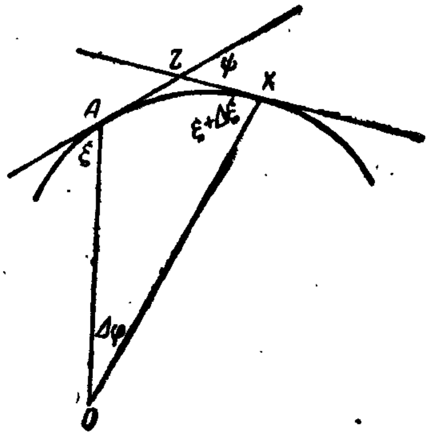
Возводя в квадраты и складывая, получим

$$\lim \frac{AY^2 + XY^2}{AX^2} = 1,$$

что и есть (23).

[1]) Пусть, например, в кольце $r_1 < r < r_2$ кривизна $K(r, \varphi) = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — непрерывная положительная функция, нигде не имеющая производной. Тогда, решая уравнение (21), получим в этом кольце $B(r, \varphi) = C_1 \cos\sqrt{f(\varphi)}\cdot r + C_2 \sin\sqrt{f(\varphi)}\cdot r$, так что $B(r, \varphi)$ нигде не имеет производной по φ. Легко доказать, что линейный элемент $ds^2 = dr^2 + B^2(r, \varphi)\,d\varphi^2$ с таким B действительно определяет в кольце $r_1 < r < r_2$ метрику положительной кривизны (достаточно рассмотреть аналитически $f_n(\varphi) \to f(\varphi)$).

пересекутся (черт. 94). Если ψ — угол между ними, а τ — поворот дуги AX, то кривизна ω области, заключённой между дугой и касательными, будет $\psi - \tau$, и так как ω стремится к нулю, как площадь этой области (т. е. быстрее, чем квадрат дуги s), то $\lim\limits_{x\to A}\frac{\tau}{s} = \lim\limits_{x\to A}\frac{\psi}{s}$. Следовательно, геодезическую кривизну можно в данном случае определить так же, как это делается для кривых на плоскости.



Черт. 94.

Если ξ и $\xi + \Delta\xi$ — углы между радиусами OA, OX и касательными в точках A и X, а $\Delta\varphi$ — угол между OA и OX, то для кривизны четыреугольника $OXZA$ имеем:

$$\Delta\omega = \xi + \Delta\xi + \Delta\varphi + (\pi - \psi) + (\pi - \xi) - 2\pi = \\ = \Delta\varphi + \Delta\xi - \psi.$$

Отсюда следует, что

$$k = \lim_{x\to A}\frac{\psi}{s} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\xi}{ds} - \frac{d\omega}{ds}, \tag{26}$$

причём если k, $\frac{d\varphi}{ds}$ и $\frac{d\omega}{ds}$ существуют, то $\frac{d\xi}{ds}$ также существует.

Если K есть гауссова кривизна, то для $\Delta\omega$ имеем

$$\Delta\omega = \iint\limits_{(OXZA)} K dS \cong \Delta\varphi \cdot \int_0^r KB\,dr,$$

где последнее равенство выполняется, конечно, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка. А в силу уравнения Гаусса $B''_{rr} + KB = 0$ получим

$$\Delta\omega \cong -\frac{\partial B}{\partial r}\cdot\Delta\varphi.$$

Следовательно, производная $\frac{d\omega}{ds}$ существует и равна

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dr}\cdot\frac{dr}{ds} = -\frac{\partial B}{\partial r}\cdot\varphi'\cdot\frac{1}{[1+(B\varphi')^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{27}$$

Для угла ξ легко вывести обычное выражение

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{Bd\varphi}{dr} = B\varphi',$$

откуда

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{d\xi}{dr}\cdot\frac{dr}{ds} = \frac{(B\varphi')'}{[1+(B\varphi')^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{28}$$

причём $(B\varphi')'$ существует, поскольку существует $\frac{d\xi}{ds}$.

Подставляя (27) и (28) в (26), получаем формулу (25).

Можно доказать, что *на выпуклой поверхности со всюду определённой гауссовой кривизной всякая линия нулевой геодезической кривизны будет геодезической, т. е. кратчайшей на малых отрезках.* Обратное же, как нам известно, всегда имеет место. Поэтому, приравнивая выражение (25) для геодезической кривизны нулю, мы получим дифференциальное уравнение геодезических. Если положить $B\varphi' = \vartheta$, то оно приводится к системе

$$\varphi' = \frac{\vartheta}{B(r,\varphi)}, \quad \vartheta' = -(1+\vartheta^2)\left(1 + \frac{\partial B(r,\varphi)}{\partial r}\right)\frac{\vartheta}{B(r,\varphi)}.$$

В наших выводах мы пользовались полярными координатами, но ничто не мешает ввести любые другие так называемые полугеодезические координаты u, v, в которых координата u есть длина дуги геодезической. Именно, можно взять в круге U кратчайшую L и провести через все её точки перпендикулярные к ней кратчайшие. Легко доказать, что при условии ограниченности удельной кривизны это возможно сделать и что проведённые таким образом кратчайшие не будут пересекаться в некоторой окрестности кратчайшей L. В этой окрестности можно ввести в качестве координаты u точки X её расстояние от L, а в качестве v — длину дуги кратчайшей L от некоторой начальной точки до основания геодезического перпендикуляра, опущенного из точки X на L. В таких координатах метрика рассматриваемой окрестности задаётся линейным элементом $ds^2 = du^2 + B^2dv^2$, причём $B(u, v)$ непрерывно и $B_{uu} + KB = 0$, где K — гауссова кривизна. Доказательство этого будет повторять доказательство теоремы 2. Вместо кратчайшей, в качестве линии L $(u = 0)$ можно взять любую кривую с непрерывной геодезической кривизной, и результат останется тот же самый.

§ 2. Внутренняя геометрия поверхности с ограниченной удельной кривизной.

Будем говорить, что на поверхности F удельная кривизна $> K (< K, = K)$, если для всякой области на поверхности F она $> K (< K, = K)$.

Теорема 1. *Если на поверхности F удельная кривизна равна K, то каждая точка поверхности F имеет окрестность, изометричную части сферы S_K радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Если поверхность F — замкнутая, то она в целом изометрична этой сфере (и даже равна ей).*

Доказательство. Если удельные кривизны на поверхности F равны K, то, очевидно, гауссова кривизна всюду существует и равна K. Поэтому, согласно доказанному в предыдущем параграфе, в окрестности всякой точки поверхности F можно ввести полярные координаты r, φ и задать метрику поверхности линейным элементом $ds^2 = dr^2 + B^2 d\varphi^2$, где

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + KB = 0.$$

А так как K постоянно и $B(0, \varphi) = 0$, $B'_r(0, \varphi) = 1$ (что само по себе геометрически очевидно и следует также из формулы (20) предыдущего параграфа), то

$$B(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} r,$$

и элемент ds оказывается линейным элементом сферы радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Этим первая часть теоремы доказана.

Пусть поверхность F — замкнутая. Возьмём на ней точку O и малый круг с центром в O отобразим изометрически на сферу S_K радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Легко показать, что этот круг всегда ещё можно расширить так, что расширенный круг тоже будет изометрически отображаться на сферу S_K, и так до тех пор, пока этот круг не покроет всю поверхность F, а его образ не покроет всю сферу S_K. Этим будет доказано, что поверхность F изометрична сфере S_K. (Доказательство того, что поверхность F сама есть сфера, было намечено в § 5 гл. VIII. Впрочем, это замечание не имеет значения, если речь идёт лишь о внутренней геометрии.)

Если на какой-нибудь выпуклой поверхности удельная кривизна заключена между некоторыми границами K_1 и K_2, то внутренняя геометрия этой поверхности оказывается в известном смысле промежуточной между внутренними геометриями сфер радиусов $\frac{1}{\sqrt{K_1}}$ и $\frac{1}{\sqrt{K_2}}$. Мы приведём здесь ряд теорем, которые выясняют более точный смысл этого утверждения.

Теорема 2. *Если на выпуклой поверхности F удельная кривизна ограничена сверху, то, как было доказано в предыдущем параграфе, в окрестности всякой точки на F можно ввести полярные геодезические координаты r, φ. Пусть в такой окрестности U удельная кривизна $\geqslant K_1$ и $\leqslant K_2$. Введём на сфере S_{K_i} $(i=1, 2)$ полярные геодезические координаты и каждой точке окрестности U с координатами r, φ сопоставим точку сферы S_{K_i} с такими же координатами. Тогда, если наше отображение ставит в соответствие кривой L на поверхности F кривые L_1 и L_2 на сферах S_{K_1} и S_{K_2}, то длины этих кривых связаны неравенствами*

$$s(L_1) \geqslant s(L) \geqslant s(L_2).$$

На сфере радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$ всякая геодезическая является кратчайшей на отрезке длины $\leqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ и, напротив, не является кратчайшей на отрезке длины $> \frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Для геодезической на выпуклой поверхности имеют место аналогичные оценки в зависимости от границ удельной кривизны; эти оценки были найдены Боннэ для геодезических на регулярных поверхностях [1]); следующая теорема представляет распространение этих оценок Боннэ на выпуклые поверхности, не подчинённые никаким лишним условиям регулярности:

Теорема 3. *Если в окрестности геодезической L на выпуклой поверхности удельная кривизна $\leqslant K$, то всякая дуга геодезической L, имеющая длину, меньшую $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, будет кратчайшей в сравнении со всеми достаточно близкими к ней линиями* [2]). *Если же в окрестности L удельная кривизна $\geqslant K$, то всякая дуга этой геодезической, имеющая длину, бо́льшую $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, не будет кратчайшей в сравнении со сколь угодно близкими к ней линиями.*

Приведём ещё две теоремы, касающиеся треугольников. В этих теоремах T обозначает треугольник на некоторой выпуклой поверхности, а T_K — треугольник на сфере S_K радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, имеющий стороны той же длины и целиком содержащийся в полусфере. При этом предполагается, что длины сторон треугольника T меньше $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, так что треугольник T заведомо существует.

Теорема 4. *Если в треугольнике T удельная кривизна $\geqslant K$ $(\leqslant K)$, то его углы не меньше (не больше) соответствующих углов треугольника T_K.*

Если же, кроме того, угол хотя бы при одной из вершин A треугольника $T = ABC$ равен соответствующему углу треугольника T_K, то либо треугольник T изометричен треугольнику T_K, либо в треугольнике T можно провести кратчайшую, соединяющую две другие его вершины B и C так, что она отсечёт от T треугольник, изометричный T_K. Последнее возможно только в том случае, когда удельная кривизна в треугольнике $\geqslant K$.

---

[1]) См., например, В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 100.

[2]) Стоит отметить что, если на полной выпуклой поверхности удельная кривизна $\leqslant K$, то всякий отрезок геодезической длины, меньшей $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, будет кратчайшей не только в сравнении с близкими линиями, а вообще.

Теорема 5. *Если в треугольнике T удельная кривизна $\geqslant K$ ($\leqslant K$), то площадь треугольника T не меньше (не больше) площади треугольника T_K.*

Для разности площадей $S(T)-S(T_K)$ треугольников T и T_K можно дать оценки, аналогичные оценке, полученной в § 1 гл. X для разности $S(T)-S(T_0)$:

Если в T удельная кривизна $\geqslant K$, то

$$0 \leqslant S(T)-S(T_K) \leqslant \frac{1}{2}[\omega(T)-\omega(T_K)]\, d^2, \tag{1}$$

а если в T удельная кривизна $\leqslant K$, то

$$0 \geqslant S(T)-S(T_K) \geqslant \frac{1}{2}[\omega(T)-\omega(T_K)]\, d^2. \tag{2}$$

Здесь d — диаметр треугольника T, ω — кривизна, причём, конечно, $\omega(T_K) = KS(T_K)$. Оказывается при этом, что если хотя бы в одной из частей формул (1), (2) стоит знак равенства, то треугольники T и T_K изометричны.

Укажем ещё одну теорему, которая легко может быть выведена из теоремы 4, и вместе с тем, очевидно, содержит в себе теорему 4.

Пусть L и M — две кратчайшие, исходящие из точки O в каком-либо многообразии R с метрикой ρ. Пусть X, Y — переменные точки на L и M, $OX=x$, $OY=y$, $XY=z$ и $\gamma_K(x, y)$ — угол в треугольнике со сторонами x, y, z, лежащий против стороны z, на сфере S_K радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Будем говорить, что метрика ρ удовлетворяет условию K-выпуклости или является K-выпуклой (выпуклость относительно метрики постоянной кривизны K), если для всяких L и M $\gamma_K(x, y)$ есть невозрастающая функция во всяком таком интервале $0<x<x_0$, $0<y<y_0$, в котором существует кратчайшая XY. Будем также говорить, что метрика удовлетворяет условию K-вогнутости, или является K-вогнутой, если $\gamma_K(x, y)$ оказывается неубывающей функцией x и y в таком же интервале. При $K=0$ условие K-выпуклости сводится к условию выпуклости, которому, как доказано в гл. III, удовлетворяет метрика всякой выпуклой поверхности. Относительно K-выпуклости и K-вогнутости имеет место следующая те рема:

Теорема 6. *Если на выпуклой поверхности F удельная кривизна $\geqslant K$ ($\leqslant K$), то на F выполняется условие K-выпуклости (K-вогнутости).*

Заметим ещё, что теоремы 2, 4, 6 дают условия не только необходимые, но и достаточные для того, чтобы удельная кривизна поверхности F подчинялась соответствующим ограничениям. При этом, конечно, результат теоремы 2 должен иметь место для окрестности всякой точки поверхности F, а результат теоремы 4 — для всех треугольников на F. Вероятно, теорема 5 также даёт условие не только необходимое, но и достаточное для соответствующих ограничений удельной кривизны. Однако мы не знаем, как это доказать.

Недостаток места не позволяет нам изложить исчерпывающие доказательства формулированных выше теорем 2 — 6. Мы дадим здесь т лько их основу и докажем полностью лишь теоремы 2 и 3. Границы удельной кривизны мы будем считать положительными, потому что иначе сфера S_K сводится к плоскости, и тогда наши теоремы сводятся к сравнению метрики выпуклой поверхности с метрикой плоскости, которыми мы занимались на протяжении большей части предшествующего изложения.

Лемма 1. *Пусть на выпуклой поверхности F удельная кривизна $\geqslant K$. Тогда для всякого $K'<K$ ($K'>0$) существует такое d, что у всякого треугольника T на поверхности F, имеющего диаметр, меньший d, сумма углов больше суммы углов треугольника $T_{K'}$ со сторонами той же длины на сфере $S_{K'}$ радиуса $\frac{1}{\sqrt{K'}}$.*

Так как на поверхности F удельная кривизна $\geqslant K$, то для всякого треугольника T с углами α, β, γ и площадью $S(T)$ имеем:

$$\omega(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi \geqslant KS(T). \tag{3}$$

Пусть T_0 и T_K — треугольники со сторонами той же длины на плоскости и на сфере S_K. Согласно лемме 1 § 1 гл. X

$$S(T_0) \leqslant S(T),$$

и вместе с тем

$$S(T_0) \geqslant S(T_K) - \frac{1}{2}\omega(T_K)d^2 = S(T_K)\left(1 - \frac{1}{2}Kd^2\right).$$

В силу обоих этих неравенств из (3) следует, что

$$\omega(T) \geqslant K\left(1 - \frac{1}{2}Kd^2\right)S(T_K). \tag{4}$$

Задав $K' < K$, выберем d_0 так, что

$$K' = K\left(1 - \frac{1}{2}Kd_0^2\right).$$

Тогда в силу (4) для всякого треугольника диаметра $d \leqslant d_0$

$$\omega(T) \geqslant K'S(T_K). \tag{5}$$

Легко доказать, что при уменьшении кривизны сферы площадь сферического треугольника, имеющего стороны данной длины, убывает[1]). Поэтому $S(T_K) > S(T_{K'})$ и, следовательно, из (5) вытекает, что

$$\omega(T) > K'S(T_{K'}) = \omega(T_{K'}),$$

т. е.

$$\alpha + \beta + \gamma > \alpha_{K'} + \beta_{K'} + \gamma_{K'}, \tag{6}$$

где α, β, γ и $\alpha_{K'}$, $\beta_{K'}$, $\gamma_{K'}$ — углы треугольников T и $T_{K'}$. Этим лемма доказана.

Аналогичная лемма для поверхности, на которой удельная кривизна $\leqslant K$, получается простой заменой знака «больше» на знак «меньше».

Лемма 2. *Если на выпуклой поверхности для всякого треугольника диаметра $< d_0$ имеет место неравенство* (6), *то каждый угол выпуклого треугольника T диаметра $< d_0$ больше соответствующего угла треугольника $T_{K'}$, т. е. из* (6) *следует, что $\alpha > \alpha_{K'}$, $\beta > \beta_{K'}$, $\gamma > \gamma_{K'}$.*

Пусть ABC — выпуклый треугольник диаметра $< d_0$, а $A_0B_0C_0$ — треугольник со сторонами той же длины на сфере $S_{K'}$. Допустим, что, вопреки доказываемому, $\alpha \leqslant \alpha_{K'}$, и докажем, что это невозможно.

Если в треугольнике ABC вершины B и C можно соединить ещё другой кратчайшей, помимо стороны BC, то возьмём самую левую из них, т. е. ту, которая отсекает треугольник, не содержащий других таких кратчайших.

---

[1]) Можно обойтись, конечно, и без ссылки на то, что $S(T_K) > S(T_{K'})$ при $K > K'$. Действительно, так как $|S(T_0) - S(T_K)| \leqslant \frac{1}{2}\omega(T_K)\,d^2$, то при близких значениях K_1 и K_2 площади $S(T_{K_1})$ и $S(T_{K_2})$ мало отличаются друг от друга, и потому можно выбрать K'' так, что $K > K'' > K'$ и $K'S(T_K) \geqslant K''S(T_{K''})$, а тогда из (5) следует:

$$\omega(T) \geqslant K''S(T_{K''}) = \omega(T_{K''}).$$

Вместо исходного треугольника ABC будем рассматривать именно этот треугольник ABC.

Так как для треугольника ABC выполняется неравенство (6) и, по предположению, $\alpha \leqslant \alpha_{K'}$, то либо $\beta > \beta_{K'}$, либо $\gamma > \gamma_{K'}$. Допустим, что $\beta > \beta_{K'}$.

Возьмём на стороне AB переменную точку X (черт. 95). Тогда по теореме о существовании угла в сильном смысле [1])

$$\cos\beta = \lim_{X \to B} \frac{CB - CX}{BX}. \tag{7}$$

Если X_0 — переменная точка на стороне A_0B_0 треугольника $A_0B_0C_0$, то

$$\cos\beta_{K'} = \lim_{X_0 \to B_0} \frac{C_0B_0 - C_0X_0}{B_0X_0}. \tag{8}$$

Так как $\beta > \beta_{K'}$, то $\cos\beta < \cos\beta_{K'}$, и потому из (7) и (8) следует, что при достаточно малых BX и B_0X_0

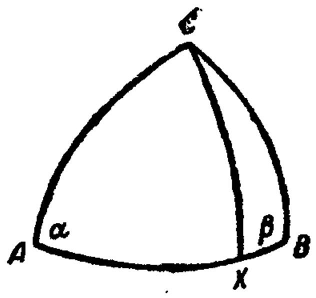
$$\frac{CB - CX}{BX} < \frac{C_0B_0 - C_0X_0}{B_0X_0}.$$

Но, по построению треугольника $A_0B_0C_0$, $C_0B_0 = CB$, так что если

$$BX = B_0X_0, \tag{9}$$

то

$$CX > C_0X_0. \tag{10}$$



Черт. 95.

Итак, мы можем выбрать точку X так, что будут выполняться соотношения (9) и (10).

Рассмотрим треугольник ACX и $A_0C_0X_0$. Треугольник ACX — выпуклый, потому что он отсекается кратчайшей CX от выпуклого треугольника ABC; диаметр его также $< d_0$, а угол его при вершине A есть тоже α. Стороны треугольника $A_0C_0X_0$ связаны со сторонами треугольника ACX соотношениями

$$A_0C_0 = AC, \quad A_0X_0 = AX, \quad C_0X_0 < CX. \tag{11}$$

Угол при вершине A_0 в треугольнике $A_0C_0X_0$ равен $\alpha_{K'}$. Если же построить на сфере $S_{K'}$ треугольник $A_0C_0X_0^1$ со сторонами, равными AC, AX, CX, то, в силу (11), угол $\alpha_{K'}^{(1)}$ при его вершине A_0 будет больше $\alpha_{K'}$:

$$\alpha_{K'}^{(1)} > \alpha_{K'}. \tag{12}$$

А так как, по предположению, $\alpha_{K'} \geqslant \alpha$, то $\alpha_{K'}^{(1)} > \alpha$. Положим

$$\alpha_{K'}^{(1)} - \alpha = \varepsilon. \tag{13}$$

Поскольку треугольник ACX мал, для него выполняется соотношение (6) и, кроме того, $\alpha_{K'}^{(1)} > \alpha$. Следовательно, *для треугольника ACX имеет место то же положение, какое имелось для треугольника ABC, и к нему можно приложить то же самое рассуждение*, т. е. у треугольника ACX хотя бы один из углов $\angle C$ и $\angle X$ больше соответственного угла $\angle C_0$ или $\angle X_0^1$ треугольника $A_0C_0X_0^1$. Если, например, $\angle C > \angle C_0$, то, применяя приведённое выше рассу-

---

[1]) Если β_0 — угол в плоском треугольнике со сторонами CB, CX и BX, то $CX^2 = CB^2 + BX^2 - 2\,CB \cdot BX \cdot \cos\beta_0$, откуда $\cos\beta_0 = \frac{CB - CX}{BX} \cdot \frac{CB + CX}{2CB} + \frac{BX}{2CB}$, а по теореме о существовании угла в сильном смысле $\lim\limits_{X \to A} \cos\beta_0 = \cos\beta$. Так как, очевидно, $\frac{CB + CX}{2CB} \to 1$ и $\frac{BX}{2CB} \to 0$, то и получаем (7).

ждение, мы найдём на AC точку Y такую, что аналогично (12) у треугольника $A_0Y_0^1X_0^1$ (на сфере $S_{K'}$) со сторонами, равными сторонам треугольника AYX, угол $\alpha_{K'}^{(2)} > \alpha_{K'}^{(1)}$. Поэтому из (13) будет следовать, что

$$\alpha_{K'}^{(2)} - \alpha > \varepsilon. \tag{14}$$

Это рассуждение можно продолжать, беря всё новые и новые точки X и Y на сторонах AB и AC, лежащие всё ближе и ближе к A.

Рассмотрим теперь множество M всех треугольников AXY, обладающих следующими свойствами:

1) Вершины X, Y лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC и треугольник AXY — выпуклый, содержащийся в ABC.

2) Если $AX = x$, $AY = y$ и $\alpha_{K'}(x, y)$ — угол при вершине A_0 в треугольнике $A_0X_0Y_0$ на сфере $S_{K'}$, имеющем те же стороны, что и AXY, то $\alpha_{K'}(x, y) \geqslant \alpha + \varepsilon$.

Проведённое нами рассуждение показывает, что множество M не пусто и обладает следующим свойством:

(I) Для каждого треугольника AXY из M существует в M треугольник $AX'Y'$ такой, что $AX' \leqslant AX$, $AY' \leqslant AY'$ и хотя бы в одном из этих соотношений имеет место знак «меньше».

Докажем, что множество M обладает также следующим свойством:

(II) Если последовательность треугольников AX^nY^n из M сходится, причём точки X^n, Y^n не сходятся к A, то предельный треугольник AXY также принадлежит множеству M.

Действительно, треугольник AXY будет выпуклым, как предел выпуклых треугольников[1]); вершины X, Y будут лежать на AB и AC. Вместе с тем длины сторон треугольников AX^nY^n сходятся к длинам сторон треугольника AXY, а потому углы $\alpha_{K'}(x^n, y^n)$ соответствующих сферических треугольников сходятся к $\alpha_{K'}(x, y)$. А так как $\alpha_{K'}(x^n, y^n) \geqslant \alpha + \varepsilon$, то также $\alpha_{K'}(x, y) \geqslant \alpha + \varepsilon$. Следовательно, треугольник AXY принадлежит M.

Из свойств (I), (II) множества M вытекает:

(III) В множестве M имеются треугольники, у которых хотя бы одна из вершин X или Y сколь угодно близка к A. Иными словами, в множестве чисел $x = AX$, $y = AY$ содержатся числа, сколь угодно близкие к нулю.

Действительно, из (I) следует, что для каждой пары x, y есть такая пара x', y', что $x'y' < xy$, а из (II) следует, что если $x^n \to x$ и $y^n \to y$ и пары x^n, y^n принадлежат рассматриваемому множеству, то пара x, y тоже ему принадлежит, если только $xy \neq 0$. Отсюда ясно, что точная нижняя граница произведений xy равна нулю, т. е. среди чисел x и y имеются сколь угодно близкие к нулю.

Вспомним теперь определение угла в сильном смысле и приложим его к углу α. По этому определению α есть предел углов $\gamma(x, y)$ в плоских треугольниках $A_0X_0Y_0$ при условии, что $xy \to 0$, где $x = AX = A_0X_0$, $y = AY = A_0Y_0$. Но у такого плоского треугольника углы мало отличаются от углов сферического треугольника с теми же сторонами, и потому

$$\alpha = \lim_{xy \to 0} \alpha_{K'}(x, y). \tag{15}$$

Но для треугольников AXY из множества M имеем: $\alpha_{K'}(x, y) \geqslant \alpha + \varepsilon$, и потому

$$\lim_{xy \to 0} \alpha_{K'}(x, y) \geqslant \alpha + \varepsilon$$

---

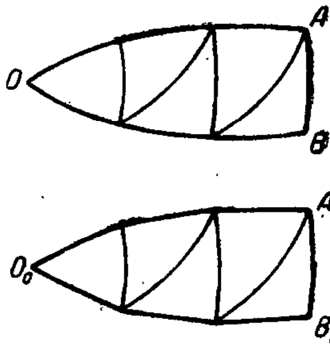
[1]) То, что предел выпуклых фигур есть выпуклая фигура, непосредственно следует из того, что предел кратчайших есть кратчайшая.

вопреки (15). Полученное противоречие доказывает невозможность предположенного неравенства $\alpha_{K'} \geqslant \alpha$; следовательно, $\alpha_{K'} < \alpha$, что и требовалось доказать.

Для поверхности, на которой удельная кривизна $\leqslant K < K'$, имеет место аналогичная лемма, получающаяся из доказанной заменой знака «больше» знаком «меньше».

Лемма 3. *Пусть на выпуклой поверхности F удельная кривизна $\geqslant K' > K'$ ($\leqslant K < K$). Пусть OAB — равнобедренный выпуклый геодезический треугольник на F, равные стороны которого OA и OB достаточно близки друг к другу. Тогда основание AB этого треугольника меньше (больше) основания равнобедренного треугольника на сфере $S_{K'}$, имеющего такие же боковые стороны и такой же угол между ними.*

Доказательство. Пусть на поверхности F удельная кривизна $\geqslant K > K'$. Тогда, по лемме 2, углы всякого достаточно малого выпуклого треугольника больше углов соответствующего треугольника на сфере $S_{K'}$. Пусть стороны OA и OB треугольника OAB столь близки друг к другу, что этот треугольник можно было разбить на треугольники T^i с вершинами на OA и OB, достаточно малые для того, чтобы к этим треугольникам была приложима лемма 2 (черт. 96). Построим на сфере $S_{K'}$ треугольники $T^i_{K'}$ со сторонами, равными сторонам треугольников T^i. Приложив эти треугольники друг к другу так же, как прилегают друг к другу треугольники T^i, получим многоугольник Q. Из леммы 2 следует, что все углы этого многоугольника не превосходят π, так что он выпуклый. Распрямляя ломаные O_0A_0, O_0B_0, соответствующие сторонам OA и OB, превратим многоугольник Q в треугольник $T_{K'}$ со сторонами, равными сторонам треугольника OAB. Представляется очевидным, и легко доказать, что при таком разгибании угол при вершине O_0 убывает. Но он уже был меньше угла $\angle O$ в треугольнике OAB, следовательно, тем более соответствующий угол в треугольнике $T_{K'}$ будет меньше угла $\angle O$.



Черт. 96.

Поэтому, если построить на сфере $S_{K'}$ равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными OA и OB, и с углом между ними, равным углу $\angle O$, то основание этого треугольника будет больше AB, что и требовалось доказать.

В случае, когда на поверхности F удельная кривизна $< K'$, рассуждаем аналогично; только здесь многоугольник Q получается невыпуклый и при превращении его в треугольник $T_{K'}$ угол при вершине O_0 увеличивается.

Докажем теперь формулированную выше теорему 3:

Если в окрестности геодезической L на выпуклой поверхности удельная кривизна $\leqslant K$, то всякая дуга геодезической L, имеющая длину, меньшую $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, будет кратчайшей в сравнении со всеми достаточно близкими к ней линиями. Если же в окрестности L удельная кривизна $\geqslant K$, то всякая дуга этой геодезической, имеющая длину, бо́льшую $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, не будет кратчайшей.

Пусть в окрестности геодезической L удельная кривизна $\leqslant K$. Тогда, как доказано в § 1, из каждой точки этой окрестности можно провести кратчайшие во всех направлениях. Поэтому из любой точки геодезической L, скажем, из её конца O, можно провести геодезическую на любую длину (до края рассматриваемой окрестности по крайней мере). В пределах некоторого сектора эти геодезические не пересекаются, и каждая из них в пределах этого сектора будет кратчайшей.

Возьмём любое $K' > K$. Проведём из O две геодезические M_1 и M_2, настолько близкие друг к другу, чтобы для всякого равнобедренного треугольника OXY с боковыми сторонами на этих геодезических выполнялась лемма 3. (Легко видеть, что если M_1 и M_2 достаточно близки и точки X и Y лежат внутри них, то треугольник OXY — выпуклый.) Положим $OX = OY = r$ и пусть φ — угол между M_1 и M_2, а $z = z(r, \varphi) = XY$. Пусть $z_{K'}(r, \varphi)$ — длина основания равнобедренного треугольника на сфере $S_{K'}$ с боковой стороной r и тем же углом φ. Тогда по лемме 3

$$z(r, \varphi) > z_{K'}(r, \varphi).$$

На сфере $S_{K'}$ величина $z_{K'}(r, \varphi)$ остаётся больше нуля, пока $r < \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$, а потому $z(r, \varphi)$ заведомо больше нуля при $r < \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$. Следовательно, никакие близкие геодезические M_1, M_2 не пересекаются на отрезках длины $< \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$. Если такой отрезок AB геодезической L заключить внутрь узкого геодезического треугольника, то AB будет кратчайшей в нём, потому что кратчайшая в таком треугольнике должна быть геодезической, а геодезическая, соединяющая точки A и B, по доказанному — единственная.

Следовательно, всякий отрезок геодезической L с длиной $< \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$ является кратчайшей в сравнении с достаточно близкими к нему кривыми. А так как K' можно взять сколь угодно близкими к K, то то же верно для отрезков длины $< \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Пусть теперь в окрестности U геодезической L удельная кривизна $\geqslant K$. Пусть отрезок OA этой геодезической является кратчайшей в сравнении со всеми достаточно близкими кривыми. Возьмём внутри него точку B и построим последовательность точек B_n, не лежащих на L и сходящихся к точке B. При достаточно больших n будут существовать линии OB_n — кратчайшие в U. Иначе можно было бы построить такую последовательность линий $\smile{OB_n}$ с длинами, сходящимися к длине OB, что предельная линия в замкнутой окрестности U не совпадала бы с отрезком OA геодезической L, что, как легко видеть, противоречило бы условию неналегания кратчайшей.

Итак, мы можем провести две близкие кратчайшие в U линии OB и OB_n. Пусть φ — угол между ними, а $z(r, \varphi)$ — расстояние между их точками X, Y, отсекающими равные отрезки $OX = OY = r$. Тогда, согласно лемме 3,

$$z(r, \varphi) \leqslant z_{K'}(r, \varphi),$$

где $K' < K$ и $z_{K'}$ имеет то же значение, что и выше. Но при $r = \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$, $z_{K'}(r, \varphi)$ обращается в нуль, а следовательно, должно равняться нулю также $z(r, \varphi)$. Это означает, что кратчайшие OB и OB_n должны иметь длину $\leqslant \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$, иначе они пересекались бы и не были бы кратчайшими. Следовательно, на отрезке с длиной $> \frac{\pi}{\sqrt{K'}}$ геодезическая L не может быть кратчайшей. А так как K' можно взять сколь угодно близким к K, то то же верно для отрезков длины $> \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, и теорема доказана.

Докажем теперь теорему 2:

Пусть в области U на выпуклой поверхности, где удельная кривизна $\geqslant K_1$ и $\leqslant K_2$, введены полярные координаты r, φ. Введём на сфере S_{K_i} $(i=1, 2)$ полярные координаты и каждой точке области U сопоставим точку сферы S_{K_i} с такими же координатами. Тогда, если это отображение ставит в соответствие кривой L из области U кривые L_1 и L_2 на сферах S_{K_1} и S_{K_2}, то длины этих кривых связаны неравенствами

$$s(L_1) \geqslant s(L) \geqslant s(L_2).$$

Пусть O — центр полярных координат в области U. Пусть X и Y — две точки из области U с координатами r, φ и $r+\Delta r$, $\varphi+\Delta\varphi$, причём $\Delta r \geqslant 0$. Возьмём на радиусе OY точку Z так, что $OZ = OX = r$. Положим

$$XY^2 = (ZY^2 + XZ^2)(1+\xi). \tag{16}$$

Тогда ξ будет бесконечно малым вместе с XY, потому что когда треугольник XYZ мал, то его кривизна мала и он близок к прямоугольному треугольнику на плоскости. А так как удельная кривизна ограничена, то ξ будет равномерно бесконечно малым независимо от координат r, φ точки X, а только в зависимости от Δr и $\Delta\varphi$ [1]).

Возьмём $K_1' < K_1$ и пусть X_0, Y_0, Z_0 — точки на сфере $S_{K_1'}$ с такими же координатами, что и X, Y, Z. Тогда точно так же

$$X_0Y_0^2 = (Z_0Y_0^2 + X_0Z_0^2)(1+\eta). \tag{17}$$

Но

$$ZY = \Delta r = Z_0Y_0,$$

а по лемме 3

$$XZ < X_0Z_0.$$

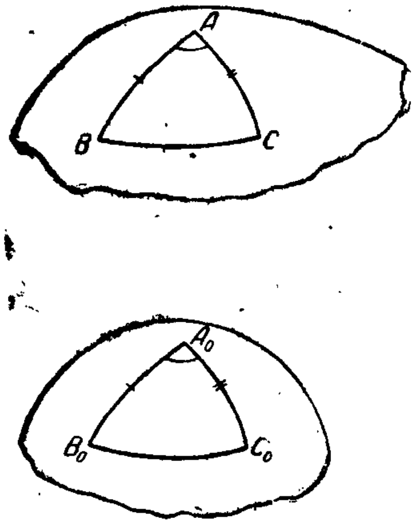
Поэтому из формул (16) и (17) следует, что

$$XY < X_0Y_0(1+\varepsilon), \tag{18}$$

где ε — бесконечно малое вместе с Δr и $\Delta\varphi$.

Если теперь взять в области U ломаную L, то, разбивая её на малые отрезки и пользуясь формулой (18), мы получим при переходе к бесконечно мелким разбиениям, что

$$s(L) \leqslant s(L_{K_1'}).$$



Черт. 97.

А так как K_1' можно взять сколь угодно близким к K_1, то точно так же

$$s(L) \leqslant s(L_{K_1}).$$

Наконец, аппроксимируя любую кривую L ломаными, мы получим тот же результат для любой кривой L.

Неравенство $s(L) \geqslant s(L_{K_2})$ доказывается, конечно, точно так же.

Пользуясь полученным результатом, легко доказать теорему 4 в следующей ослабленной форме:

Если на поверхности F удельная кривизна $\geqslant K_1$ и $\leqslant K_2$, то углы всякого достаточно малого треугольника T на F заключены между соответствующими углами треугольников T_{K_1} и T_{K_2} на сферах S_{K_1} и S_{K_2}.

---

[1]) Точная оценка ξ через кривизны треугольников XYZ и OXZ и в конечном счёте через XY и границу удельной кривизны K не представляет труда.

Пусть треугольник $T=ABC$ настолько мал, что каждую его вершину можно принять за центр геодезических полярных координат, определённых в круге, содержащем треугольник T и имеющем радиус $<\frac{\pi}{\sqrt{K_2}}$. Тогда, приняв, например, вершину A за центр таких координат, мы можем отобразить треугольник T на сферу S_{K_2}, сопоставляя друг другу точки с равными полярными координатами. При таком отображении (черт. 97) стороны AB и AC треугольника T перейдут в дуги больших кругов A_0B_0, A_0C_0, образующие друг с другом такой же угол:

$$\angle A_0=\angle A,$$

а сторона BC перейдёт в некоторую кривую B_0C_0, длина которой, согласно доказанной только что теореме 2, будет не больше длины BC. Поэтому кратчайшая B_0C_0 тем более будет не длиннее BC:

$$B_0C_0\leqslant BC.$$

Итак, элементы сферического треугольника $A_0B_0C_0$ связаны с элементами треугольника ABC соотношениями:

$$A_0B_0=AB,\quad A_0C_0=AC,\quad B_0C_0\leqslant BC,\quad \angle A_0=\angle A. \tag{19}$$

Если теперь построить сферический треугольник $T_{K_2}=A_1B_1C_1$ со сторонами, равными сторонам треугольника ABC, то в силу первых трёх соотношений (19) будем иметь

$$A_1B_1=A_0B_0,\quad A_1C_1=A_0C_0,\quad B_1C_1\geqslant B_0C_0.$$

Отсюда следует, что

$$\angle A_1\geqslant\angle A_0=\angle A,$$

т. е. угол треугольника T не больше соответствующего угла треугольника T_{K_2}, что и требовалось доказать.

Обратное неравенство между углами треугольников T и T_{K_1} доказывается аналогично. Мы берём на сфере S_{K_1} треугольник $A_0B_0C_0$ так, что $A_0B_0=AB$, $A_0C_0=AC$, $\angle A_0=\angle A$, и отображаем его на данную поверхность так, что A_0B_0 и A_0C_0 переходят в AB и AC. Тогда сторона B_0C_0 перейдёт в кривую $\overset{\smile}{BC}$, которая, согласно доказанной только что теореме, будет не длиннее B_0C_0. А так как, очевидно, $BC\leqslant\overset{\smile}{BC}$, то тем более $BC\leqslant B_0C_0$. Сопоставляя теперь треугольник $A_0B_0C_0$ с треугольником $T_{K_1}=A_1B_1C_1$, имеющим те же стороны, что и треугольник $T=ABC$, мы приходим к тому, что $\angle A_1\leqslant\angle A_0=\angle A$, т. е. угол треугольника T не больше соответствующего угла треугольника T_{K_1}.

Полученный результат слабее формулированной в начале параграфа теоремы 2 в том отношении, что там вовсе не предполагается, что треугольник T можно покрыть областью, где определены полярные координаты. Такой области может не быть вовсе, если удельная кривизна ограничена только снизу, но не ограничена сверху. Поэтому доказательство теоремы 2 в полном её объёме требует существенно иных соображений.

Пусть в треугольнике T удельная кривизна $\geqslant K$; возьмём $K'<K$ и разобьём треугольник T на столь малые треугольники T^i, что к ним приложима лемма 2, т. е. углы этих треугольников больше углов соответствующих треугольников $T^i_{K'}$ на сфере $S_{K'}$. Заменяя каждый треугольник T^i треугольником $T^i_{K'}$, мы получим развёртку, составленную из сферических треугольников. Если разбиение треугольника T безгранично уменьшать, то метрика этой развёртки сходится к метрике треугольника T. К таким развёрткам из сферических треугольников,

или, если угодно, к «сферическим» многогранным метрикам приложимы по существу те же соображения, какие мы применяем при рассмотрении «плоских» многогранных метрик. Пользуясь приближением данной метрики такими сферическими многогранными метриками, можно доказать теоремы 4, 5, 6 теми же методами, какими были доказаны теоремы об условии выпуклости в §§ 2—4 гл. III и о площади в § 1 гл. X. Представляем читателю самому провести эти доказательства.

§ 3. Форма выпуклой поверхности в зависимости от её кривизны.

Точки выпуклой поверхности могут быть трёх родов: 1) конические точки, где касательный конус имеет полный угол $< 2\pi$, 2) «ребристые» точки, где касательный конус является двугранным углом (но не плоскостью), 3) «гладкие» точки, где касательный конус оказывается плоскостью. В § 2 гл. X было доказано, что почти все точки выпуклой поверхности — гладкие, т. е. множество тех точек, где нет касательной плоскости, имеет меру нуль. Из того, что кривизна конической точки > 0 и кривизна всей поверхности должна быть конечной, следует, что конических точек не может быть более счётного числа.

Буземанн и Феллер доказали следующую замечательную теорему: *всякая выпуклая поверхность дважды дифференцируема почти везде*[1]), так что во всех точках, за исключением, самое большее, множества меры нуль, на выпуклой поверхности существуют кривизны нормальных сечений, удовлетворяющие известной теореме Эйлера. В этих точках имеется индикатрисса Дюпена обычного вида: эллипс, пара параллельных прямых или «лежащая в бесконечности», — когда кривизны всех нормальных сечений равны нулю. В этих точках, помимо теоремы Эйлера, выполняются теоремы Менье, Родрига и др.

Задача состоит в том, чтобы исследовать, в какой мере особенности выпуклой поверхности зависят от её внутренней метрики; какие условия, налагаемые на внутреннюю метрику выпуклой поверхности, обеспечивают её гладкость, или двукратную дифференцируемость. В этом направлении мы имеем пока следующие результаты:

Теорема 1. *Если на выпуклой поверхности удельная кривизна любой достаточно малой области, содержащей точку А, не превосходит какого-нибудь постоянного числа, то либо А — точка гладкости, либо через неё проходит прямолинейное ребро поверхности (точка А не является концом такого ребра)*[2]).

На замкнутой поверхности прямолинейное ребро всегда имеет конец, а на бесконечной полной выпуклой поверхности оно может не иметь конца только в том случае, когда поверхность является цилиндром, замкнутым или открытым; в последнем случае поверхность изометрична плоскости. Поэтому из теоремы 1 следует:

Теорема 2. *Если на замкнутой или бесконечной полной выпуклой поверхности, метрика которой не всюду эвклидовская, удельная кривизна ограничена, то такая поверхность гладкая.*

---

[1]) Т. е. если взять прямоугольные координаты x, y, z так, что поверхность (или часть её) представляется уравнением $z = f(x, y)$, то функция $f(x, y)$ имеет второй дифференциал при всех (x, y), исключая множество меры нуль. См. H. Busemann und W. Feller, Krümmungseigenschaften konvexer Flächen, Acta math., т. 66 (1935), стр. 1—47.

Некоторое уточнение результатов Буземанна и Феллера дано в работе А. Д. Александрова «Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей», Учёные записки Ленинградского гос. университета, Серия матем. наук, вып. 6 (1939), стр. 1—35.

[2]) См. А. Д. Александров, Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной. Доклады Академии наук СССР, т. 36, № 7 (1942), стр. 211—216.

Если прямолинейное ребро выпуклой поверхности имеет концы на её границе или в бесконечности, то поверхность можно разогнуть вдоль этого ребра так, что оно перестанет быть ребром. Поэтому из теоремы 1 следует:

Теоремы 3. *Если на выпуклой поверхности F удельная кривизна ограничена, то существует гладкая выпуклая поверхность, изометричная F. Или, иными словами, метрика положительной кривизны, у которой удельная кривизна ограничена для всех областей, реализуема посредством гладкой выпуклой поверхности (если только она вообще реализуема посредством выпуклой поверхности).*

В теореме 1 возможно, что через точку A проходит прямолинейное ребро поверхности. Пример тому даёт плоскость, переломанная по прямой. Относительно прямолинейного ребра имеет место

Теорема 4. *Если через точку A выпуклой поверхности F проходит прямолинейный отрезок (ребро или нет — безразлично), то на F имеются сколь угодно малые области, содержащие точку A, имеющие сколь угодно малую удельную кривизну.*

Из теоремы 1 и 4 следует

Теорема 5. *Если на выпуклой поверхности F удельная кривизна заключена в положительных границах, общих для всех областей, то поверхность F — гладкая и не содержит прямолинейных отрезков.*

Приведённые результаты позволяют перевести доказанные нами общие теоремы реализуемости на обычный язык дифференциальной геометрии. В дифференциальной геометрии проблема реализуемости ставится так. В многообразии R в окрестности каждой точки вводятся координаты u, v и задаётся квадратичная форма [1])

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \qquad (1)$$

Требуется найти поверхность Φ и гомеоморфное отображение многообразия R на эту поверхность так, чтобы линейный элемент поверхности совпадал с заданным в R линейным элементом ds^2. Т. е., если в окрестности какой-либо точки поверхность представлена уравнением [2]) $\underline{x} = \underline{x}(u, v)$, то

$$\underline{x}_u^2 = E, \quad \underline{x}_u \underline{x}_v = F, \quad \underline{x}_v^2 = G.$$

Из самой постановки задачи ясно, что она имеет смысл тогда и только тогда, когда функция $\underline{x}(u, v)$ дифференцируема, т. е. когда поверхность Φ — гладкая; и можно сказать, что в дифференциальной геометрии речь идёт не просто о реализуемости метрики, а о реализуемости данного линейного элемента.

Так как метрика, задаваемая линейным элементом с непрерывной неотрицательной гауссовой кривизной, есть частный случай общей метрики положительной кривизны, то из приведённой выше теоремы 3 следует, что такая метрика реализуема посредством гладкой выпуклой поверхности (если она вообще

---

[1]) Если две окрестности U и U' перекрываются, то в общей их части координаты u', v' выражаются через u, v так, что якобиан $\frac{D(u', v')}{D(u, v)} \neq 0$ и u', v' трижды дифференцируемы по u, v. При переходе от координат u, v к u', v' коэффициенты должны преобразовываться так, чтобы значения квадратичной формы ds^2 не изменялись. (Трёхкратная дифференцируемость нужна в связи с тем, что в выражение гауссовой кривизны входят вторые производные от E, F, G, а сами E, F, G выражаются через E', F', G' и первые производные одних координат по другим.) Коэффициенты E, F, G предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат u, v.

[2]) Координаты u, v переносятся на поверхность в силу отображения на неё многообразия R.

реализуема посредством выпуклой поверхности; например, она заведомо реализуема в малом).

Следовательно, она реализуема в смысле дифференциально-геометрической постановки задачи о реализуемости. Таким образом, наши общие теоремы реализуемости в переводе на язык дифференциальной геометрии приводят к следующим результатам:

1) линейный элемент с неотрицательной кривизной реализуем в малом посредством выпуклой поверхности;

2) такой же линейный элемент, заданный на сфере, реализуем посредством замкнутой выпуклой поверхности и, наконец;

3) такой же линейный элемент, заданный на плоскости и определяющий на ней полную метрику, реализуем посредством бесконечной полной выпуклой поверхности.

На поверхности, реализующей рассматриваемый линейный элемент, определённая им гауссова кривизна совпадает, в силу обобщённой теоремы Гаусса, с гауссовой кривизной, определяемой как предел отношения площади сферического изображения к площади области. Однако гауссова кривизна может не быть равной произведению главных кривизн по той простой причине, что из её существования вовсе не следует существование главных кривизн. Во всех точках, где поверхность дважды дифференцируема, — а согласно теореме Буземанна-Феллера это будет почти везде, — гауссова кривизна равна произведению главных кривизн. Но могут быть точки, где гауссова кривизна существует, а ни одно нормальное сечение не имеет определённой кривизны. Пример представляет поверхность, задаваемая уравнением

$$2z = ax^2 + \frac{1}{a}y^2,$$

где

$$a = 1 + \frac{1}{2}\sin\ln\ln z.$$

На этой поверхности в окрестности точки $x = y = 0$ гауссова кривизна существует и непрерывна и в самой точке $x = y = 0$ равна единице, но в этой точке ни одно нормальное сечение не имеет определённой кривизны. Другой пример даёт поверхность с уравнением $z^2 = |x|^7 + |y|^3$. В точке $x = y = 0$ одна из главных кривизн этой поверхности обращается в нуль, а другая — в бесконечность, гауссова же кривизна непрерывна и равна нулю [1]).

Следовательно, существование и непрерывность гауссовой кривизны вовсе не обеспечивают двукратной дифференцируемости поверхности [2]).

В заключение поставим ещё несколько задач.

---

[1]) Можно дать примеры, когда индикатрисса Дюпена есть прямая (т. е. одна главная кривизна равна нулю, другая — бесконечности), а гауссова кривизна положительна и непрерывна.

[2]) Этот вопрос встаёт не только в связи с теоремами о реализуемости, но также в связи с рядом других теорем существования для выпуклых поверхностей: например, в связи с известной теоремой Минковского о существовании замкнутой выпуклой поверхности с заданной, как функция нормали, гауссовой кривизной, или в связи с другой теоремой о существовании выпуклой поверхности с заданной кривизной, приведённой в конце § 4 гл. V. По поводу этих теорем см. работы А. Д. Александрова: 1) Существование почти везде второго дифференциала выпуклой функции и некоторые связанные с ним свойства выпуклых поверхностей, Учёные записки ЛГУ, серия матем. наук, вып. 6 (1939), стр. 1—35; 2) К теории смешанных объёмов выпуклых тел. III. Матем. сборник, т. 3, вып. 1 (1938), стр. 27—4?; 3) Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной, Доклады Академии наук СССР, т. 35, № 5 (1942), стр. 143—147.

Конические точки — это те и только те точки поверхности, кривизна которых >0. Нельзя ли дать также внутреннюю характеризацию других типов точек выпуклой поверхности, например, изолированных «ребристых» точек, или точек, где поверхность имеет эллиптическую индикатриссу Дюпена?

В дифференциальной геометрии связь внутренней метрики с внешней формой поверхности выражается в известных формулах Гаусса-Кодацци[1]). Эти формулы дают необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять дифференциальная квадратичная форма для того, чтобы при заданном линейном элементе существовала поверхность, для которой эта форма является второй квадратичной формой. Эти условия необходимы и достаточны и имеют смысл только для формы, коэффициенты которой дифференцируемы, потому что в самые формулы Гаусса-Кодацци входят первые производные коэффициентов второй формы.

Известно, что при задании первой и второй форм поверхность определяется однозначно с точностью до движения и отражения. Это верно для поверхностей, по крайней мере, трижды дифференцируемых, т. е. таких, которые в окрестности каждой точки могут быть представлены уравнением $z=f(x, y)$ (при соответствующем выборе декартовых координат x, y, z), где функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные, до третьего порядка включительно. Для поверхностей, не удовлетворяющих этому условию, формулы Кодацци просто не имеют смысла, а для поверхностей, не дифференцируемых дважды, даже вторая квадратичная форма не имеет смысла во всех точках. Однако можно поставить вопрос о том, чтобы найти какую-то замену второй квадратичной формы и формул Гаусса-Кодацци для любых выпуклых поверхностей. Подобно тому как первую форму мы заменили интегральным понятием расстояния на поверхности, так нельзя ли заменить вторую форму каким-нибудь интегральным понятием, имеющим смысл для любых выпуклых поверхностей?

Соответствующая замена формулы Гаусса уже даётся обобщённой теоремой Гаусса, представляющей собой её интегральное выражение. В связи с этим намечается следующий подход к решению поставленного вопроса, предложенный Л. Пикусом.

Третьей квадратичной формой поверхности называется выражение для квадрата элемента длины сферического изображения поверхности. Именно, если $\underline{n}$ — единичный нормальный вектор к поверхности, на которой введены координаты u, v, то третья квадратичная форма есть

$$d\underline{n}^2 = \underline{n}_u^2 du^2 + 2\underline{n}_u \underline{n}_v \, du\, dv + \underline{n}^2_v \, dv^2.$$

Известно, что вторую форму поверхности можно выразить через первую и третью[2]). Поэтому можно вместо второй формы рассматривать третью форму поверхности и вывести для неё формулы, заменяющие формулы Гаусса-Кодацци. Оказывается, что первая и третья форма определяют поверхность однозначно с точностью до движения и отражения, за исключением того случая, когда средняя кривизна обращается в нуль (т. е. за исключением минимальных поверхностей).

Сферическое изображение определено для любых выпуклых поверхностей, и вместо элемента длины сферического изображения можно рассматривать расстояния между его точками, т. е., попросту говоря, углы между нормалями к опорным плоскостям поверхности. Так как через некоторые точки поверхности может проходить бесконечно много опорных плоскостей, то между точками поверхности и нормалями нет, вообще говоря, однозначного соответствия. Поэтому, может быть, следует рассматривать поверхность как совокупность «эле-

[1]) См. любой курс дифференциальной геометрии, например, В. Бляшке, § 58.
[2]) См. В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 50.

ментов»: точка и проходящая через неё опорная плоскость. Между этими «элементами» имеются два однозначно определённых расстояния: расстояние между точками, измеряемое на поверхности, и угол между нормалями к опорным плоскостям; первое заменяет первую форму, а второе — третью форму поверхности. Для многогранников почти очевидно, что задание этих расстояний между всеми «элементами» определяет многогранник однозначно. Погорелов доказал то же для любых выпуклых поверхностей: если две выпуклые поверхности допускают такое изометрическое отображение друг на друга, которое, к тому же, сохраняет углы между нормалями в соответствующих точках, то такие поверхности равны[1].

Вопрос о связях между внутренней метрикой поверхности и её сферическим изображением, заменяющих формулы Кодацци, остаётся совершенно открытым.

[1]) Этот результат сообщён мне А. В. Погореловым в 1946 г. и пока не опубликован.

ГЛАВА XII.

ОБОБЩЕНИЯ.

§ 1. Выпуклые поверхности в пространствах постоянной кривизны.

1. Помимо эвклидова, существуют другие пространства, в которых имеет место свободная подвижность твёрдого тела, это — пространства постоянной кривизны. С точки зрения топологического строения самыми простыми из них являются сферические пространства и пространства Лобачевского. Каждое из них характеризуется значением его кривизны K: отношением избытка треугольника $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ к его площади; для сферических пространств $K>0$, для пространства Лобачевского $K<0$. Эвклидово пространство можно рассматривать как предельный случай пространства Лобачевского, с $K=0$. Сферическое пространство кривизны K может быть изображено трёхмерной сферой радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$ в четырёхмерном эвклидовом пространстве.

В дальнейшем R_K обозначает в случае $K>0$ сферическое пространство кривизны K, в случае $K<0$ — пространство Лобачевского кривизны K, и в случае $K=0$ — эвклидово пространство.

В этих пространствах существуют прямые и плоскости; так, на трёхмерной сфере прямая есть большой круг, а плоскость — двумерная сфера, получающаяся в диаметральном сечении трёхмерной сферы.

Если под отрезком AB понимать кратчайшую линию в пространстве, соединяющую точки A и B, т. е. отрезок прямой, то можно ввести понятие о выпуклом теле, как о замкнутом множестве, имеющем внутренние точки и обладающем тем свойством, что отрезок, соединяющий любые две его точки, в нём содержится. Тогда возникает понятие о выпуклой поверхности, как области на границе выпуклого тела, и можно поставить задачу исследования внутренней геометрии выпуклых поверхностей в сферических пространствах и пространствах Лобачевского. Оказывается, что это исследование можно провести совершенно теми же методами, какие мы применяли к выпуклым поверхностям эвклидова пространства, причём получающиеся результаты оказываются естественным обобщением результатов, полученных в случае эвклидова пространства. Дело в том, что в наших выводах можно было бы обойтись без аксиомы о параллельных, а это уже даёт гарантию того, что их можно перенести в пространство Лобачевского. Переход к сферическому пространству требует, конечно, изменения других аксиом, поскольку там прямые замкнуты и каждые две из них пересекаются, но это оказывается вовсе не существенным, потому что, как легко доказать, всякая выпуклая область на сфере — выпуклое тело в сферическом пространстве (кроме всей сферы) всегда содержится в полусфере, а потому при изучении выпуклых поверхностей достаточно ограничиться пределами одной полусферы.

2. Исследование внутренней геометрии выпуклых поверхностей в пространстве R_K постоянной кривизны K мы должны начать с доказательства теоремы

о сходимости метрик для сходящихся замкнутых выпуклых поверхностей, чтобы открыть тем самым путь к применению метода приближения многогранниками.

Доказательство этой теоремы для случая эвклидова пространства R_0, данное в § 1 гл. III, существенно использовало преобразование подобия и, следовательно, не переносится в R_K с $K \neq 0$. Однако можно дать доказательство, вовсе не пользуясь преобразованием подобия; такое доказательство для случая пространства Лобачевского дано в моей статье «Полные выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского», Известия Академии наук СССР, серия матем., т. 9, № 2 (1945), стр. 113—120.

Когда теорема о сходимости метрик доказана, мы обращаемся к доказательству того, что *метрика выпуклой поверхности удовлетворяет условию выпуклости*, т. е. если X и Y — переменные точки на кратчайших L, M, исходящих из одной точки O, $OX = x$, $OY = y$, $XY = z$, то угол $\gamma(x, y)$ в плоском треугольнике со сторонами x, y, z, противолежащий стороне z, есть невозрастающая функция x и y. Здесь речь идёт о плоскости в данном пространстве R_K, выпуклые поверхности которого мы исследуем. Плоскость эта, с точки зрения внутренней метрики, есть поверхность постоянной кривизны K, и, следуя терминологии, введённой в § 2 гл. XI, мы можем говорить об условии K-выпуклости.

Доказательство того, что на выпуклой поверхности в пространстве R_K выполняется условие K-выпуклости, проводится буквально так же, как оно было проведено для случая $K = 0$ в §§ 2, 3 гл. III; при этом, конечно, мы должны рассматривать многогранники (или многогранную метрику), построенные из треугольников, плоских в R_K, т. е. из треугольников, вырезанных из поверхности постоянной кривизны K; в остальном всё доказательство повторяется дословно.

3. Следствия, выведенные из условия выпуклости в § 4 гл. III, также сохраняют силу и доказательство их будет то же самое. В частности, получается, что *углы, между сторонами треугольника на выпуклой поверхности в R_K не меньше соответственных углов треугольника со сторонами той же длины на плоскости в R_K, т. е. на поверхности постоянной кривизны K*. Следовательно, в сферическом пространстве сумма углов между сторонами треугольника на выпуклой поверхности всегда больше π. Далее, из условия K-выпуклости так же, как и в § 4 гл. III, вытекает, что между двумя исходящими из одной точки кратчайшими на выпуклой поверхности в R_K существует угол в сильном смысле. Поэтому всякая выпуклая поверхность в сферическом пространстве имеет метрику положительной кривизны. Вместе с тем, очевидно, что в сферическом пространстве всякое выпуклое тело имеет конечные размеры, и потому всякая выпуклая поверхность в нём есть часть замкнутой выпуклой поверхности. Мы же доказали в гл. VII, что всякое метрическое пространство, гомеоморфное сфере, имеющее метрику положительной кривизны, изометрично замкнутой выпуклой поверхности в эвклидовом пространстве. Следовательно, *всякая выпуклая поверхность из сферического пространства R_K изометрична выпуклой поверхности в эвклидовом пространстве, и именно, как можно показать, — такой поверхности, на которой удельная кривизна $\geqslant K$*. Таким образом, с точки зрения внутренней метрики, выпуклые поверхности сферических пространств не дают ничего нового в сравнении с выпуклыми поверхностями эвклидова пространства, и потому нет надобности особо их исследовать. Можно доказать также, что всякая выпуклая поверхность эвклидова пространства, на которой удельная кривизна $\geqslant K$ и каждые две точки можно соединить кратчайшей, изометрична выпуклой поверхности в сферическом пространстве кривизны K. Однако если на выпуклой поверхности эвклидова пространства не всякие две точки соединимы кратчайшей, то она может и не быть изометричной выпуклой поверхности в сферическом пространстве R_K, хотя бы удельная кривизна на ней и была не меньше K. (Пример представляет выпуклая незам-

кнутая поверхность вращения, имеющая постоянную кривизну K, с длиной экватора, большей $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.)

4. Совершенно иначе обстоит дело с выпуклыми поверхностями в пространстве Лобачевского. Например, плоскость пространства Лобачевского есть, конечно, выпуклая поверхность, но она имеет постоянную отрицательную кривизну и потому заведомо не изометрична никакой выпуклой поверхности эвклидова пространства. Поэтому многогранники в пространстве Лобачевского также не изометричны выпуклым поверхностям эвклидова пространства. Это показывает, что выпуклые поверхности пространства Лобачевского дают с точки зрения внутренней метрики нечто существенно новое. Кроме того, оказывается, что число топологически различных типов полных выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского не конечно, как в эвклидовом пространстве, а бесконечно; именно, имеет место следующая теорема:

Выпуклая поверхность в пространстве Лобачевского гомеоморфна области на сфере, и для всякой области на сфере существует гомеоморфная ей полная выпуклая поверхность в пространстве Лобачевского.

Для доказательства воспользуемся той интерпретацией пространства Лобачевского, в которой оно представляется внутренностью некоторого шара E в эвклидовом пространстве, а прямые этого пространства представляются отрезками эвклидовских прямых [1]). Тогда всякий отрезок в смысле Лобачевского изобразится отрезком в шаре E, и, обратно, всякий отрезок в шаре E будет изображать отрезок прямой Лобачевского. Поэтому выпуклое тело пространства Лобачевского изобразится эвклидовским выпуклым телом, у которого исключены точки, не лежащие внутри шара E. Обратно, всякое такое эвклидовски выпуклое тело будет представлять выпуклое тело в пространстве Лобачевского. Таким образом, мы получаем ясное наглядное представление о выпуклых телах, а следовательно, и о выпуклых поверхностях в пространстве Лобачевского.

Пусть H — эвклидовски выпуклое тело, лежащее в шаре E, причём из него исключены точки, общие с поверхностью S шара E. Проектирование границы тела H на сферу S из любой точки, лежащей внутри H, представляет собою гомеоморфизм. Поэтому граница тела H гомеоморфна открытому множеству на сфере. Отсюда следует, что всякая выпуклая поверхность пространства Лобачевского гомеоморфна области на сфере.

Возьмём теперь на сфере S открытое множество G такое, чтобы его дополнение $S - G$ не лежало в одной плоскости (этого всегда можно добиться путём топологического преобразования множества G, если только $G \neq S$). Выпуклая оболочка множества $S - G$, если из неё исключить самое это множество, будет представлять выпуклое тело в пространстве Лобачевского. Проектируя его границу на сферу S, мы убедимся в том, что она гомеоморфна множеству G. Следовательно, для всякого открытого множества G на сфере существует выпуклое тело в пространстве Лобачевского с границей, гомеоморфной этому множеству. (Для случая $G = S$ это очевидно само по себе; границу, гомеоморфную сфере, имеет всякое конечное выпуклое тело.) Множество G не обязано быть связным, но в понятие поверхности входит требование связности, и если G связано, т. е. представляет область, то наше построение даёт гомеоморфную ему полную выпуклую поверхность.

5. После того, как доказано, что метрика выпуклых поверхностей в пространстве постоянной кривизны K удовлетворяет условию K-выпуклости, и из этого условия извлечены следствия, аналогичные теоремам 1-5 § 4 гл. III, дальнейшая разработка внутренней геометрии выпуклых поверхностей в R_K идёт совершенно так же, как для выпуклых поверхностей в эвклидовом простран-

[1]) Это — известная проективная интерпретация пространства Лобачевского.

стве R_0. Прежде всего, все результаты, касающиеся углов между кратчайшими и углов секторов, полученные в гл. IV, обобщаются на выпуклые поверхности в R_K без изменений. Некоторое различие возникает в том пункте (§§ 5, 6 гл. IV), где мы получили пространственную интерпретацию угла между кратчайшими, сводя его к углу между касательными к ним, измеренному на касательном конусе. Дело в том, что мы получали касательный конус как результат бесконечного подобного увеличения поверхности; но в пространстве R_K при $K \neq 0$ преобразования подобия невозможны; поэтому нужно использовать другие определения касательного конуса, как конуса, образованного пределами лучей, идущих из данной точки O поверхности в переменную точку поверхности X при условии, что X стремится к O.

При этом доказательство того, что метрика касательного конуса аппроксимирует метрику поверхности в бесконечно малой окрестности точки O, должно быть проведено иным путём. Такое доказательство может быть дано, но мы не будем его здесь излагать. Что же касается доказательства существования полукасательной к кратчайшей на выпуклой поверхности, то метод Либермана, посредством которого оно было проведено в § 6 гл. IV, обобщается на любое R_K почти дословно[1]). Итак, все результаты, касающиеся углов между кратчайшими, переносятся на случай любого R_K, дословно сохраняя свои формулировки.

6. Далее идёт учение о кривизне, развитое в гл. V.

Определение кривизны открытого треугольника, открытой кратчайшей и точки, данное в § 1 гл. V, а также все выводы этого параграфа повторяются дословно с одной лишь существенной разницей. Именно, в случае $K<0$, т. е. в пространстве Лобачевского, сумма углов треугольника на выпуклой поверхности может быть меньше π, а потому кривизна треугольника (сумма его углов минус π) может быть отрицательной. Если бы в гл. V мы пошли по пути чисто внутренне геометрического развития учения о кривизне, то при переходе к любому R_K ничего не пришлось бы менять, и мы пришли бы к тому, что кривизна есть не только аддитивная, но и вполне аддитивная функция множества на выпуклой поверхности во всяком R_K. Точно так же мы пришли бы к распространению кривизны на все борелевские множества на R_K. Наконец, роль кривизны как меры «неэвклидовости» метрики поверхности сохраняется, конечно, и в случае выпуклых поверхностей в любом R_K.

Однако обобщённая теорема Гаусса, согласно которой кривизна равна площади сферического изображения, не может быть буквально перенесена в любое R_K по той простой причине, что при $K \neq 0$ в R_K нельзя пользоваться обычным параллельным перенесением вектора, а потому самое понятие сферического изображения отпадает. Для того чтобы обобщить теорему Гаусса на любое R_K, нужно сначала ввести понятие о площади области на выпуклой пов рхности.

Однако учение о площади области на выпуклой поверхности, развитое нами в §§ 1, 2 гл. X, может быть перенесено в любое R_K без изменений. Разница будет состоять только в том, что оказывается удобнее пользоваться не эвклидовскими плоскими треугольниками, а треугольниками, плоскими в данном R_K (т. е. треугольниками, вырезаемыми из поверхности постоянной кривизны K). Это, однако, не меняет результата, потому что отношение площадей треугольников из R_K и R_0, имеющих равные стороны, стремится к единице, когда наибольшая сторона треугольников стремится к нулю. Итак, учение о площади областей на выпуклых поверхностях в произвольном R_K может быть развито

---

[1]) Применяя этот метод, мы строили цилиндр с кратчайшей в качестве направляющей и с параллельными образующими. Однако можно вместо цилиндра рассматривать конус, что приведёт к тому же результату.

так же, как в случае R_0[1]). В частности, например, площади $S(T)$ и $S(T_K)$ треугольников с равными сторонами на выпуклой поверхности и на плоскости связаны соотношением

$$0 \leqslant S(T) - S(T_K) \leqslant \frac{1}{2}[\omega(T) - KS(T_K)]\, d^2.$$

Определим теперь «внешнюю» кривизну множества на выпуклой поверхности в R_K. Пусть M — некоторое множество на выпуклой поверхности F в R и O — какая-либо точка в R_K. Проведём в каждой точке X множества M все опорные плоскости к поверхности F, и пусть n — внешние нормали к этим плоскостям. Каждой нормали n сопоставим луч n', исходящий из O, лежащий в плоскости, проходящей через n и точку O, и образующий с отрезком OX угол, дополняющий угол между n и OX до 180°. (Можно сказать, что мы переносим нормаль n вдоль отрезка OX параллельно в смысле Леви-Чивита.) Все такие лучи n' образуют некоторый телесный конус. Величину телесного угла при вершине этого конуса обозначим через $\psi_F(M,O)$[2]). В случае эвклидова пространства, эта величина не зависит от выбора точки O и есть не что иное, как площадь сферического изображения множества M; однако, в случае любого R_K, величина $\psi_F(M,O)$ будет зависеть не только от множества M, но и от выбора точки O; поэтому она не может быть принята за меру «внешней» кривизны множества M. «Внешнюю» кривизну мы определим следующим образом. Разобьём множество M на множества M_i и возьмём в каждом из них по точке O_i. Определим сумму $\sum\limits_i \psi_F(M_i,O_i)$. Оказывается, что если множества M_i брать всё более малыми так, чтобы наибольший диаметр их стремился к нулю, то данные суммы будут сходиться к определённому пределу. Этот предел мы и принимаем за внешнюю кривизну $\psi_F(M)$ множества M на поверхности F. Если поверхность F — регулярная, то $\psi_F(M)$ есть интеграл от произведения главных кривизн по площади множества M:

$$\psi_F = \iint\limits_M \frac{1}{R_1R_2}\,dS.$$

Обобщённая теорема Гаусса в R_K формулируется следующим образом: *Пусть M — множество на выпуклой поверхности F в R_K, имеющее (внутреннюю) кривизну $\omega(M)$, внешнюю кривизну $\psi(M)$ и площадь $\sigma(M)$.* Тогда имеет место равенство

$$\psi(M) = \omega(M) - K\sigma(M).$$

Величина $\psi(M)$ имеет, следовательно, внутренне геометрический смысл; она играет роль меры отклонения метрики данной поверхности от метрики плоскости в R_K, т. е. от метрики поверхности постоянной кривизны K.

7. После учения об угле, кривизне и площади, из общих вопросов внутренней геометрии остаётся только учение о направлении и о повороте кривой. Все относящиеся сюда определения и результаты, развитые в §§ 1, 2 гл. IX, остаются в силе и для поверхностей в любом R_K. Точно так же сохраняется доказанная в § 5 гл. V теорема о том, что из точки на выпуклой поверхности кратчайшие исходят почти во всех направлениях.

---

[1]) Изопериметрические задачи, рассмотренные в § 3 гл. X, могут быть поставлены также для любого R_K. Однако здесь возникают некоторые существенные изменения: например, в пространстве Лобачевского требование, чтобы кривизна поверхности была меньше 2π, оказывается недостаточным для существования поверхности, имеющей наибольшую площадь при данном периметре.

[2]) Это $\psi_F(M,O)$ будет определено, если множество M — борелевское. Мы ограничиваемся рассмотрением борелевских множеств.

Таким образом, все основные понятия и факты внутренней геометрии выпуклых поверхностей эвклидова пространства обобщаются по большей части дословно на выпуклые поверхности в любом R_K. Более частные результаты, касающиеся, например, окружности, кривых, ограничивающих выпуклые области, и т. п., также могут быть перенесены mutatis mutandis в любое R_K. Что же касается условий, характеризующих метрику выпуклых поверхностей в R_K, и связанных с ними теорем реализуемости, то о них мы скажем в следующем параграфе.

§ 2. Теоремы реализуемости в пространствах постоянной кривизны.

Теорема о существовании многогранника с данной развёрткой, доказанная в гл. VI, обобщается в любое R_K дословно, если под плоскими многоугольниками понимать многоугольники, плоские в R_K, т. е., иными словами, многоугольники, вырезанные из поверхности постоянной кривизны K.

Из всякой развёртки, составленной из плоских в R_K многоугольников, можно склеить в R_K замкнутый выпуклый многогранник, если эта развёртка гомеоморфна сфере и суммы углов, сходящихся в каждой её вершине, не превосходят 2π. При этом к выпуклым многогранникам мы опять-таки присоединяем дважды покрытые плоские (в R_K) выпуклые многоугольники.

Доказательство этой теоремы можно провести почти буквально так же, как это было сделано в главе VI для эвклидова случая. В нашем доказательстве мы воспользовались аксиомой о параллельных, правда, неявно, только в том пункте, где доказывали возможность непрерывного перехода от данной метрики (развёртки) к реализованной[1]). Однако не представляет большого труда провести доказательство этого пункта так, чтобы оно годилось для любого R_K.

Условия, характеризующие внутреннюю метрику произвольной выпуклой поверхности в R_K, могут быть формулированы аналогично условиям, характеризующим внутреннюю метрику выпуклых поверхностей в R_0. Будем говорить, что некоторое *многообразие имеет метрику кривизны $\geqslant K$, если эта метрика внутренняя и для всякого достаточно малого треугольника сумма нижних углов между его сторонами не меньше суммы углов треугольника со сторонами той же длины на поверхности постоянной кривизны K:*

$$\alpha+\beta+\gamma \geqslant \alpha_K+\beta_K+\gamma_K.$$

Нижний угол понимается здесь так, как он был определён в § 9 гл. I и как он понимался нами в гл. VII. Если $K=0$, то $\alpha_K+\beta_K+\gamma_K=\pi$ и «метрика кривизны $\geqslant K$» оказывается метрикой «положительной» кривизны в том смысле, как мы её определили ещё в § 9 гл. I. В предыдущем параграфе мы указали, что на выпуклых поверхностях в R_K углы между кратчайшими существуют в сильном смысле, и что углы между сторонами всякого треугольника не меньше углов плоского (в R_K) треугольника со сторонами той же длины, т. е. $\alpha \geqslant \alpha_K, \beta \geqslant \beta_K, \gamma \geqslant \gamma_K$. Поэтому заведомо $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \alpha_K+\beta_K+\gamma_K$, так что *метрика всякой выпуклой поверхности в R_K есть метрика кривизны $\geqslant K$.*

Подобно теореме, доказанной в гл. VII, имеет место общая теорема для любого R_K.

---

[1]) Именно, мы пользовались построением плоского треугольника с данными основанием и углами при основании. В случае $K \geqslant 0$ условие, что сумма этих углов $<\pi$, достаточно для существования такого треугольника, но при $K<0$ оно уже не достаточно.

Метрика кривизны $\geqslant K$, заданная на сфере, реализуема в R_K посредством замкнутой выпуклой поверхности. (Здесь и дальше мы опять-таки присоединяем к выпуклым поверхностям дважды покрытые выпуклые области на плоскости в R_K.)

Доказательство этой теоремы получается буквальным повторением её доказательства для случая $K=0$, данного в главе VII; нужно лишь сравнивать треугольники из данного многообразия с треугольниками, плоскими в R_K, и в заключение нужно воспользоваться, конечно, теоремой существования многогранника с данной развёрткой в рассматриваемом R_K.

Далее, мы имеем теорему реализуемости в малом:

В многообразии с метрикой кривизны $\geqslant K$ всякая точка имеет окрестность, изометричную выпуклой поверхности в R_K.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство её для случая $K=0$, данное в § 1 гл. VIII.

Теорема о склеивании, доказанная в § 1 гл. VIII (так же как общая теорема о склеивании, доказательство которой было намечено в § 3 гл. IX), обобщается на метрику кривизны $\geqslant K$ совершенно дословно.

Применение этой теоремы в § 3 гл. VIII привело нас к теореме о реализуемости полной метрики положительной кривизны, заданной на плоскости. В случае $K>0$ никакого аналога этой теоремы нет, не только потому, что в сферическом пространстве всякая полная выпуклая поверхность замкнута, но прежде всего потому, что полная метрика кривизны $\geqslant K>0$ может быть задана только на сфере и на проективной плоскости[1]).

Совершенно иначе обстоит дело в случае $K<0$, т. е. в случае пространства Лобачевского. В этом пространстве, как мы показали в § 1, существуют полные выпуклые поверхности, гомеоморфные любой области на сфере. Все они имеют полную метрику кривизны $\geqslant K$. Теоремой реализуемости, дающей характеризацию метрики всех таких поверхностей, будет следующая:

В случае $K<0$ полная метрика кривизны $\geqslant K$, заданная в какой бы то ни было области на сфере, реализуема посредством полной выпуклой поверхности в пространстве Лобачевского кривизны K.

Доказательство этой теоремы проводится на основании теоремы о склеивании подобно тому, как в § 3 гл. VIII было проведено доказательство реализуемости полной метрики кривизны $\geqslant 0$, заданной на плоскости. Разница состоит лишь в том, что если область G, где задана полная метрика, не односвязна, то расширяющиеся многоугольники P_n, покрывающие в конце концов всю область G, не могут быть односвязными. Каждый многоугольник P_n ограничивает в G несколько областей, бесконечных в смысле данной в G метрики. Зададимся каким-нибудь числом $l>0$ и рассмотрим все те многоугольники, содержащие P_n, каждая связная компонента границы которых удалена от P_n не более чем на l. Из полноты метрики вытекает, что среди таких многоугольников существует многоугольник Q_n с наименьшим периметром. Легко доказать, что на каждой связной компоненте границы многоугольника Q_n все углы, кроме, может быть, одного, не превосходят π. (Этот исключительный угол может быть в точке, расстояние которой от P_n как раз равно l.) Поэтому из многоугольника Q_n можно склеить многообразие, гомеоморфное сфере, имеющие метрику кривизны $\geqslant K$. В остальном рассуждения § 3 гл. VIII остаются неизменными. Мы видим, между прочим, что в пространстве Лобачевского теорема реализуемости полной метрики гораздо богаче содержанием и в соответствии с этим теорема о склеивании имеет более богатые приложения.

---

[1]) Метрика кривизны $\geqslant K>0$ есть, очевидно, метрика положительной кривизны с удельной кривизной всюду $\geqslant K>0$, но на плоскости такая метрика должна давать бесконечную полную кривизну, вопреки тому, что полная кривизна метрики положительной кривизны на плоскости всегда $\leqslant 2\pi$.

Наконец, можно доказать следующую общую теорему реализуемости:

Если в области на сфере задана метрика кривизны $\geqslant K$ так, что каждые две точки соединимы кратчайшей, то эта метрика реализуема посредством выпуклой поверхности в R_k.

Для случая $K=0$ эта теорема была рассмотрена, хотя и не доказана, в § 2 гл. VIII. Далее, в § 4 гл. IX были получены дополнительные результаты относительно выпуклых поверхностей, «выпуклых в себе», т. е. таких, на которых каждые две точки соединимы кратчайшей. Если отвлечься от замкнутых поверхностей и боковых поверхностей цилиндров, то в R_0 конечные выпуклые поверхности, «выпуклые в себе» — изометричны «шапкам». В сферическом пространстве имеет место аналогичная теорема. Но в пространстве Лобачевского дело обстоит гораздо сложнее, потому что в нём выпуклые поверхности, «выпуклые в себе», могут быть гомеоморфны любой области на сфере. Мы не знаем, можно ли каждой из них придать некоторую каноническую форму, например так, чтобы подобно «шапке» все ограничивающие её линии были плоскими. Вероятно, применяя теорему о склеивании, этот любопытный вопрос можно решить без особых трудностей.

Рассмотрим теперь связь общей метрики кривизны $\geqslant K$ с метрикой, задаваемой линейным элементом с определённой гауссовой кривизной. Известно, что если на регулярной поверхности гауссова кривизна всюду $\geqslant K$, то углы всякого треугольника на такой поверхности не меньше углов треугольника со сторонами той же длины на поверхности постоянной кривизны K. Для малых треугольников этот результат был, по существу, установлен ещё Гауссом. Из него следует, что регулярная поверхность с гауссовой кривизной $\geqslant K$ имеет метрику кривизны $\geqslant K$. Так как на всякой регулярной конечной поверхности гауссова кривизна заведомо ограничена снизу, т. е. не меньше некоторого K, то тем самым внутренняя геометрия поверхностей, имеющих метрику кривизны $\geqslant K$, включает в частности внутреннюю геометрию всех конечных регулярных поверхностей. Всякая такая метрика, по крайней мере в малом, реализуема выпуклой поверхностью в соответствующем пространстве Лобачевского; поэтому можно сказать, что *внутренняя геометрия выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского включает внутреннюю геометрию малых областей всех регулярных поверхностей вообще. Следовательно, переход к выпуклым поверхностям в пространстве Лобачевского позволяет нам охватить всю внутреннюю дифференциальную геометрию «в малом».*

Далее, на регулярной поверхности, гомеоморфной сфере, гауссова кривизна ограничена снизу. Поэтому всякая такая поверхность изометрична замкнутой выпуклой поверхности в пространстве Лобачевского (кривизна которого не больше минимума гауссовой кривизны на этой поверхности). Следовательно, с точки зрения внутренней геометрии, регулярные поверхности, гомеоморфные сфере, содержатся среди выпуклых поверхностей пространства Лобачевского.

В § 1 гл. XI мы показали, что если на выпуклой поверхности эвклидова пространства в каждой точке существует гауссова кривизна, то метрику такой поверхности можно задать линейным элементом в геодезических полярных координатах. При этом имеют силу все основные формулы внутренней дифференциальной геометрии.

Совершенно такой же результат имеет место для выпуклых поверхностей в любом R_k и выводится он точно так же. Это позволяет дать абстрактное определение метрики, задаваемой линейным элементом с любой гауссовой кривизной. Именно, можно доказать следующую теорему:

Пусть в двумерном многообразии R задана внутренняя метрика, удовлетворяющая следующему условию:

Пусть α, β, γ — нижние углы треугольника T в R, а σ_0 — площадь эвклидовского треугольника со сторонами той же длины. Положим

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\sigma_0}=\overrightarrow{x}(T).$$

Условие состоит в том, что всякий раз, когда треугольник T_n сжимается к какой-нибудь данной точке X, величины $\overline{\varkappa}(T_n)$ сходятся к определённому пределу $K(X)$.

При этом условии в окрестности всякой точки многообразия R можно ввести геодезические полярные координаты r, φ и в них задать метрику многообразия линейным элементом

$$ds^2 = dr^2 + B^2 d\varphi^2.$$

Коэффициент B будет иметь непрерывные производные $\frac{\partial B}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 B}{\partial r^2}$. Будут также иметь место все классические формулы внутренней дифференциальной геометрии: формула Гаусса для кривизны $K(X) = K(r, \varphi)$:

$$\frac{\partial^2 B(r, \varphi)}{\partial r^2} + K(r, \varphi) B(r, \varphi) = 0,$$

формула для геодезической кривизны кривой $\varphi = \varphi(r)$ в форме

$$k = \frac{(B\varphi')' + [1 + (B\varphi')^2]\varphi'}{[1 + (B\varphi')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

а также формулы для длины, площади и угла между кривыми.

Таким образом, данная теорема даёт чисто метрическое определение «гауссовой» метрики, к которой применим, в основном, весь аппарат классической внутренней геометрии поверхностей.

Эта теорема есть простое следствие ранее формулированных результатов. Действительно, поскольку величина

$$\overline{\varkappa}(T) = \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{\sigma_0}$$

имеет предел при T, сжимающихся к точке, постольку в малой окрестности всякой точки она ограничена, т. е. для всякой малой области U существуют такие K_1 и K_2, что

$$K_1\sigma_0 \geqslant \alpha + \beta + \gamma - \pi \geqslant K_2\sigma_0.$$

Если σ_K — площадь треугольника на поверхности постоянной кривизны K, имеющего стороны той же длины, что данный треугольник T, то отношение $\frac{\sigma_K}{\sigma_0}$ стремится к единице, когда длина наибольшей стороны треугольника T стремится к нулю. Поэтому можно указать такое K, что для всех достаточно малых треугольников T в области U будет

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi \geqslant K\sigma_K,$$

а так как

$$K\sigma_K = \alpha_K + \beta_K + \gamma_K - \pi,$$

то тем самым

$$\alpha + \beta + \gamma \geqslant \alpha_K + \beta_K + \gamma_K,$$

т. е. метрика в области U будет метрикой кривизны $\geqslant K$. Следовательно, мы можем воспользоваться всеми свойствами этой метрики.

Если σ — площадь самого треугольника T, а ω — его кривизна и d — диаметр, то, как было отмечено в § 1,

$$0 \leqslant \sigma - \sigma_K \leqslant \frac{1}{2}[\omega - K\sigma_K] d^2.$$

И так как

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi \leqslant K_1\sigma_0$$

и при $d \to 0$ отношение $\frac{\sigma_k}{\sigma_0} \to 1$, то точно так же $\frac{\sigma}{\sigma_0} \to 1$. Поэтому из существования предела величин

$$\bar{\varkappa}(T) = \frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\sigma_0}$$

следует существование такого же предела удельных кривизн

$$\varkappa(T) = \frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{\sigma}.$$

Таким образом, метрика, удовлетворяющая условиям теоремы, оказывается метрикой кривизны $\geqslant K$, имеющей всюду определённую гауссову кривизну. А для такой метрики мы можем воспользоваться рассуждениями § 1 гл. XI.

§ 3. Поверхности знакопеременной кривизны.

Хотя внутренняя геометрия выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского включает внутреннюю геометрию малых областей всех регулярных поверхностей, но она, например, заведомо не охватывает внутреннюю геометрию всех многогранников. Многогранник, вокруг некоторых вершин которого полный угол превосходит 2π, не может быть изометричен выпуклой поверхности, потому что на выпуклой поверхности полный угол вокруг всякой точки $\leqslant 2\pi$. Поэтому встаёт задача расширить ещё дальше класс исследуемых поверхностей так, чтобы он включал все возможные многогранники, а также все те поверхности, которые допускают достаточно хорошее приближение многогранниками. Конечно, понятие хорошего приближения многогранниками является несколько неопределённым, но во всяком случае речь должна итти о тех поверхностях, внутренняя метрика которых допускает приближение многогранными метриками.

Помимо возможности приближения многогранными метриками, внутренняя метрика подлежащих изучению поверхностей должна обладать также другими свойствами, для того чтобы их внутренняя геометрия могла быть развита столь же содержательно, как внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Прежде всего нужно, конечно, чтобы между всякими двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существовал определённый угол. Далее, в нашей внутренней геометрии выпуклых поверхностей, так же, как в гауссовой внутренней геометрии регулярных поверхностей, чрезвычайно важную основную роль играет понятие кривизны и, в частности, её свойство полной аддитивности. Поэтому естественно искать класс таких поверхностей, на которых можно определить кривизну как вполне аддитивную функцию множества.

Эти общие соображения приводят к следующим двум рядам условий, которые естественно наложить на те поверхности, которые хотелось бы и можно было бы исследовать нашими методами (мы будем для простоты иметь в виду поверхности в эвклидовом пространстве):

I. Для поверхности F должна существовать сходящаяся к ней последовательность многогранников P_n, удовлетворяющая следующим условиям: 1) Если точки X_n, Y_n на P_n сходятся соответственно к точкам X, Y на F, то расстояния $\rho_{P_n}(X_nY_n)$ сходятся к расстоянию $\rho_F(XY)$. 2) Суммы абсолютных величин кривизн вершин многогранников P_n должны быть ограничены в совокупности (кривизна ω вершины равна 2π минус полный угол θ вокруг этой вершины, и если $\theta > 2\pi$, то $\omega < 0$).

II. Внутренняя метрика поверхности F должна удовлетворять двум условиям: 1) Между каждой парой кратчайших, исходящих из одной точки, существует определённый угол. 2) Суммы абсолютных величин избытков треугольников на поверхности F должны быть ограничены в совокупности для треугольников с непересекающимися сторонами (избыток треугольника есть сумма его углов без π, т. е. $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, и если $\alpha+\beta+\gamma<\pi$, то $\alpha+\beta+\gamma-\pi<0$).

Условия I 2) и II 2) как раз должны обеспечивать существование кривизны на поверхности F. Кривизна должна определяться через избытки треугольников, и без условия II 2) она не может быть вполне аддитивной функцией, не имеющей бесконечных значений. Поэтому условие II 2) необходимо.

Оказывается, что оба ряда условий I и II равносильны с внутренней геометрической точки зрения. А именно, имеет место теорема: *Пусть R — многообразие с внутренней метрикой ρ. Два ряда условий* I* *и* II* *оказываются эквивалентными:*

I*. *Во всяком многоугольнике P метрика ρ допускает равномерное приближение многогранными метриками ρ_n, у которых суммы абсолютных величин кривизн вершин ограничены в совокупности.*

II*. 1) *Между каждой парой кратчайших в F, исходящих из одной точки, существует определённый угол, и* 2) *для всякого многоугольника P сумма абсолютных величин избытков, содержащихся в P треугольников с непересекающимися сторонами, не должна превосходить какого-нибудь числа, зависящего только от P.*

Можно доказать, что *условиям* I, *а следовательно, и* II *удовлетворяет всякая поверхность, представимая в прямоугольных координатах уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ есть разность выпуклых функций, и тем самым — всякая поверхность, которую можно покрыть конечным числом таких поверхностей.*

Однако эти поверхности не исчерпывают всех поверхностей, удовлетворяющих условиям I, хотя, может быть, они представляют собой в каком-то отношении большинство их. Во всяком случае здесь намечается широкий класс поверхностей, внутренняя геометрия которых должна допускать столь же содержательное развитие, как внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Но теория этих поверхностей пока ещё не разработана, и потому то, что мы говорим о них ниже, является указанием на встающие задачи в не меньшей степени, чем изложением готовых результатов.

О поверхностях F или о многообразиях R, удовлетворяющих условиям I (или I*), а, следовательно, и II (или II*), можно доказать следующее:

1. На поверхности F между двумя кратчайшими, исходящими из одной точки, существует угол в сильном смысле.

2. Общие теоремы о сложении углов и об углах секторов, полученные в §§ 1 и 3 гл. IV, имеют место и на поверхностях F.

3. Из каждой точки на поверхности F кратчайшие исходят почти во всех направлениях (в смысле угловой меры).

4. Для каждой точки O поверхности F существует конус, окрестность вершины которого с точностью до малых высшего порядка изометрична окрестности точки O. Полный угол вокруг вершины этого конуса равен полному углу вокруг точки O в смысле определения, данного в § 3 гл. IV.

5. Всякий многоугольник на поверхности F имеет площадь в смысле введённого нами внутреннего определения посредством разбиения на треугольники.

6. Пусть T — треугольник на F, T_0 — плоский треугольник со сторонами той же длины, а ω^+ и ω^- — точные верхняя и нижняя границы избытков треугольников, содержащихся в T. Для каждой пары соответственных углов α и α_0 треугольников T и T_0 имеет место неравенство:

$$\omega^- \leqslant \alpha-\alpha_0 \leqslant \omega^+.$$

7. Определим для двух исходящих из одной точки O кратчайших L, M на поверхности F угол $\gamma(x, y)$ плоского треугольника так, как это делается в условии выпуклости. Если x и y заданы как возрастающие функции параметра t, то угол $\gamma(x(t), y(t))$, как функция t, будет функцией ограниченной

вариации, т. е. разностью монотонных функций. Это является обобщением условия выпуклости.

Можно указать ещё ряд других результатов, аналогичных тем, какие были получены для выпуклых поверхностей. Однако многие вопросы остаются пока не решёнными. Прежде всего следует поставить вопрос о тех условиях, при которых метрика, заданная в абстрактном многообразии, реализуема хотя бы в малом посредством поверхности рассматриваемого класса. Пространственная форма таких поверхностей не изучена. Неизвестно, какие геометрические свойства поверхности обеспечивают возможность её задания уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ есть разность выпуклых функций. Наконец, на эти поверхности нужно обобщить теорему Гаусса, причём остаётся даже неизвестным, как следует определять сферическое изображение поверхности. Для поверхностей, у которых в каждой точке есть касательная плоскость, это делается обычным путём: для выпуклых поверхностей мы воспользовались опорными плоскостями; но для невыпуклых негладких поверхностей нужно поступать как-то иначе.

Внутренняя кривизна не может быть определена здесь так же просто, как в случае выпуклых поверхностей. Если полный угол вокруг точки X равен θ, то кривизна точки определяется по формуле $\omega(X)=2\pi-\theta$. Здесь θ может быть больше 2π, а через такую точку может проходить кратчайшая. Например, через вершину конуса с полным углом $>2\pi$ проходят кратчайшие. В то время как точки с полным углом $<2\pi$ как бы отталкивают кратчайшие, точки с полным углом $>2\pi$ их, напротив, притягивают. Если на конусе с полным углом $\theta>2\pi$ провести три образующие, делящие его на три сектора U_1, U_2, V с углами π, π, $\theta-2\pi$, то все точки сектора V соединяются с точками образующей, разделяющей секторы U_1, U_2 кратчайшими, проходящими через вершину конуса. Поскольку на кратчайшей могут лежать точки с кривизной <0, кривизна самой кратчайшей не может считаться равной нулю. Кроме того, кратчайшая, являющаяся стороной какого-нибудь треугольника, проходя через точки с кривизной <0, может ломаться, образовывая сектор с углом $>\pi$. Поэтому даже на многограннике кривизна внутренней области треугольника может не равняться сумме углов при его вершинах минус π.

Возьмём, например, конус с полным углом $\theta>2\pi$ и построим на нём треугольник ABC так, чтобы его сторона BC проходила через вершину конуса O и образовывала сектор, содержащийся в треугольнике, имеющий угол $\theta-\pi$; этот угол будет больше π. Треугольник ABC можно рассматривать как четыреугольник $ABOC$ с углами α, β, $\theta-\pi$, γ. Этот четыреугольник можно развернуть на плоскость. Поэтому, во-первых, $\alpha+\beta+(\theta-\pi)+\gamma=2\pi$, т. е. $\alpha+\beta+\gamma=3\pi-\theta<\pi$, а, во-вторых, кривизну внутренней области этого четыреугольника, т. е. треугольника ABC, нужно, конечно, считать равной нулю. Между тем сумма углов треугольника ABC минус π будет $\alpha+\beta+\gamma-\pi<0$.

В случае немногогранной поверхности положение ещё более усложняется, потому что там кратчайшая может иметь не только изломы, которые ещё легко учесть, но на ней кривизна может быть, так сказать, распределена непрерывно. Возьмём, например, два экземпляра плоской области, внешней по отношению к какому-нибудь кругу, и склеим оба эти экземпляра друг с другом по ограничивающим их окружностям. Получится поверхность, дважды покрывающая внешнюю область круга и имеющая окружность L этого круга в качестве ребра. Эта поверхность допускает, конечно, хорошее приближение многогранниками. Очевидно, что дуга окружности, меньшая полуокружности, является на этой поверхности кратчайшей. Во всех точках этой окружности касательный конус имеет полный угол, равный 2π, но все же её кривизна не может считаться равной нулю, а должна быть принята равной -4π.

Возьмём на одном из листов нашей поверхности квадрат, охватывающий окружность L. Вместе с окружностью L он ограничивает геодезический многоугольник P с эйлеровой характеристикой $\chi=0$ и с четырьмя углами, равными $\frac{\pi}{2}$. Если определять кривизну внутренней области многоугольника так же, как в случае выпуклой поверхности, т. е. по формуле

$$\omega = 2\pi\chi - \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

то мы получили бы $\omega(P) = -2\pi$. А между тем, кривизна внутренней области многоугольника P должна равняться нулю, так как он представляет собою кусок плоскости. Всё это показывает, что в случае невыпуклых поверхностей требуется новое определение кривизны. Однако мы не будем излагать здесь это определение, оставив открытым вопрос о наиболее удачном его выборе.

Из нерешённых пока задач можно указать ещё на вопрос о существовании полукасательной к кратчайшей на поверхности, задаваемой разностью выпуклых функций или допускающей хорошее приближение многогранниками. С этим связан также вопрос о внешне геометрическом смысле направления кривой и угла между кривыми, и далее, вопрос о повороте кривой и о его внешне геометрическом смысле. Последний вопрос остаётся пока неизученным даже для выпуклых поверхностей, как это уже было подчёркнуто в § 2 гл. IX. Наконец, перед нами откроется широкое поле задач внутренней геометрии рассматриваемых поверхностей, касающихся свойств кратчайших, геодезических, треугольников, окружностей и выпуклых областей, экстремальных задач, подобных решённым в § 3 гл. X, и т. д. и т. п. Можно надеяться, что развитие намечающейся здесь теории приведёт не только к ещё более широкому обобщению классической внутренней геометрии, но даст также новые интересные, геометрически наглядные результаты.

В этой теории господствуют две точки зрения, отличающие её от классической дифференциальной геометрии. Во-первых, в то время, как в этой последней кривые и поверхности задаются функциями, взятыми из анализа, в новой теории мы исходим из конструктивного принципа: поверхность рассматривается как предел многогранников, и свойства её определяются тем, как и какими многогранниками к ней можно приближаться. С этой точки зрения выпуклые поверхности определяются как пределы выпуклых многоугольников, а, например, гладкие поверхности определяются как такие, которые можно аппроксимировать многоугольникам так, что если точки X_n этих многоугольников сходятся, то плоскости граней, проходящих через эти точки X_n, также сходятся. Во-вторых, вместо дифференциальных понятий линейного элемента, гауссовой кривизны и т. п., мы берём за основу интегральные понятия расстояния, кривизны, как функции множества и т. п. Та же точка зрения в особенно простой форме может быть проведена в теории кривых, которые следует трактовать как пределы ломаных, определяя посредством приближения ломаными длину, интегральную кривизну и интегральное кручение кривой.

В заключение остановимся ещё на одном классе поверхностей, свойства которых в некотором смысле противоположны свойствам выпуклых поверхностей Это — поверхности отрицательной кривизны. Многогранник отрицательной кривизны характеризуется тем, что вокруг всякой его вершины полный угол больше 2π. Соответственно определяется многогранная метрика отрицательной кривизны.

Рассмотрим поверхность, внутренняя метрика которой может быть получена как предел многогранных метрик отрицательной кривизны. На такой поверхности сумма углов треугольника всегда $\leqslant \pi$, а полный угол вокруг всякой точки $\geqslant 2\pi$. Метрика такой поверхности удовлетворяет условию «вогнутости», т. е. угол $\gamma(x, y)$, определённый так же, как в условии выпуклости, оказывается неубывающей функцией x и y. Всякая регулярная поверхность отрицательной кривизны обладает этими свойствами. Если из кусков регулярных поверхностей отрицательной кривизны склеить новую поверхность так, что сумма поворотов склеиваемых отрезков границ будет всегда неположительна, то получим поверхность с такими же свойствами. Здесь мы встречаемся с операцией склеивания, которая в случае общих невыпуклых поверхностей также даёт простой и наглядный метод доказательства. Отметим одну теорему, в доказательстве которой удобно воспользоваться именно этим методом: На поверхности отрицательной кривизны площадь геодезического многоугольника, гомеоморфного кругу, не больше, чем площадь вписанного в круг плоского многоугольника со сторонами той же длины (в частности, площадь треугольника в вогнутой метрике не больше, чем площадь плоского треугольника со сторонами той же длины). Площадь же любой области, гомеоморфной кругу, не больше, чем площадь плоского круга, длина окружности которого равна длине кривой, ограничивающей рассматриваемую область. Следовательно, если S — площадь области, а l — длина ограничивающей её кривой, то $S \leqslant \frac{l^2}{4\pi}$. Знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда область изометрична плоскому кругу.

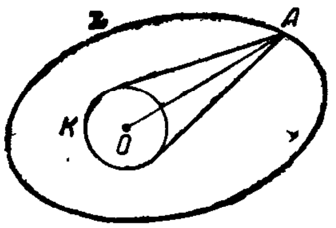
ДОПОЛНЕНИЕ.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ.

В этом Дополнении излагаются все те основные сведения о выпуклых телах, которые используются в нашей книге. Ограничиваясь только самым необходимым, мы ни в какой мере не претендуем на полноту изложения основ теории выпуклых тел[1]). Все доказанные здесь результаты известны каждому, кто имел случай познакомиться с началами этой теории, и потому осведомлённый читатель может не читать настоящего Дополнения без ущерба для понимания основного содержания книги.

§ 1. Выпуклые области и кривые.

Выпуклым называется такое множество точек, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и весь соединяющий их прямолинейный отрезок. *Выпуклой областью* мы называем выпуклое замкнутое множество на плоскости, имеющее внутренние точки. Примерами выпуклых областей могут служить круг, область, ограниченная параболой, полуплоскость, полоса между парой параллельных прямых и т. п. Отрезок, круг с исключённой окружностью, одна точка представляют примеры выпуклых множеств, не являющихся выпуклыми областями в смысле данного определения. Выпуклую область мы называем *конечной*, если она помещается в каком-либо круге.



Черт. 98.

Граница конечной выпуклой области называется *замкнутой выпуклой кривой*. Границей множества, как известно, называется множество всех тех точек, в любой окрестности которых имеются как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему. Полезно иметь в виду тот легко доказываемый факт, что граница всегда является замкнутым множеством. Конечно, термин «замкнутая» кривая, так же, как термин «замкнутая» поверхность, имеет совершенно иной источник.

Теорема 1. *Замкнутая выпуклая кривая гомеоморфна окружности.*

Пусть L — замкнутая выпуклая кривая и G — выпуклая область, границей которой является кривая L. Возьмём внутри области G точку O (черт. 98). Всякая полупрямая, исходящая из O, пересекает кривую L, так как иначе область G не была бы конечной. Вместе с тем всякая такая полупрямая пересекает кривую L только в одной точке. Действительно, допустим, что какая-то полупрямая, исходящая из точки O, пересекает L в двух точках A и B, причём, например, точка A лежит дальше от O, чем B. Так как точка O лежит внутри области G, то вокруг неё можно описать круг K, целиком лежащий

[1]) Эта теория создана работами Брунна и Минковского в конце XIX столетия и развивалась потом рядом геометров. См., например, H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II. W. Blaschke, Kreis und Kugel; T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper.

в G. Соединяя точку A со всеми точками круга K, мы получим фигуру, ограниченную касательными к кругу K, проведёнными из A, и дугою круга K. Эта фигура лежит в области G, так как вследствие выпуклости области G всякий отрезок, соединяющий A с любой точкой из круга K, лежит в области G. Но наша фигура содержит внутри себя весь отрезок AO, исключая только точку A; следовательно, она содержит внутри себя точку B. Таким образом, точка B тем более лежит внутри области G, а не на её границе.

Из доказанного следует, что проектируя из точки O кривую L на окружность C круга K, мы получаем взаимно однозначное соответствие между точками окружности и кривой L. Докажем, что это соответствие будет также взаимно непрерывным. При непрерывном движении точки X по кривой L отрезок OX вращается непрерывно, и потому соответствующая точка Y на окружности C также движется непрерывно. Для доказательства обратной непрерывной зависимости точки X от точки Y достаточно доказать, что если точки Y_i на окружности сходятся к точке Y, то соответствующие точки X_i на кривой L сходятся к точке X, соответствующей точке Y. Так как кривая L ограничена, то из точек X_i можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; предельная точка $\overline{X}$ этой подпоследовательности также принадлежит L (L есть граница области G и, как всякая граница, является замкнутым множеством). Вместе с тем, точка $\overline{X}$ лежит на полупрямой, проведённой из точки O через точку Y, потому что Y_i сходятся к Y. Поэтому из доказанного выше следует, что точка $\overline{X}$ совпадает с X. Таким образом, всякая сходящаяся подпоследовательность точек X_i сходится к точке X, и потому вся их последовательность сходится к X, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что всякую замкнутую выпуклую кривую можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно спроектировать на окружность, т. е. всякая замкнутая выпуклая кривая L гомеоморфна окружности. Поэтому, в частности, каждые две точки замкнутой кривой разбивают её на две дуги. *Выпуклой прямой* мы будем называть любую такую дугу замкнутой выпуклой кривой.

Опорной прямой к множеству M называется прямая, имеющая с M хотя бы одну общую точку и такая, что всё множество M лежит в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой, причём к полуплоскости относится, конечно, и самая прямая.

Теорема 2. *Через каждую точку выпуклой кривой проходит хотя бы одна опорная прямая к этой кривой.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать, что через всякую точки границы любой выпуклой области проходит опорная прямая к этой области. Пусть G — выпуклая область и A — точка на её границе. Проведя из точки A полупрямые через все точки области G, мы получим угол V. Если точки X и Y лежат на проведённых полупрямых, то на этих полупрямых имеются точки X_0 и Y_0 из области G. Отрезок X_0Y_0 принадлежит G, а потому отрезок XY принадлежит углу V. Следовательно, угол V — выпуклый. Он, правда, может не содержать своих сторон; это будет, например, в том случае, когда область G есть круг. Однако мы присоединим к углу V его стороны. Так как угол V — выпуклый, то любая его сторона вместе с её продолжением образует прямую, опорную к нему в его вершине. А так как область G содержится в угле V и точка A лежит на границе G, то эта прямая будет опорной также к области G в точке A.

Теорема 3. *Всякая выпуклая кривая спрямляема, т. е. имеет определённую длину; и если замкнутая кривая L_1 охватывает выпуклую кривую L, то длина L не больше длины L_1.*

Доказательство. Если замкнутая ломаная L_1 охватывает замкнутую выпуклую ломаную L, то длина L меньше длины L_1. Действительно, продолжая одно из звеньев ломаной L в обе стороны до пересечения с ломаной L_1, мы отрежем от L_1 ломаную L_1', также охватывающую L, но имеющую длину, меньшую чем L_1. Продолжая эту операцию, мы вырежем ломаную L из области, ограниченной ломаной L_1. И так как с каждым шагом длина охватывающей ломаной убывает, то длина L меньше длины L_1.

Пусть теперь L — замкнутая выпуклая кривая и L_1 — любая охватывающая её ломаная. Легко убедиться в том, что всякая ломаная, вписанная в выпуклую кривую, будет выпуклой (доказательство предоставляем читателю)[1]. Поэтому из только что доказанного следует, что длина всякой ломаной, вписанной в кривую L, меньше длины ломаной L_1. Следовательно, существует точная верхняя граница длин вписанных ломаных, т. е. кривая L имеет длину.

Всякая дуга спрямляемой кривой также спрямляема, и раз всякая замкнутая выпуклая кривая спрямляема, то и любая выпуклая кривая спрямляема.

Теперь вторая часть нашей теоремы следует из только что доказанного аналогичного утверждения для ломаных; достаточно сделать очевидный предельный переход.

§ 2. Выпуклые тела. Опорная плоскость.

Выпуклым телом называется выпуклое замкнутое множество в трёхмерном пространстве, имеющее внутренние точки; на плоскости роль выпуклых тел играют выпуклые области. *Замкнутой выпуклой поверхностью* мы называем границу конечного выпуклого тела.

Теорема 1. *Если выпуклое множество не лежит в одной плоскости, то оно содержит внутренние точки.*

Доказательство. Пусть выпуклое множество M не лежит в одной плоскости. Тогда в нём имеются четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Отрезок AB содержится в M, так как M выпукло. По той же причине отрезок, соединяющий точку C с любой точкой отрезка AB, также содержится в M и, следовательно, весь треугольник ABC содержится в M. Поэтому, в силу выпуклости M, отрезок, соединяющий точку D с любой точкой треугольника ABC, также содержится в M. Это означает, что весь тетраэдр $ABCD$ содержится в M, так что M имеет внутренние точки.

Из этой теоремы ясно, что выпуклые замкнутые множества могут быть четырёх типов: 1) выпуклые тела; 2) плоские выпуклые области; 3) части прямой: отрезок, полупрямая, прямая; 4) точка.

Выпуклые тела, в свою очередь, могут быть пяти топологически различных типов:

1) конечные выпуклые тела; они гомеоморфны шару; например, эллипсоид, куб и т. п.;

2) бесконечные выпуклые тела, гомеоморфные полупространству; например, тело, ограниченное параболоидом вращения;

3) бесконечные выпуклые цилиндры; они гомеоморфны круговому цилиндру;

4) слои между парами параллельных плоскостей;

5) всё пространство.

Довольно очевидно, что все эти типы топологически различны, т. е. тело одного типа не может быть взаимно однозначно и взаимно непрерывно преобразовано в тело другого типа. То, что этими типами исчерпываются все возможные топологические типы выпуклых тел, доказывается здесь в § 4.

---

[1]) Например, можно воспользоваться понятием выпуклой оболочки, определяемым далее в § 5. Беря выпуклую оболочку конечного числа точек, лежащих на выпуклой кривой L, мы получим выпуклый многоугольник, и его граница будет выпуклой ломаной, вписанной в L. Под вписанной ломаной всегда понимают ломаную, получающуюся, если соединять отрезками некоторые точки кривой в порядке их расположения на кривой. Порядок точек на выпуклой кривой определяется естественно, поскольку доказано, что замкнутая выпуклая кривая гомеоморфна окружности.

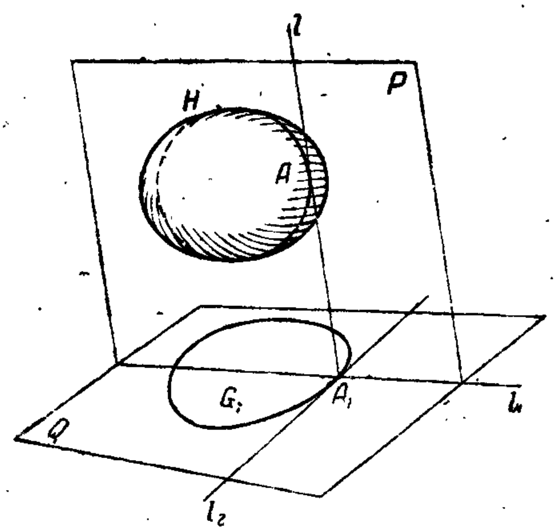
Теорема 2. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Действительно, если точки X и Y принадлежат выпуклым множествам M_i, т. е. принадлежат их пересечению, то отрезок XY содержится в каждом из этих множеств, т. е. содержится в их пересечении; это и требовалось доказать.

Так как плоскость есть выпуклое множество, то из этой теоремы следует, что плоскость, проходящая через внутренние точки выпуклого тела, пересекает его по выпуклой области, а его границу — по выпуклой кривой.

Плоскость P называется опорной к множеству M в его точке A, если она проходит через точку A и всё множество M лежит по одну сторону от неё, т. е. M лежит целиком в одном из полупространств, определяемых плоскостью P, причём к полупространству присоединяется также и сама плоскость P.

В частности, если множество лежит в одной плоскости, то эта плоскость является опорной к нему во всякой его точке. Плоскость грани куба — опорная к кубу в любой точке этой грани. Через вершину куба можно провести бесконечно много опорных плоскостей. Касательная плоскость к поверхности выпуклого тела — всегда опорная.



Черт. 99.

Теорема 3. *Выпуклое тело имеет хотя бы одну опорную плоскость в каждой точке своей границы.*

Доказательство. Пусть A — точка на границе выпуклого тела H (черт. 99). Проведём через точку A и любую внутреннюю точку тела H плоскость P. Она пересечёт H по какой-то выпуклой области G. По доказанному в § 1, в точке A область G имеет опорную прямую l. Возьмём плоскость Q, перпендикулярную к прямой l, и спроектируем тело H на эту плоскость. В проекции получится выпуклая область G_1 (доказательство того, что проекция выпуклого тела есть выпуклая область, очевидно).

Пусть A_1 — проекция точки A на плоскость Q. Прямая l, являясь опорной к области G в точке A, делит плоскость P на две части, в одной из которых нет точек области G и тем самым нет точек тела H. Поэтому прямая l_1, по которой пересекаются плоскости P и Q, делится точкой A на две части, одна из которых вовсе не содержит точек проекции тела H. Следовательно, точка A_1 лежит на границе проекции тела H, т. е. на границе области G_1. В таком случае, через точку A проходит прямая l_0, опорная к области G_1.

Плоскость R, проходящая через прямые l и l_2, является опорной к телу H в точке A. Действительно, так как проекция тела H лежит по одну сторону от прямой l_2, то самое тело H лежит по одну сторону от плоскости R. Кроме того, плоскость R проходит через точку A.

Заметим, что для выпуклых множеств, не имеющих внутренних точек, теорема тривиальна: по теореме 1 такое множество лежит в одной плоскости и, следовательно, эта плоскость — опорная в любой точке множества.

Внешней нормалью к опорной плоскости множества M называется единичный вектор, перпендикулярный к этой плоскости и направленный в то полупространство, в котором нет точек множества M. Если множество M лежит в своей опорной плоскости, то обе нормали — внешние. Если n — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, а h — расстояние плоскости от начала координат, считаемое положительным от начала в направлении n и отрицательным — в противоположном направлении, то уравнение плоскости может быть написано в известной нормальной форме:

$$nx = h,$$

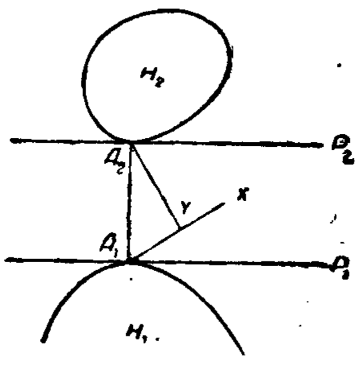
где x — текущий вектор, проведённый из начала.

Если n — внешняя нормаль к опорной плоскости множества M, то множество M лежит в полупространстве, определяемом неравенством

$$nx \leqslant h.$$

Теорема 4. *Если замкнутые выпуклые множества H_1 и H_2 не имеют общих точек и одно из них ограничено, то на них имеется пара ближайших точек A_1 и A_2. В этих точках имеются опорные плоскости к множествам P_1 и P_2, перпендикулярные к отрезку A_1A_2. Каждая из этих плоскостей отделяет одно множество от другого.*

Доказательство. Если множество H_2 ограничено, то в нём есть точка A_2, ближайшая к множеству H_1 [1]. Тогда в множестве H_1 есть точка A_1, ближайшая к A_2. Проведём через точку A_1 плоскость P_1, перпендикулярную отрезку A_1A_2 (черт. 100). Допустим, что в множестве H_1 есть какая-нибудь точка X, лежащая по ту же сторону от плоскости P_1, что и точка A_2. Тогда из выпуклости H_1 следует, что весь отрезок A_1X лежит в множестве H_1. Так как точки X и A_2 лежат по одну сторону от плоскости P_1, то перпендикуляр, опущенный из точки A_2 на прямую A_1X, пересекает эту прямую в какой-то точке Y, лежащей на отрезке AX. Так как отрезок A_1X содержится в множестве H_1, то точка Y принадлежит H_1. Перпендикуляр A_2Y короче наклонной A_2A_1, и, следовательно, точка Y лежит к A_2 ближе, чем A_1.



Черт. 100.

Это, однако, противоречит тому, что точка A_1 — ближайшая к точке A_2 из всех точек множества H_1. Следовательно, множество H_1 не имеет точек в том полупространстве, где лежит точка A_2. Это означает, что плоскость P_1 — опорная к множеству H_1.

Совершенно так же доказывается, что плоскость P_2, проведённая через точку A_2 перпендикулярно к отрезку A_1A_2, будет опорной к множеству H_2. Плоскости P_1 и P_2 параллельны. Плоскость P_1 разбивает пространство на два полупространства, и мы показали, что в том из них, где лежит точка A_2, нет точек множества H_1. Аналогичное верно для плоскости P_2. Отсюда делается очевидным, что слой между плоскостями P_1 и P_2 не содержит точек ни из H_1, ни из H_2 и разделяет эти множества.

Доказанная теорема формулируется особенно просто, если множество H_2 сводится к одной точке A_2. Тогда в H_1 есть точка A_1, ближайшая к точке A_2, и плоскость, перпендикулярная к отрезку A_1A_2 в точке A_1, является опорной к H_1 и отделяет точку A_2 от множества H_1.

§ 3. Выпуклый конус.

Выпуклый конус есть выпуклое тело, образованное полупрямыми, исходящими из одной точки, — вершины конуса; при этом случай, когда конус представляет всё пространство, исключается. Двугранный угол и полупростран-

---

1) Пусть точки X_1 и X_2 принадлежат соответственно H_1 и H_2. Пусть $\rho(X_1X_2)$ — расстояние между ними. Расстоянием точки X_2 от множества H_1 называется точная нижняя граница расстояний $\rho(X_1X_2)$ при X_1, пробегающем всё H_1. Пусть $r(X_2)$ — эта точная нижняя граница. Ближайшей точкой к H_1 будет та, для которой $r(X_2)$ имеет минимум. Легко доказать, что $r(X_2)$ есть непрерывная функция точки X_2 и тогда из замкнутости и ограниченности множества H_2 следует, что в H_2 существует точка, для которой $r(X_2)$ имеет минимум.

ство являются частными случаями конуса. В основном тексте выпуклым конусом мы называем, однако, **поверхность** такого телесного конуса. Пусть K — выпуклый конус с вершиной O. Если вокруг O описать единичную сферу S, т. е. сферу, радиус которой равен единице, то конус K вырежет из S некоторую область G. Эта область лежит на полусфере, именно, на одной из тех полусфер, которую отсекает любая плоскость, опорная к конусу K в его вершине. Область G будет сферически выпуклой, т. е. меньшая из дуг большого круга, соединяющая две любые точки области G, принадлежит области G. Доказательство этого утверждения легко получается из выпуклости конуса K.

Взяв внутри области G точку A и описав вокруг неё малый круг, мы можем проводить из A дуги больших кругов до пересечения их с границей области G. Тогда, повторяя рассуждения, доказывающие теорему 1 § 1, мы докажем, что граница области G есть кривая, гомеоморфная окружности. Мы называем её *сферически выпуклой кривой*. Для сферических ломаных (т. е. линий, составленных из дуг больших кругов), лежащих на одной полусфере, можно доказать, что если ломаная L_1 охватывает сферически выпуклую ломаную L, то длина L не больше длины L_1. Доказательство дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения для ломаных на плоскости, данное в § 1. Поэтому, повторяя рассуждения, доказывающие теорему 3 § 1, мы докажем, что длина сферически выпуклой кривой не больше длины охватывающей её кривой, лежащей на той же полусфере. В частности, она не больше длины экватора полусферы, т. е. не больше 2π, так как радиус сферы равен единице. Если разрезать поверхность конуса по какой-либо образующей и развернуть её на плоскость, то кривая L, по которой поверхность конуса K пересекла сферу S, перейдёт в дугу единичной окружности. Центром этой окружности будет точка, в которую переходит вершина конуса. Так как длина кривой L не больше 2π, то угол, который при развёртывании покрывает поверхность конуса K, будет не больше 2π. Этот угол мы называем *полным углом при вершине конуса* K. Если, в частности, конус K есть многогранный угол, то полный угол при его вершине равен сумме его плоских углов. Следовательно, сумма плоских углов выпуклого многогранного угла не превосходит 2π. Легко видеть, что она всегда меньше 2π, если только многогранный угол не сводится к двугранному углу или полупространству.

§ 4. Топологические типы выпуклых тел.

Теорема. *Выпуклые тела могут быть только пяти топологически различных типов:* 1) *конечные выпуклые тела, гомеоморфные шару;* 2) *бесконечные выпуклые тела, гомеоморфные полупространству;* 3) *цилиндры, гомеоморфные бесконечному круговому цилиндру;* 4) *слои между параллельными плоскостями;* 5) *всё пространство.*

Если полной выпуклой поверхностью назвать связную компоненту границы выпуклого тела, то из данной теоремы вытекает, что полные выпуклые поверхности могут быть трёх типов: 1) *замкнутые поверхности, гомеоморфные сфере,* 2) *бесконечные поверхности, гомеоморфные плоскости,* 3) *цилиндрические поверхности, гомеоморфные поверхности бесконечного кругового цилиндра.*

Доказательство этой теоремы основано на следующих двух леммах:

Лемма 1. *Если точка O лежит внутри выпуклого тела H, то луч, идущий из O, либо не имеет общих точек с границей H, либо имеет с ней только одну общую точку.*

Допустим, что луч L, идущий из O, имеет с границей тела H общую точку A. Опишем вокруг O шар S, содержащийся внутри H. Тогда по свойству выпуклости все отрезки, соединяющие точку A с точками шара S, содержатся в теле H, а, следовательно, в теле H содержится весь образованный ими конус [1]. Отрезок OA содержится внутри этого конуса, а, следовательно, также внутри самого тела H. Отсюда, очевидно, следует, что на луче OA не может быть более одной точки границы тела H. Действительно, предположив, что имеются две такие точки A и B, причём B лежит к O ближе, чем A, мы пришли бы к противоречию с тем, что весь отрезок OA лежит внутри H.

Лемма 2. *Если выпуклое тело H содержит целые лучи, исходящие из его внутренней точки O, то эти лучи образуют одну из четырёх фигур: 1) всё пространство, 2) прямую, 3) плоскость, 4) выпуклый конус, включая сюда также выпуклый плоский угол или один луч.*

Пусть L_1 и L_2 — два луча, содержащиеся в теле H и исходящие из точки O. Возьмём на них точки A_1 и A_2. Тогда, так как точки A_1 и A_2 содержатся в теле H, то отрезок A_1A_2 содержится в H, а вместе с этим отрезком в H будет содержаться весь треугольник OA_1A_2. Так как точки A_1 и A_2 можно взять сколь угодно удалёнными от O, то и весь угол между L_1 и L_2 содержится в H, если только лучи L_1 и L_2 не являются один продолжением другого.

Отсюда ясно, что совокупность всех лучей, идущих из O и содержащихся в H, образует выпуклую фигуру. Поэтому для неё имеются только следующие возможности: 1) эта совокупность содержит только один луч, 2) таких лучей только два и они образуют одну прямую, 3) все такие лучи лежат в одной плоскости, но не на одной прямой, и заполняют тем самым либо плоский угол, либо всю плоскость, 4) эти лучи не лежат в одной плоскости и заполняют тогда выпуклый конус, или всё пространство.

Если лучи L_n, содержащиеся в H, сходятся к лучу L, то луч L также содержится в H, потому что H есть замкнутое множество. Следовательно, фигура, образованная рассматриваемыми лучами, является замкнутым выпуклым множеством.

Теперь докажем самую высказанную выше теорему.

Пусть H — выпуклое тело. Возьмём внутри него точку O и опишем вокруг неё единичную сферу S. Возможны три случая:

1) Ни один луч, идущий из O, не пересекает границу тела H.
2) Всякий луч, идущий из O, пересекает границу тела H.
3) Не все лучи, идущие из O, пересекают границу тела H.

В первом случае тело H есть, очевидно, всё пространство, и этот случай можно дальше не рассматривать. Будем поэтому считать, что тело H имеет границу, которую обозначим F.

Согласно лемме 1, луч L, исходящий из O, пересекает границу F тела H в одной только точке. Поэтому, сопоставив каждой точке X поверхности F точку Y сферы S, лежащую на том же луче L, мы получим взаимно однозначное отображение h поверхности F на сферу S (или на часть её). Это отображение h будет также непрерывным, поскольку оно является проектированием на сферу посредством лучей, исходящих из её центра.

Покажем, что отображение h будет также взаимно непрерывным. Пусть точки $Y_1, Y_2, \ldots$ сферы S, соответствующие точкам $X_1, X_2, \ldots$ поверхности F, сходятся к точке Y. Пусть Y соответствует точке X поверхности F. Нужно доказать, что точки X_n сходятся к X. Допустим, однако, что точки X_n не сходятся к точке X. Тогда имеются две возможности: 1) из точек X_n можно выбрать последовательность X_{n_i}, сходящуюся к точке $\overline{X}$, отличной от X; 2) из точек X_n можно выбрать последовательность точек X_{n_i}, безгранично удаляющихся от точки O.

[1]) Аналогичное построение проведено в доказательстве теоремы 1 § 1 (черт. 98).

Рассмотрим первую возможность. Точка $\overline{X}$, как предельная точка для точек границы тела H, сама принадлежит его границе[1]). Вместе с тем, лучи OX_{n_i} сходятся к лучу OX, потому что они проходят через точки Y_{n_i} сферы S, сходящиеся к точке Y, соответствующей точке X. Следовательно, точка $\overline{X}$ должна лежать на том же луче OX. Но, согласно лемме 1, луч, идущий из O, может пересекать границу тела H только в одной точке. Поэтому точка $\overline{X}$ должна совпадать с X.

Рассмотрим теперь вторую возможность, когда точки X_{n_i} безгранично удаляются от O. По выпуклости каждый отрезок OX_{n_i} целиком содержится в теле H. Вместе с тем, эти отрезки сходятся к лучу OX, потому что точки Y_{n_i} на сфере S сходятся к точке Y, соответствующей X. А так как тело H есть замкнутое множество, то весь луч OX содержится в H. Но в таком случае из леммы 1 следует, что этот луч вовсе не может содержать точек границы тела H, а это противоречит тому, что на нём есть такая точка X. Следовательно, вторая возможность исключается, и взаимная непрерывность отображения h доказана.

Теперь мы легко докажем, что *если всякий луч, исходящий из O, пересекает границу тела H, то тело H гомеоморфно шару, а граница его гомеоморфна сфере.*

Действительно, если всякий луч, идущий из O, пересекает границу F тела H, то определённое выше отображение h представляет собой взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение поверхности F на сферу S. Следовательно, F гомеоморфна сфере. Если X есть точка тела H, а Y — точка его границы, лежащая на луче, идущем из O через X, то сопоставим точке X точку X' в шаре S так, что $OX' = \frac{OX}{OY}$ (это возможно, так как шар S — единичного радиуса). Этим определится гомеоморфное отображение всего тела H на шар S.

Допустим теперь, что не всякий луч, исходящий из O пересекает границу F тела H. Тогда, согласно лемме 2, эти лучи, не пересекающие F, образуют одну из трёх фигур: 1) прямую, 2) плоскость, 3) выпуклый конус, включая также выпуклый плоский угол, или один луч.

Рассмотрим первый случай.

Прямая L, не пересекающая F, пересекает сферу S в двух точках A и B. Все лучи, идущие из O в остальные точки сферы S, пересекают F и потому отображение h представляет собою гомеоморфное отображение поверхности F на сферу с двумя исключёнными точками. Следовательно, в этом случае F гомеоморфно бесконечной цилиндрической поверхности.

Пусть X — любая точка тела H, а Y — точка на прямой L. Отрезок XY содержится в H. А так как вся прямая L содержится в H, то точку Y можно взять сколь угодно далеко от точки X. Тело H есть замкнутое множество, а потому отсюда следует, что оно содержит всю прямую, параллельную L и проходящую через точку X. Но X — любая точка тела H; следовательно, всё тело H состоит из таких прямых, т. е. оно есть цилиндр. Сечение его плоскостью, перпендикулярной к прямой L, представляет собой выпуклую область; эта область конечна, потому что её граница взаимно однозначно и взаимно непрерывно проектируется на большой круг сферы S.

Рассмотрим теперь второй случай, когда все лучи, идущие из O и не пересекающие границу тела H, заполняют некоторую плоскость E. Тогда, рассуждая буквально так же, как в предыдущем случае, докажем, что тело H содержит всякую прямую, параллельную плоскости E и проходящую через

[1]) Напоминаем, что граница всякого множества есть замкнутое множество.

любую точку X тела H. Поэтому тело H содержит также всю плоскость, параллельную E и проходящую через X. Оно состоит, следовательно, из таких плоскостей, откуда очевидно, что оно представляет собой слой между парой плоскостей, параллельных E.

Рассмотрим теперь третий случай, когда все лучи, идущие из O и не пересекающие границу F тела H, заполняют выпуклый конус K (или выпуклый плоский угол, или один луч). Конус K пересекает сферу S по сферически выпуклой области, содержащейся в полусфере. Эта область гомеоморфна кругу, что доказывается буквально так же, как для выпуклых областей на плоскости. Дополнением этой области будет область G, гомеоморфная кругу без границы, или, что то же самое, — плоскости. Если K сводится к плоскому углу или лучу, то область G также, конечно, гомеоморфна плоскости. Поэтому определённое выше отображение h (проектирование из точки O на сферу S) даёт гомеоморфное отображение поверхности F на область G и тем самым поверхность F гомеоморфна плоскости.

Пусть Q — тело, получающееся из шара, ограниченного сферой S, если из него исключить все точки сферы S, не принадлежащие G. Очевидно, что Q гомеоморфно полупространству. Определим отображение f тела H на тело Q следующим образом. Пусть Y — точка тела H. Если луч, идущий из O через точку Y, пересекает границу H в точке X, то сопоставим точке Y точку Y' так, что $OY' = \dfrac{OY}{1 - \dfrac{OY}{OX} + OY}$. Если же луч, идущий из O через точку Y, не пересекает границу тела H, то сопоставим точке Y точку Y' так, что $OY' = \dfrac{OY}{1+OY}$.
Легко видеть, что определённое таким образом отображение f есть гомеоморфизм и, следовательно, тело H гомеоморфно полупространству.

Таким образом, наша теорема полностью доказана.

§ 5. Выпуклый многогранник и выпуклая оболочка.

Выпуклым многогранником называется выпуклое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников. В основном тексте, однако, выпуклым многогранником называется поверхность такого выпуклого тела. Грани выпуклого многогранника суть выпуклые многоугольники. Действительно, пусть точка A лежит внутри грани Q выпуклого многогранника P. Опорная плоскость R в точке A не пересекает P и потому совпадает с плоскостью грани Q. Общая часть плоскости R и многогранника P и есть грань Q; вместе с тем она выпукла, как пересечение двух выпуклых множеств: многогранника P и плоскости R.

Вершинами выпуклого многогранника называются те точки его границы, через которые проходят опорные плоскости, не содержащие никаких других точек многогранника.

Выпуклой оболочкой множества M называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M. Из того, что пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество, следует, что выпуклая оболочка есть выпуклое множество. Выпуклая оболочка выпуклого тела есть, очевидно, само это тело.

Лемма. *Выпуклая оболочка конечного числа точек есть геометрическое место центров тяжестей, получающихся при расположении в этих точках всевозможных масс.*

По определению, центром тяжести масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расположенных в точках $X_1, X_2, \ldots, X_n$, называется точка, получающаяся следующим образом.

Из некоторого начала проводим во все точки X_i векторы x_i. Тогда конец вектора

$$x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \tag{1}$$

проведённого из того же начала, и есть центр тяжести данных масс. Считается, конечно, что массы неотрицательны и что $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i > 0$. Элементарные свойства центра тяжести мы считаем известными. Полагая $m_i = t_i \sum\limits_{i=1}^{r} m_i$, мы получим вместо (1)

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \tag{2}$$

где все $t_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Для того чтобы доказать нашу лемму, нужно доказать два утверждения: 1) Центр тяжести любых масс m_i, расположенных в точках X_i, принадлежит выпуклой оболочке точек X_i. 2) Выпуклая оболочка точек X_i содержится в множестве центров тяжестей масс, располагаемых в этих точках.

Докажем первое утверждение. Пусть X есть центр тяжести масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, расположенных в точках $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Центр тяжести можно получать следующим образом. Сперва находим центр тяжести Y_1 масс, лежащих в точках X_1 и X_2 (если в точках X_1 и X_2 массы равны нулю, то эти точки мы просто не рассматриваем). Далее, помещая в Y_1 массу $m_1 + m_2$, находим центр тяжести Y_2 этой массы и массы m_3, лежащей в точке X_3. Точки Y_2 будет вместе с тем центром тяжести масс m_1, m_2, m_3, расположенных в точках X_1, X_2, X_3. Продолжая это построение, мы придём к центру тяжести всех данных масс m_1, $m_2, \ldots, m_n$. Вместе с тем точка Y_1 лежит на отрезке X_1X_2 и, значит, принадлежит выпуклой оболочке точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Точка Y_2 лежит на отрезке Y_1X_3 и так как Y_1 и X_3 принадлежат выпуклой оболочке точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то точка Y_2 тоже ей принадлежит. Повторяя это рассуждение, мы дойдём, наконец, до центра тяжести всех данных масс и убедимся в том, что он лежит в выпуклой оболочке точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Докажем теперь второе утверждение. Возьмём в какой-либо точке X_i массу $m > 0$, а во всех остальных точках нулевые массы. Тогда центр тяжести будет точкой X_i. Следовательно, множество всех центров тяжестей масс, расположенных в точках X_i, содержит все точки X_i. Докажем, что это множество выпукло. Пусть A и B — центры тяжестей, получающиеся при каких-то распределениях масс в точках X_i; пусть в первом случае массы будут a_i, во втором b_i, причём без ограничения общности можно предполагать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 1$. Тогда векторы, идущие из начала в точки A и B, будут согласно (2):

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i. \tag{3}$$

Поместим теперь в точках X_i массы

$$m_i = (1 - t)\, a_i + t b_i, \tag{4}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = (1-t)\sum_{i=1}^{n} a_i + t\sum_{i=1}^{n} b_i = 1,$$

и положение центра тяжести таких масс будет определяться из равенства

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Используя (3) и (4), мы получим, что

$$x = (1-t)\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + t\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = (1-t)a + tb.$$

Из этой формулы ясно, что когда t меняется от нуля до единицы, то конец вектора x пробегает отрезок между концами векторов a и b. Это значит, что весь этот отрезок состоит из центров тяжестей, т. е. если точки A и B принадлежат множеству центров тяжестей, то и отрезок AB содержится в этом множестве. Следовательно, это множество выпукло, а так как оно содержит все точки X_i, то оно содержит и их выпуклую оболочку. Таким образом, лемма доказана.

Теорема 1. ***Выпуклая оболочка конечного числа точек есть выпуклый многогранник, если точки не лежат в одной плоскости; иначе она есть либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, либо одна точка.***

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — данные точки и V — их выпуклая оболочка. Докажем, что она является замкнутым множеством. Пусть последовательность точек A_i из V сходится к точке A. Каждая точка A_i есть центр тяжести некоторых масс $m_1^i, \ldots, m_n^i$, расположенных в точках $X_1, \ldots, X_n$. Можно считать, что при каждом i сумма этих масс равна единице. Тогда можно будет выбрать такую последовательность индексов i, что для каждой точки $X_1, \ldots, X_n$ массы $m_1^i, \ldots, m_n^i$ будут сходиться. Центр тяжести предельных масс и будет точкой A. Этим замкнутость выпуклой оболочки доказана.

Выпуклая оболочка одной точки есть сама эта точка. Выпуклая оболочка точек, лежащих на одной прямой, есть отрезок прямой, соединяющей крайние из этих точек. Пусть точки $X_1, \ldots, X_n$ лежат в одной плоскости, но не лежат на одной прямой. Пусть V — их выпуклая оболочка и A — точка на её границе. Через точку A проходит прямая l, опорная к V, и так как V лежит в одной из полуплоскостей, определяемых прямой l, то и все точки $X_1, \ldots, X_n$ лежат в той же полуплоскости. Тогда ясно, что точка A может быть центром тяжести масс, лежащих в точках $X_1, \ldots, X_n$, только тогда, когда на самой прямой l есть хотя бы одна из точек X_i. Если такая точка только одна, то она совпадает с A, и тогда A есть вершина V. Все остальные точки границы V лежат на прямых, проходящих через пары точек X_i. Таких прямых конечное число и, следовательно, граница V состоит из конечного числа прямолинейных отрезков. Этим доказано, что V есть выпуклый многоугольник.

Пусть теперь точки $X_1, \ldots, X_n$ не лежат в одной плоскости. Тогда их выпуклая оболочка V является выпуклым телом, так как, по доказанному, она замкнута, а по теореме 1 § 2 имеет внутренние точки.

Для того чтобы доказать, что V есть выпуклый многогранник, остаётся убедиться в том, что граница V состоит из конечного числа многоугольников. Пусть A — точка на границе V и P — опорная плоскость к V в этой точке. Тогда V лежит в одном из полупространств, определяемых плоскостью P. Отсюда очевидно, что в самой плоскости P должны лежать некоторые из данных точек X_i, так как иначе точка A не могла бы быть центром тяжести масс, распределённых в этих точках. Вместе с тем, если какая-либо точка X_i не лежит в плоскости P и масса m_i в ней > 0, то центр тяжести не может лежать в плоскости P, а будет лежать по ту сторону от неё, где лежат все точки X_i, не лежащие в самой плоскости. Таким образом, точка A есть центр тяжести масс, лежащих в точках на плоскости P, т. е. принадлежит их выпуклой оболочке. Отсюда следует, что вся граница V состоит из выпуклых оболочек тех совокупностей точек X_i, каждая из которых состоит из точек X_i, лежащих в одной плоскости. Но таких совокупностей точек X_i — конечное число, и выпуклая оболочка каждой из них есть или 1) одна точка, или 2) отрезок, или 3) выпуклый многоугольник. Теорема доказана.

Теорема 2. *Выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин и, следовательно, полностью определяется, когда вершины заданы.*

Доказательство. Из определения выпуклой оболочки ясно, что выпуклая оболочка вершин выпуклого многогранника содержится в этом многограннике. Поэтому достаточно доказать, что, обратно, многогранник содержится в выпуклой оболочке своих вершин.

Пусть A — какая-либо точка выпуклого многогранника P. Если она лежит на его ребре, то она, очевидно, принадлежит выпуклой оболочке вершин этого ребра. Если точка A лежит внутри грани Q, то проведём через неё отрезок до пересечения его с границей грани Q. Тогда концы этого отрезка лежат на рёбрах и, следовательно, принадлежат выпуклой оболочке вершин. Но в таком случае и сам отрезок, а вместе с ним и точка A принадлежат этой выпуклой оболочке. Наконец, если точка A лежит внутри многогранника, то проводим через неё отрезок до пересечения его с границей многогранника. Тогда, по доказанному, концы этого отрезка принадлежат выпуклой оболочке вершин и, значит, сам отрезок, а вместе с ним и точка A принадлежит этой выпуклой оболочке.

§ 6. О сходимости выпуклых поверхностей.

Говорят, что последовательность множеств M_n сходится к множеству M, или что множество M есть предел множеств M_n, если 1) для всякой точки X множества M существует сходящаяся к ней последовательность точек X_n, принадлежащих каждая соответствующему множеству M_n, и 2) всякая точка, не принадлежащая множеству M, не является точкой сгущения никакой последовательности точек, принадлежащих разным множествам M_n (не обязательно по точке из каждого множества, а хотя бы по точке из некоторых множеств M_n разных номеров); иными словами, все точки сгущения последовательностей точек из разных M_n принадлежат множеству M. Этим понятием о сходимости множеств постоянно пользуются, не формулируя его явно. Например, касательная есть предел секущих именно в указанном смысле.

Следует оговориться, что если множество M пусто, то последовательность множеств M_n не считается сходящейся, хотя в этом случае оба требования, поставленные в определении предела, могут быть выполнены. Первое требование заведомо будет выполнено при пустом M, хотя оно становится бессодержательным. Например, последовательность точек, удаляющихся в бесконечность, не имеет точек сгущения, и потому её пределом следует считать пустое множество, если формально применить данное определение предела. Однако, повторяем, в этом случае последовательность не считается сходящейся.

Лемма. *Пусть множества M_i лежат в полупространствах, определяемых плоскостями P_i, проходящими через точки X_i. Назовём внешней ту нормаль к плоскости P_i, которая направлена в полупространство, не содержащее множества M_i. Тогда имеет место следующее: если точки X_i сходятся к точке X и внешние нормали $\mathbf{n}_i$ к плоскостям P_i сходятся к вектору $\mathbf{n}$, то 1) плоскости P_i сходятся к плоскости P, проходящей через точки X и имеющей нормаль $\mathbf{n}$; 2) любая предельная точка последовательности точек,* *принадлежащих разным множествам M_i, лежит в том полупространстве, определяемом плоскостью P, из которого направлена нормаль n.*

Первое утверждение леммы очевидно. Докажем второе утверждение. Пусть точки Y_i, лежащие в разных множествах M_i, сходятся к точке Y. Пусть y и y_i — векторы, идущие из некоторого начала в точки Y и Y_i.

Пусть, кроме того, h_i и h — расстояния от этого начала до плоскостей P_i и P, считаемые положительными от начала в направлении внешней нормали. Так как точки Y_i лежат в тех полупространствах, откуда исходят нормали n_i, то

$$ny_i \leqslant h_i. \tag{1}$$

Так как нормали n_i сходятся к n и плоскости P_i сходятся к P, то h_i сходятся к h. Так как точки Y_i сходятся к Y, то y_i сходятся к y. Следовательно, переходя в (1) к пределу, мы получим, что

$$ny \leqslant h,$$

а это означает, что точка Y лежит в том полупространстве, определяемом плоскостью P, из которого исходит нормаль n.

Теорема 1. *Пусть множества M_i сходятся к M и точки X_i множеств M_i сходятся к точке X. Тогда, если множества M_i имеют в точках X_i опорные плоскости P_i, то предел любой сходящейся последовательности этих плоскостей есть опорная плоскость к множеству M в точке X.*

Доказательство. Если последовательность из плоскостей P_i сходится, то её предел есть некоторая плоскость P, проходящая через точку X. Из этой последовательности плоскостей P_i можно, конечно, выбрать такую, у которой внешние нормали сходятся. Тогда из предыдущей леммы вытекает, что предел множеств M_i лежит по одну сторону от плоскости P. Кроме того, плоскость P проходит через точку X, которая принадлежит пределу множеств M. Следовательно, плоскость P — опорная к множеству M в точке X.

Доказанную теорему можно несколько неточно формулировать словами: *предел опорных плоскостей к сходящимся множествам есть опорная плоскость к пределу этих множеств.* Эта формулировка, однако, верна только тогда, когда множества ограничены в совокупности; иначе точки X_i, где плоскости P_i упираются в множества M_i, могли бы удаляться в бесконечность, и предел плоскостей P_i мог бы вовсе не иметь общих точек с пределом множеств M_i. Легко указать примеры, когда так дело и обстоит. Если же множества M_i ограничены в совокупности, то точки X_i имеют точку сгущения, и она будет той точкой, где предел плоскостей P_i упирается в предел множеств M_i. Следовательно, в этом случае указанная формулировка теоремы допустима.

Будем называть *замкнутым выпуклым многогранником* границу выпуклого многогранника, т. е. выпуклого тела, ограниченного конечным числом многоугольников. Будем говорить, что выпуклый многогранник вписан в выпуклую поверхность F, если все его вершины лежат на поверхности F.

Теорема 2. *Для всякой замкнутой выпуклой поверхности существует сходящаяся к ней последовательность вписанных в неё замкнутых выпуклых многогранников.*

Доказательство. Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность и ε — данное положительное число. Розобьём всё пространство на кубы со сторонами, равными $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, и возьмём все те из этих кубов, которые имеют общие точки с поверхностью F. В каждом из взятых кубов возьмём по точке поверхности F и обозначим эти точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если взятые точки лежат в одной плоскости, то можно добавить к ним ёще другие точки поверхности F так, чтобы они вместе с ранее выбранными уже не лежали все в одной плоскости; иначе поверхность F лежала бы в плоскости, что невозможно; поэтому можно считать, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не лежат в одной плоскости.

Легко видеть, что куб со стороной $\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, содержащий точку A_i, помещается в шаре радиуса ε с центром в точке A_i. Так как взятые кубы покрывают поверхность F, то все шары радиусов ε, описанные около точек A_i, тоже её покрывают. Иными словами, каждая точка поверхности F удалена от одной из точек A_i не более, чем на ε.

Пусть P — граница выпуклой оболочки точек $A_1, \ldots, A_n$. В силу теоремы 1 § 5, P есть замкнутый выпуклый многогранник. Он вписан в поверхность F[1]).

Возьмём теперь последовательность чисел ε_i, стремящихся к нулю, и для каждого ε_i возьмём, как было только что указано, точки $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{n_i}^i$. Пусть P_i — вписанные в поверхность F замкнутые выпуклые многогранники, полученные посредством только что указанного построения. Докажем, что многогранники P_i сходятся к поверхности F.

Пусть X — точка на поверхности F. По выбору точек $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{n_i}^i$, среди них существует точка $A_{k_i}^i$, удалённая от X не более чем на ε_i. Так как ε_i стремится к нулю, то эти точки $A_{k_i}^i$ сходятся к точке X. Точки $A_{k_i}^i$ лежат на многогранниках P_i и, следовательно, каждая точка поверхности F есть предел точек, лежащих на многогранниках P_i.

Если мы теперь докажем, что всякая сходящаяся последовательность точек, лежащих на разных многогранниках P_i, сходится к точке поверхности F, то тем самым будет доказано, что F есть предел P_i.

Пусть последовательность точек X_j, лежащих на разных многогранниках P_j, сходится к какой-либо точке X. Точка X не может лежать вне тела H, ограниченного поверхностью F. Действительно, многогранники P_j суть границы выпуклых оболочек точек, лежащих в этом теле H, и так как тело H есть замкнутое множество, то предел точек X_j также лежит в теле H.

Итак, точка X лежит в теле H. Через точки X_j проходят опорные плоскости R_j к многогранникам P_j. Из этих плоскостей можно выбрать такую последовательность R_{j_k}, что внешние нормали к плоскостям R_{j_k} сходятся. Тогда самые плоскости R_{j_k} сходятся к некоторой плоскости R, проходящей через точку X. По доказанной выше лемме плоскость R будет опорной к множеству всех точек, предельных для точек, лежащих на многогранниках P_{j_k}. Мы уже доказали, что каждая точка поверхности F есть такая предельная точка. Поэтому поверхность F лежит по одну сторону от плоскости R. Но точка X лежит в теле H, ограниченном поверхностью F, и вместе с тем лежит на плоскости R. Следовательно, она лежит на поверхности тела H, т. е. на F, что и требовалось доказать.

Пользуясь аналогичными рассуждениями, можно доказать, что всякая замкнутая выпуклая кривая является пределом вписанных замкнутых выпуклых ломаных.

Теорема 3. *Предел границ выпуклых множеств есть граница выпуклого множества.*

Доказательство. Пусть границы F_n каких-либо выпуклых множеств сходятся к некоторому пределу F. Для краткости мы будем называть F_n и F поверхностями. Пусть X — точка на поверхности F, а X_n — точки на поверхностях F_n, сходящиеся к X. В точке X_n поверхность F_n имеет опорную плоскость P_n. Из плоскостей P_n можно выбрать последовательность P_{n_i}, у которой внешние нормали сходятся. Тогда плоскости P_{n_i} сходятся

[1]) Вершинами P могут быть только точки A_i, как легко заключить из свойств выпуклой оболочки. Поэтому все вершины P лежат на поверхности F.

к некоторой плоскости P, которая, в силу теоремы 1, будет опорной к поверхности F в точке X.

Беря всевозможные точки X на поверхности F и все возможные сходящиеся последовательности опорных плоскостей P_{n_i}, мы получим все возможные плоскости P, предельные для плоскостей P_n. Пусть H — множество, являющееся пересечением тех полупространств, определяемых всеми этими плоскостями, в которых лежит поверхность F. По доказанному, все плоскости P — опорные к F, и потому множество H содержит поверхность F и, значит, не пусто. Вместе с тем, как пересечение полупространств, оно выпукло. Мы видели, что через каждую точку поверхности F проходит хотя бы одна из плоскостей P. Поэтому поверхность F лежит на границе множества H. Если мы теперь докажем, что никакая точка, не принадлежащая F, не может лежать на границе множества H, то тем самым наша теорема будет доказана.

Пусть точка X не принадлежит F. Так как F есть предел поверхностей F_n, то точка X не может быть точкой сгущения никакой последовательности точек, лежащих на разных поверхностях F_n. Поэтому вокруг X можно описать такой шар S, что при достаточно больших n ни одна из поверхностей F_n не будет пересекать этот шар. Допустим, что при сколь угодно больших n шар S лежит в тех выпуклых множествах, границами которых являются поверхности F_n. Тогда он лежит во всех полупространствах, содержащих поверхности F_n, и, следовательно, лежит также в пересечении этих полупространств. Вспоминая определение множества H, мы видим, что шар S лежит в этом множестве. Следовательно, точка X есть внутренняя точка этого множества и не лежит на его границе.

Допустим теперь, что шар S лежит вне тел ограниченных поверхностями F_n со сколь угодно большими номерами n. Тогда, по теореме 4 § 2, у каждой из этих поверхностей найдётся опорная плоскость, отделяющая её от шара S. Предел сходящейся последовательности таких плоскостей будет одной из рассмотренных нами плоскостей P и он отделит множество H от шара S. Поэтому центр шара S, т. е. точка X не будет лежать на границе H.

Следовательно, если точка X не принадлежит F, то она не лежит на границе H. А так как мы уже доказали, что F лежит на границе H, то тем самым F есть граница множества H. Множество H выпукло, и, значит, F есть граница выпуклого множества. В частности, если F_n суть замкнутые выпуклые поверхности, ограниченные в совокупности, то их предел есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо плоская выпуклая область, либо отрезок, либо точка.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.